第5章　接空間

多様体を学ぶ上で，接空間というのは鬼門のような気がする．(少なくとも初めて習ったときはそう感じた.）まず，名前が良く無い．接線や接平面の拡張として接空間があるのだ，と考えると，理解を妨げることになるだろう．そのような意味での「接空間」は，$\mathbb{R}^3$ の中に球面が置かれているときのように，多様体がより高次元のユークリッド空間の部分集合として与えられる場合にしか存在しないからである．ときどき「接ベクトル空間」という言い回しを見つけるが，こちらのほうがはるかに良い．[1]

多様体の教科書では，方向微分の空間として接空間を定式化するのが普通である．しかしこの方法はものすごく不自然で（最初は誰でもそう思うのだが，いつのまにか慣れてしまう），導入方法としては良いとは思えない．このノートでは，もっと自然な導入方法を試みる．[2]

5.1　速度ベクトル

多様体内で速度ベクトルを考えよう．[3]なぜそのようなベクトルが必要なのか，理由を少し述べてみたいと思う.

理由その１． たとえば多様体内を，何か質量をもった物体が運動しているかもしれない．その物体はどの方向に，どのくらいの勢いをもって動いているのか？これらの勢いを比較することはできるのか？一定時間における移動距離を測ることはできるか？

一番簡単な例は，宇宙空間における天体の運動であろう．たとえば相対性理論では，絶対的な座標系を取ることができない空間の中で，物体の運動を定量的に扱う必要がある．そのとき，速度ベクトルとは何なのか，説明できないと困るであろう.

理由その２． 多様体内は，何か気体や液体のようなもので満たされていて，それが時間とともに流れを成しているかもしれない．このとき，ある点における流れの方向やその勢いを気にするのは当然であろう.

たとえば，地球表面における風の流れや，海流．これらはベクトル場の概念と密接に関連している.

速度ベクトルの定義（ユークリッド空間）． まずはユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における速度ベクトルの定義を（ベクトル解析風に）思い出しておこう．標語的にいうと,「速度ベクトル」とは「C^1 級曲線の速度ベクトル（になりうるベクトル）」のことである．まずは $\mathbb{R}^n$ 内の「C^1 級曲線」を定義しておこう：

[1] もっと即物的に,「速度ベクトル（の）空間」と呼んだほうがよいかもしれない.

[2] ある日，偶然手に取った Lang の教科書でも全く同じ定義をしていたので安心した．すなわち，私だけが勝手にやっているわけではない.

[3] ここでは宇宙空間的な発想で物事を考えるため,「多様体上の速度ベクトル」とは言わず,「多様体内の速度ベクトル」と言う.「多様体上の」というと，どうしても曲面が頭に思い浮かんでしまい，ちょっと都合が悪いのだ.

C^1 級曲線の定義（ユークリッド空間版）

- 区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像を**曲線** (curve) とよぶ.
- 曲線 $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ が C^1 **級**であるとは，$\boldsymbol{x}(t) = (x_i(t))_{1\leq i\leq n}$ と $\mathbb{R}^n$ の座標値で表したとき，各座標値 $t \mapsto x_i(t)$ が t の C^1 級関数であることをいう.

つぎに C^1 曲線のある点における「速度ベクトル」を次のように定義する：

$\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ が C^1 級曲線を定めるとき，この曲線の $x(t_0)$ $(a < t_0 < b)$ における**速度ベクトル**を

$$\boldsymbol{v} \ = \ \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t_0) \ := \ \lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0)}{t - t_0}$$

と定義する.

言い換えると，$\Delta t \to 0$ のとき，

$$\boldsymbol{x}(t_0 + \Delta t) \ = \ \boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t)$$

と書けるような $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x}(t_0)$ における速度ベクトルと呼ぶのである（図 5.1）. [4]

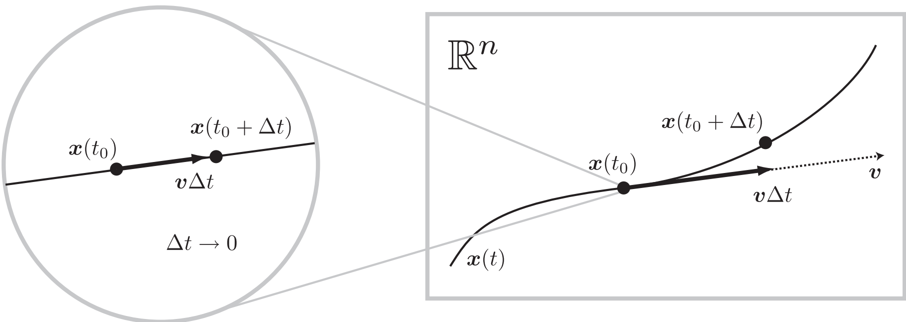

図 5.1: $\boldsymbol{v}$ の意味．Δt を 0 に近づけていくと，左の拡大された円内のように，差分 $\boldsymbol{x}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{x}(t_0)$ と $\boldsymbol{v}\Delta t$ の区別がつかなくなってくる.

つぎにユークリッド空間のある点における「速度ベクトル」を次のように定義する：

定義（速度ベクトル空間）．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{p}$ を固定する．点 $\boldsymbol{p}$ を通過する全ての C^1 級曲線を考え，それから得られる $\boldsymbol{p}$ における速度ベクトルの全体を

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$$

と表し，便宜的に「$\mathbb{R}^n$ の $\boldsymbol{p}$ における**速度ベクトル空間** (velocity vector space)」とよぶことにする．また，$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ の元を「$\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{p}$ における**速度ベクトル** (velocity vector)」とよぶ.

---

[4] この $\boldsymbol{o}(\Delta t)$ はベクトル $\boldsymbol{e}(\Delta t) := \boldsymbol{x}(t_0 + \Delta t) - (\boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{v}(t_0)\Delta t)$ のことであるが，とくに $\|\boldsymbol{e}(\Delta t)\|/|\Delta t| \to 0$ $(\Delta t \to 0)$ を満たすことを表現するための記号であった.

この集合は実質的に $\mathbb{R}^n$ と同じである．実際，C^1 級曲線の速度ベクトルはいつも $\mathbb{R}^n$ の元であるし，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ にたいし $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$ $(t \in \mathbb{R})$ とおけば $\boldsymbol{p}$ を時刻 $t = 0$ に速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する C^1 級曲線（直線）になっている．(ただし，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の場合は定数写像.）それでもこの集合をわざわざ $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ と書くのは，$\boldsymbol{p}$ という点を通る曲線から得られたという由来をはっきりさせるためである．[5]

一般の開集合における速度ベクトル空間．開集合 $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ と点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{U}$ が与えられているとき,「$\mathbb{U}$ の $\boldsymbol{p}$ における速度ベクトル空間」を

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{U} \ := \ \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$$

として定義する．これも $\mathbb{R}^n$ と同じ集合だが，考えている点と開集合のペアを強調したいときにこのような書き方をすると約束する．

5.2 多様体内の速度ベクトル

では多様体 $M = (M, \mathcal{A})$ の世界に戻ろう．といっても，多様体自体ははどこか遠くにあって，我々が扱えるのは地図帳 $\mathcal{A}$ に書き写された（映し出された）情報だけなのであった．

記号． いまいちど，地図帳にかんする記号を確認しておこう．最初に与えた多様体の定義では地図帳 $\mathcal{A}$ の「ページ番号」 として，添え字 $\lambda, \mu \in \Lambda$ を使ったが，これを廃止して，そのかわり，局所座標そのものを添え字のように考え，

$$\mathcal{A} \ = \ \{\phi : U_\phi \to \mathbb{R}^n\}$$

と表現することにする．すなわち ϕ_λ，$\phi_\mu \in \mathcal{A}$ の代わりに，単に $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ などを用いる．

また，$\phi : U_\phi \to \mathbb{R}^n$ による像 $\phi(U_\phi) \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{U}_\phi$ で表す．この $\phi : U_\phi \to \phi(U_\phi) = \mathbb{U}_\phi$ は同相写像である．

多様体内で移動する物体の速度をいかに表現するか？ この多様体内をある物体が運動していて，時刻 $t \in \mathbb{R}$ における多様体内での位置が $x = x(t)$ と表されるとする．また，時刻 t_0 を適当に固定し，$p = x(t_0)$ とおく．このとき，時刻 t_0 における物体の「速度（ベクトル)」を考えたいのである．

たとえばユークリッド空間で速度ベクトルを定義したときのように，

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

という量を考えたらどうだろう？残念ながら，この式は一般に意味を**もたない**．なぜなら，右辺の分子 $x(t) - x(t_0)$ は多様体 M 内の点の「引き算」だが，M に備わっているのは抽象的な位相空間としての性質と地図帳だけで，そのような代数的な演算ができるかどうかは一切仮定しなかったからである．[6]なにかひと工夫必要なようだ.

地図帳で物体の速度を観測する． いま東京上空を「東に時速 500km」で飛行機が通過したとしよう．世界地図帳を手に取ると，東京が含まれるページが少なくともひとつ，一般には

[5]ここで定義した「速度ベクトル」「速度ベクトル空間」は，あとで定義する多様体の意味での「接ベクトル」「接空間」とみなすことができる．この記号はそれを先取りしたものである．

[6]ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間なので，そのような引き算がたまたま意味をもったのである.

複数見つかるだろう．それぞれのページには，この飛行機の航路を記録することができる．また，その速度も平面ベクトルとしてページ内に矢印で表現できるだろう．地図帳の各ページは異なる図法と縮尺で地表を投影しているので，矢印の向きや大きさはページごとで異なるのが普通である．しかし，異なると言っても，同一の飛行機の同一の運動を記述しているのだから，全く無関係というわけではない．その関係を明らかにするのが，この節の目的である．

この飛行機の例を念頭におきつつ，同じことを多様体で数学的に表現してみよう．

C^1 級曲線の定義（多様体版）． 以下，M は C^1 級多様体と仮定する．まずは飛行機の移動経路に対応するものとして，多様体の中の C^1 級曲線を次のように定義する：

> **定義（多様体内の C^1 級曲線）**．
>
> - 区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で定義された連続写像 $x : [a, b] \to M$ を**曲線** (curve) とよぶ．
> - 曲線 $x : [a, b] \to M$ が C^1 **級**であるとは，M の任意の局所座標 $\phi : U_\phi \to \mathbb{U}_\phi$ にたいし，$x(t_0) \in U_\phi$ $(t_0 \in (a, b))$ であれば t_0 に十分近い t に関して $t \mapsto \phi \circ x(t)$ が $\mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{R}^n$ 内の C^1 級曲線になっていることをいう．

局所座標の各ページは多様体の一部分しか表現しないので，曲線も部分部分しか表現できない．そのため，上のようなまどろっこしい定義になってしまうのである．

ただしあとで確認するように，次の事実が成り立つことに注意しておこう：

> C^1 級多様体 M の曲線の一部を地図帳のあるページで表現したときに C^1 級曲線になっていれば，その部分を含む他のページでも C^1 級曲線になっている．

すなわち曲線が C^1 級曲線かどうかを調べるとき，全てのページでの像を確認する必要はないのである．

速度ベクトルの表現． $p \in M$ を固定する．時刻 $t = 0$ に p を通過する C^1 級曲線 $x : [-1, 1] \to M,\ t \mapsto x(t)$ を考えよう．これはちょうど，東京上空を通過する飛行機の経路に対応する．

次に地図帳 $\mathcal{A}$ を開いて，点 $p = x(0)$ が記録されているページ $\phi \in \mathcal{A}$ をさがそう．[7]すなわち局所座標 $\phi : U_\phi \to \mathbb{U}_\phi$ であり，$p \in U_\phi$ となるものである．点 p の像を $\boldsymbol{p} = \phi(p) \in \mathbb{U}_\phi$ と表そう．このとき，地図帳の ϕ ページ目の $\mathbb{U}_\phi$ （これは $\mathbb{R}^n$ の開集合）の中には C^1 級曲線 $x(t)$ の時刻 $t = 0$ 前後の様子が $\boldsymbol{x}(t) := \phi(x(t))$ $(t \approx 0)$ として記録されているはずである．

以下，もう少しだけ話を明確にするために，ϵ を十分小さい正の数として固定し，$t = 0$ を含む時刻の区間 $\mathbb{I} = [-\epsilon, \epsilon]$ について $x(\mathbb{I}) \subset U_\phi$ であると仮定しよう．地図帳の ϕ ページ目を見れば,「飛行経路」が $\boldsymbol{x}(\mathbb{I}) \subset \mathbb{U}_\phi$ という形で記録されているわけである．

このとき，C^1 級曲線 $\boldsymbol{x} : \mathbb{I} \to \mathbb{U}_\phi$ の時刻 0 における速度ベクトル

$$\boldsymbol{v} \ = \ \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(0) \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{x}(\Delta t) - \boldsymbol{x}(0)}{\Delta t}$$

が計算できる．これは $\boldsymbol{p} \in \mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{R}^n$ における速度ベクトル空間 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{U}_\phi = \mathbb{R}^n$ の元であり，もとの多様体内での「飛行経路」を，地図帳のあるページに記録した上で，そのページの座標系に関して速度を「矢印」として表現したものと考えられる．

[7] 地図帳の定義 (M2)(a) から，そのようなページ $\phi \in \mathcal{A}$ が少なくともひとつ存在する．

局所座標への依存性. 地図には縮尺や図法の違いがあるので，おなじ「東京上空を飛ぶ飛行機」であっても，航路の記録され方がページごとに異なってしまうのであった.

いま，ϕ とは別の $\psi \in \mathcal{A}$ が存在して，$p \in U_\psi$ であったと仮定しよう．このとき，必要に応じて $\epsilon > 0$ を小さいものに置き換えれば，$x(\mathbb{I}) \subset U_\phi \cap U_\psi$ としてよい．また,「飛行経路」$x(t)$ $(t \in \mathbb{I})$ を ψ で観測して，$\mathbb{U}_\psi$ 内では $\boldsymbol{y}(t) := \psi(x(t)), \boldsymbol{q} = \psi(p) = \boldsymbol{y}(0)$ と表されるとしよう．このとき，$\boldsymbol{v}$ と同様にして速度ベクトル

$$\boldsymbol{u} \;=\; \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(0) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{y}(\Delta t) - \boldsymbol{y}(0)}{\Delta t}$$

が計算できて，こちらは $\boldsymbol{q} \in \mathbb{U}_\psi \subset \mathbb{R}^n$ における速度ベクトル空間 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{q}}\mathbb{U}_\psi = \mathbb{R}^n$ の元である．

さて，ふたつの速度ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{U}_\phi$ と $\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{q}}\mathbb{U}_\psi$ の関係を明らかにしたい．いま，$\boldsymbol{p}$ の近傍 $\phi(U_\phi \cap U_\psi)$ において同相写像

$$\Phi = \Phi_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U_\phi \cap U_\psi) \to \psi(U_\phi \cap U_\psi)$$

が定まっている．地図帳の ϕ ページ目と ψ ページ目の「重なり合う部分」の関係（対応）は，この写像のみで表現されている．とくに多様体 M は C^1 級であったから，この写像 Φ も C^1 級同相写像であり，点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{U}_\phi$ における微分 $D\Phi(\boldsymbol{p})$ が n 次正方行列として計算できる．（その n^2 個の成分は，p, ϕ, ψ のみに依存して定まる具体的な数値である.）速度ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ の関係は，この微分（行列）を用いて次のように記述できる：

命題（速度ベクトルの変換式）. ϕ ページの速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と ψ ページの速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ にたいし，

$$\boldsymbol{u} \;=\; D\Phi(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{v}$$

が成り立つ.

ただし，上の等式において $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{u}$ は縦ベクトル（n 行 1 列の行列）とみなしている．

C^1 級曲線 $x(t)$ は地図帳の複数のページに表現されるが，それぞれのページにおける「速度ベクトルの表現」は上のような関係式で互いにリンクしあっているのである．再度，微分 $D\Phi(\boldsymbol{p})$ の部分は ϕ, ψ, p のみで決定される「具体的な数値を成分とする」行列であり，C^1 級曲線 $x(t)$ に依存しないことに注意しておこう．この変換公式は多様体 $(M, \mathcal{A})$ に備わっている性質だといえる.

命題の証明. 同相写像 $\Phi : \phi(U_\phi \cap U_\psi) \to \psi(U_\phi \cap U_\psi)$, $\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$ を成分で

$$\boldsymbol{y} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix} \;=\; \Phi(\boldsymbol{x})$$

と表したとき，各 y_j は $x_1, \ldots, x_n$ に関する C^1 級関数である（多様体 M は C^1 級！）．さらに，Φ は $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき

$$\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{p}) \;=\; \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \tag{5.1}$$

という形の近似表現をもつ．ここで，$\boldsymbol{J} = D\Phi(\boldsymbol{p}) = (\partial y_i / \partial x_j)_{ij}$ は微分（ヤコビ行列）であり，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$ は n 次正方行列と n 次元縦ベクトルとの積とみなしている.

さて C^1 級曲線 $x(t)$ の $t=0$ における地図帳での表現を考えよう．ϕ ページ目における $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{v}$ の定義から，1 次近似式

$$\boldsymbol{x}(0+\Delta t) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0)$$

が $\mathbb{U}_\phi \subset \mathbb{R}^n$ 内の $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}(0)$ 付近で成立している．同様に ψ ページ目においても，1 次近似式

$$\boldsymbol{y}(0+\Delta t) = \boldsymbol{y}(0) + \boldsymbol{u}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0)$$

が $\mathbb{U}_\psi \subset \mathbb{R}^n$ 内の $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{y}(0)$ 付近で成立している．この $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{v}$ で表現するのが目標である．

まず $t \in \mathbb{I}$ のとき，

$$\boldsymbol{y}(t) \;=\; \Phi \circ \boldsymbol{x}(t)$$

が成立していることに注意する．[8]

ここで (5.1) 式に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\Delta t)$，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}(0)$ を代入すれば，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t)$ より

$$\Phi(\boldsymbol{x}(\Delta t)) - \Phi(\boldsymbol{x}(0)) \;=\; \boldsymbol{J}\,(\boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t)) + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t)\|).$$

さらに $\boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t) = \boldsymbol{O}(\Delta t)$ であるから，上の式は結局

$$\boldsymbol{y}(\Delta t) - \boldsymbol{y}(0) \;=\; \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t)$$

を意味する．$\boldsymbol{y}(\Delta t) - \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{u}\Delta t + \boldsymbol{o}(\Delta t)$ であったから，

$$\boldsymbol{u} \;=\; \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{v}$$

が成立する．以上で変換公式が証明された． ■

「東京上空を飛ぶ飛行機の速度」は，地図帳ではページごとで異なる速度ベクトルとして表現される．これらは地図帳に備わっている座標変換（の微分）によって互いに関連しあっていて，一斉にある飛行機の「速度」を表現しているのである．われわれが地図帳しか見なくても飛行機の「速度」というものにある種のリアリティーを感じることができるのは，このような関連性が無意識のうちに処理されて,「同一の何かを表現している」と認識しているからである．この「同一の何か」を取り出す過程が,「多様体の接ベクトル」を定義する際に必要となる．

練習．もし，M が C^0 級かつ C^1 級でなければ，以上の議論でどこが問題になるか考えよ．

5.3 同値類

数学では「同一視する」という言葉がよく用いられる.「同一視する」ときには，何を同じとみなすかを明確に宣言するのが作法である．

少し一般的に,「同じ」とはなにか，考えてみよう：

- 2 枚の鏡を用意する．片方の鏡に映った自分と，もう一方の鏡に映った自分は「同じ」であろうか？

[8] いま，$t \mapsto \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ の各成分はパラメーター t の C^1 級関数であり，したがって，合成関数 $t \mapsto \Phi \circ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ もまた t に関して C^1 級である．このことから，先ほど「事実」として述べたことが正当化される．

- いま，ここにいる「私」と，トイレにいるときの「私」は別人だろうか？いや，同じ「私」だと答えるならば，その論拠はなにか？
- 「私の家のりんご」と「八百屋のりんご」がおなじ「りんご」であると理解できるのは，なぜか？
- これらを器械（ロボット）に理解させるには，どうすればよいか？

「同じ」であると判断する行為は，異なる「あれ」と「これ」の性質の一部に着目して，共通の「仮の名前」をつける行為である.「仮の名前」をつけることで，この「仮の名前」をもった「あれ」や「これ」たちの集合をひとくくりにして考えることができる.

2 という数字は，ふたつのりんご，ふたつのみかん，ふたりの人，ふたつの指，ふたつの木．ふたつの星，etc，これらすべてのもつ共通の性質として認識されている.

数学の世界では，これとあれを「同じとみなす」ことを「同一視する」とよんでいる．さらに，何をどう同一視するかはあらかじめ明言される．たとえば,「私の家のこれ」も,「八百屋のあれ」も,「木の上のあれ」も,「ニュートンのあれ」も，すべて同一視し，これを「りんご」と呼びます，と宣言するのである．このように宣言する行為を「**同値類** (equivalent class) を定める」と呼ぶ.

人類における「男性」と「女性」,「日本人」や「関西人」といった概念も,（一部の例外を恐れず，おおらかに考えれば）同値類として定式化できるであろう．卑近ではあるがこういう例を頭に置いておくことで，新しい概念も既知のもののようにすんなりと受け入れられるものである.

同値関係と同値類. 集合 X を考えよう．いま，$x, y \in X$ にたいし，x と y を「同一視すること」を $x \sim y$ と書こう．x と y は，われわれの「同一視する」という意識（意思）を通して，連結されたのである.

また，同一視せず,「区別する」場合は $x \nsim y$ と書くことにする.

このとき，$z \in X$ とすれば

- $x \sim x$
- $x \sim y \implies y \sim x$
- $x \sim y$ かつ $y \sim z \implies x \sim z$

でなければならない．これらの性質を満たす関係 $x \sim y$ （もしくは $x \nsim y$ ）が X 内のすべての元同士で宣言されているとき，$\sim$ は X 内で**同値関係** (equivalent relation) を定めるという．このとき，集合 X 内の元は同値関係によって関連づけられ，ネットワーク化される．とくに，$x \sim y$ となる y 全体を $[x] \subset X$ で表し，これを x の**同値類** (equivalent class) と呼ぶ．さらに，同値類全体の集合を

$$X/\sim \ := \ \{[x] : x \in X\}$$

と書き，X の $\sim$ による**商集合** (quotient set) と呼ぶ.

例. まずはひとつ，大雑把な例を挙げよう．DNA を遺伝物質とする生物全体を考えて，生物 x と生物 y の DNA の特定部位を比較し，同じならば同じ「種」とみなし $x \sim y$ とする．これは生物の「種」をさだめる同値関係である．また，DNA の全体を比較し，同じならば

同じ「個体」とみなす．これは生物の「個体」を定める同値関係である．(もちろん，DNA の偶然の一致も考えられるだろう．モノを同一視するとき，そのような定義の不備も自動的に組み込まれてしまう.)

次に，もうすこし数学的な例をあげよう．単純だが，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ について，$m \sim n$ を $m-n$ が 7 の倍数であると定義しよう．たとえば

$$\cdots \sim -6 \sim 1 \sim 8 \sim 15 \sim \cdots$$

となる．このとき，同値類の言葉で書けば

$$\cdots \;=\; [-6] \;=\; [1] \;=\; [8] \;=\; [15] \;=\; \cdots$$

が成り立つ.

さて来週の月曜日を第 1 日と呼ぶことにしよう．この日から n 日後（$n \in \mathbb{Z}$）を第 $n+1$ 日と呼ぶことにする．いま，第 m 日が月曜日ならば，m はかならず上の同値類に含まれているはずである．すなわち，上の同値類は「月曜日」の概念を定める同値類だといえる．この意味で，$\mathbb{Z}$ と「日付」の集合が対応し，商集合 $\mathbb{Z}/\sim$ と「曜日」の集合が対応する.

別の言い方をすれば，第 -6 日も第 1 日も第 8 日も，すべて一斉に「月曜日」という概念の表現して（もしくはその一端を担って）いる.「月曜日は休みの店が多い」と言った時の，この「月曜日」である.

5.4 多様体内の速度ベクトル（接ベクトル）の定義

すこし寄り道したようだが，非常に大事な用件をすませた．本題にもどろう.

C^1 級多様体 $M=(M,\mathcal{A})$ 内のある点 p を固定する．p の像は地図帳の複数のページにみられるであろう.(そのようなページは無限にあるかもしれない.) そのようなページ番号全体の添え字集合を $\mathcal{A}(p) \subset \mathcal{A}$ とし，和集合

$$\tilde{\mathrm{T}}_pM \;:=\; \bigcup_{\phi \in \mathcal{A}(p)} \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$$

を考える．$\mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ は $\phi(p)$ における開集合 $\mathbb{U}_\phi$ の速度ベクトル空間であり，実体は $\mathbb{R}^n$ である．すなわち，集合 $\tilde{\mathrm{T}}_pM$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のコピーを $\mathcal{A}(p)$ に含まれるページの数だけ束ねたものである.

さてこれから $\tilde{\mathrm{T}}_pM$ 内のベクトルたちを，同値関係によって分類したい．$\tilde{\mathrm{T}}_pM$ のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ と $\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi$ （ただし $\phi, \psi \in \mathcal{A}(p)$）が次を満たすとき，$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{u}$ と表すことにする：

> $\boldsymbol{p} = \phi(p) \in \mathbb{U}_\phi$ の近傍で定義された座標変換 $\Phi = \psi \circ \phi^{-1}$ に関して,
>
> $$\boldsymbol{u} \;=\; D\Phi(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}$$
>
> が成り立つ．ただし，$D\Phi(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$ における Φ の微分（行列）とする.

このように定義した $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{u}$ は集合 $\tilde{\mathrm{T}}_pM$ 内に同値関係を定めることがわかる（各自確認せよ）．このような $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ を「同値なベクトル」とよぼう.

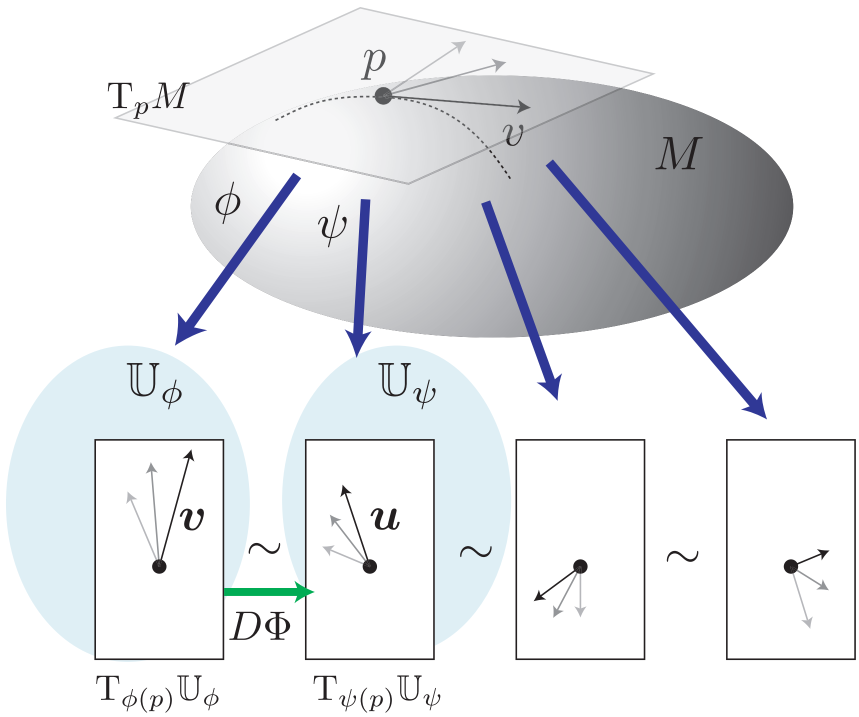

図 5.2: 多様体内の速度ベクトルの定義

さてこの商集合 $\tilde{\mathrm{T}}_pM/\sim$ を（習慣的に）多様体 M の p における**接ベクトル空間** (tangent vector sppace) もしくは簡単に**接空間** (tangent space) とよび，記号 T_pM で表す．また，T_pM の元を p における**速度ベクトル** (velocity) もしくは**接ベクトル** (tangent vector) とよぶ．

前々節での考察をおもいだしながら，この商集合の意味を考えてみよう．多様体内を運動するある物体が，ある瞬間 p を通った．このような物体の「勢いと方向」そのものは数値化こそできないが，$\mathcal{A}(p)$ に含まれるページたちの上で一斉に矢印（速度ベクトル）として表現されている．それらは互いに座標変換の微分によって関係づけられているので，上の同値関係により「同一視」される．すなわち，同値であるとみなされた $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ と $\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi$ は，この物体の勢いと方向を別々のページで数値的に表現したものだと解釈できる．

すなわち多様体の接ベクトル $v \in \mathrm{T}_pM$ とは同値類 $v = [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}] \in \mathrm{T}_pM$ であって，

> 『あるページでは $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ と表され，別のあるページは $\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi$ と表され…とページごとに異なる速度ベクトルで表現されるようなもの．ただし，$\boldsymbol{u} = D\Phi(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}$ が成り立つ』

ということになる．

ベクトル空間としての接空間． さて次に，T_pM の元が「ベクトル」と呼ばれるに値するものであることを確認しよう．

命題 T_pM は $\mathbb{R}^n$ と同型なベクトル空間である．

これを確認するためには，以下を納得すればよい：

(a) T_pM のベクトルに，和とスカラー倍の演算が定義できること．

(b) これらの演算のもと，T_pM がベクトル空間の公理を満たすこと．

(c) T_pM がある $\phi \in \mathcal{A}(p)$ にたいし，$T_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi = \mathbb{R}^n$ と同型であること

ここでは (a) と (c) のみ確認しておこう．

まず，$u, v \in \mathrm{T}_pM$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，任意の $\phi \in \mathcal{A}(p)$ において，$u = [\boldsymbol{u}_\phi]$ および $v = [\boldsymbol{v}_\phi]$ を満たす速度ベクトル $\boldsymbol{u}_\phi$，$\boldsymbol{v}_\phi \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{U}_\phi$ が一意的に定まる．ただし $\boldsymbol{p} = \phi(p)$ である．いま，T_pM における和とスカラー倍を

$$u + v \ := \ [\boldsymbol{u}_\phi + \boldsymbol{v}_\phi], \quad \alpha v \ := \ [\alpha \boldsymbol{v}_\phi]$$

で定義しよう．このままでは一見 ϕ の選びかたに依存するように見えるので，そうでないことをチェックしなければならない．

いま，$\boldsymbol{u}_\phi, \boldsymbol{v}_\phi \in \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ であり，$\mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ は $\mathbb{R}^n$ のコピー（すなわちベクトル空間）であるから，

$$\boldsymbol{u}_\phi + \boldsymbol{v}_\phi \in \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$$

である．一方，ある別の $\psi \in \mathcal{A}(p)$ についても，同値類の表現 $u = [\boldsymbol{u}_\psi]$ および $v = [\boldsymbol{v}_\psi]$ をとれば

$$\boldsymbol{u}_\psi + \boldsymbol{v}_\psi \in \mathrm{T}_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi$$

が成立している．いま，微分 $D\Phi(\boldsymbol{p})$ は正則行列であり，写像 $\boldsymbol{v} \mapsto D\Phi(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi = \mathbb{R}^n$ から $\mathrm{T}_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi = \mathbb{R}^n$ への同型写像を与えるから，

$$D\Phi(\boldsymbol{u}_\phi + \boldsymbol{v}_\phi) \ = \ D\Phi(\boldsymbol{u}_\phi) + D\Phi(\boldsymbol{v}_\phi) \ = \ \boldsymbol{u}_\psi + \boldsymbol{v}_\psi$$

がわかる．したがって同値類として

$$[\boldsymbol{u}_\phi + \boldsymbol{v}_\phi] \ = \ [\boldsymbol{u}_\psi + \boldsymbol{v}_\psi] \in \mathrm{T}_pM$$

が成立する．これは，上の $u+v$ の定義に従えば，添え字 $\phi \in \mathcal{A}(p)$ の選び方によらず T_pM 内で唯一の元が定まることを示している．スカラー倍も同様である．

次に T_pM が $\mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ と同型であることを示そう．それには，写像 $\iota : \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi \to \mathrm{T}_pM$ を $\iota : \boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{v}]$ により定め，これが同型写像となることを示せばよい．しかし，これは定義からほとんど明らかであろう．実際任意に $v \in \mathrm{T}_pM$ を決めるとその $\mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ における代表元 $\boldsymbol{v}$ が一意的に定まるし，この対応で和とスカラー倍が保存されることも明らかであろう．

5.5 方向微分と微分作用素

この章の冒頭でも述べたが，一般的な多様体の教科書では接空間を「微分作用素のなす線形空間」と定義する．この節では，いままでわれわれが採用した「速度ベクトル空間」としての定義とどのように対応するかを確認しておこう．

方向微分（ユークリッド空間）． まず準備として，関数の「方向微分」という概念を思い出しておこう．

点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ とそこでの接ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ を固定する．いま，C^1 級関数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，その $\boldsymbol{p}$ におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ に関する**方向微分係数**を

$$D_{\boldsymbol{v}}F(\boldsymbol{p}) \;:=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{v}\Delta t) - F(\boldsymbol{p})}{\Delta t}$$

によって定義する．言い換えれば，$\Delta t \to 0$ のとき

$$F(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{v}\Delta t) \;=\; F(\boldsymbol{p}) + K\Delta t + o(\Delta t)$$

をみたすような量 $K \in \mathbb{R}$ を $D_{\boldsymbol{v}}F(\boldsymbol{p})$ と定義するのである．また，関数 F にたいして方向微分係数 $K = D_{\boldsymbol{v}}F(\boldsymbol{p})$ を対応させる写像を「$\boldsymbol{p}$ におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ に関する**方向微分**」とよぶ．

この定義をよく見ると，関数 F は $\mathbb{R}^n$ 全体で定義されている必要はなくて，与えられた点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で C^1 級として定義されていれば，方向微分係数を求めることができることがわかる．この意味で,「$\boldsymbol{v}$ に関する方向微分係数」とは,「与えられた関数の $\boldsymbol{p}$ における局所的な性質を計測するもの」だということができる．[9]

この「方向微分係数」はあまりなじみのない概念かもしれないので，念のため具体例を与えておこう．

具体例（方向微分係数）． $\mathbb{R}^2$ 上で関数 $F = F(x,y) = x^2 + y^2$ を考える．ここで動点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ が時刻 $t = 0$ に $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ にあり，一定速度（秒速）$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で移動しているとする．すなわち $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$ と表される．

このとき，関数 $t \mapsto F(\boldsymbol{x}(t))$ の時刻 $t = 0$ における瞬間的な変化の割合（1 秒あたりの変化量）K は

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\boldsymbol{x}(0+\Delta t)) - F(\boldsymbol{x}(0))}{\Delta t}$$

で表される．この値を求めてみよう．具体的に計算すれば

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}(0+\Delta t)) - F(\boldsymbol{x}(0)) \;&=\; F(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{v}\Delta t) - F(\boldsymbol{p}) \;=\; \left\{\Delta t^2 + (1+\Delta t)^2\right\} - \left\{0^2 + 1^2\right\} \\ &=\; 2\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (\Delta t \to 0) \end{aligned}$$

となり，$K = 2$ とわかる．これは，関数 F の点 $\boldsymbol{p}$ における $\boldsymbol{v}$ に関する方向微分係数 $D_{\boldsymbol{v}}F(\boldsymbol{p})$ に他ならない．

具体例（ふつうの偏微分）． ふつうの偏微分も，方向微分の特別な場合だと考えることができる．実際，$\boldsymbol{e}_i$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底のうち，第 i 座標が 1 であとは 0 になっているものとすれば，

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{e}_i\Delta t) - F(\boldsymbol{p})}{\Delta t}$$

と表現できる．右辺は方向微分係数 $D_{\boldsymbol{e}_i}F(\boldsymbol{p})$ になっていることに注意しよう．すなわち第 i 座標に関する偏微分とは，各 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ においてベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に関する方向微分係数を対応させることに他ならない．

[9] この計測によって関数を特定することはできないが，計測値が違えば関数を区別することはできる．

方向微分と勾配ベクトル． 方向微分について重要な性質を与えておこう．与えられた C^1 級関数の方向微分係数は，その関数の勾配ベクトルだけで決定されてしまうのである．

> **命題（方向微分と勾配ベクトル）**． $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ を固定する．また，$\boldsymbol{p}$ の近傍 $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ で定義された C^1 級関数 $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ にたいし，その $\boldsymbol{p}$ における勾配ベクトルを $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} F(\boldsymbol{p})$ とおく．このとき，F の $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ に関する方向微分係数は
>
> $$D_{\boldsymbol{v}} F(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$$
>
> で与えられる．ただし，右辺はベクトルの標準内積である．

証明． F は C^1 級であるから，全微分可能であった．とくに点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ において，$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき

$$F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{p}) \;=\; \underline{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})} + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|)$$

と書ける．ただし $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} F(\boldsymbol{p})$ である．また，下線部はベクトルの標準内積である．いま，ある速度ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ を固定して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\Delta t$ $(\Delta t \to 0)$ と書き換えれば，

$$F(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\Delta t) - F(\boldsymbol{p}) \;=\; \underline{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{v}\Delta t)} + o(\|\boldsymbol{v}\|\Delta t) \;=\; \underline{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v})\Delta t} + o(\Delta t)$$

と書ける．したがって，

$$D_{\boldsymbol{v}} F(\boldsymbol{p}) \;=\; \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} \quad \in \mathbb{R}$$

である．すなわち， $\boldsymbol{v}$ に関する方向微分の値は，関数の勾配ベクトルだけで決定される．■

多様体における方向微分． 以上をふまえて，C^1 級多様体上の C^1 級関数について方向微分係数を定義してみよう．

$M = (M, \mathcal{A})$ を C^1 級多様体とし，$p \in M$，$v \in T_p M$ を固定する．

> **定義（方向微分）**． p の近傍 $U \subset M$ 上で定義された C^1 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ にたいし，「p における v に関する**方向微分係数** $D_v f(p)$」を次のように定める：$\phi \in \mathcal{A}(p)$ を適当に選ぶと，$v = [\boldsymbol{v}]$ を満たす速度ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$ が唯ひとつ定まる．さらに C^1 級関数 $F_\phi := f \circ \phi^{-1}$ が $\phi(p)$ の十分小さな近傍（たとえば $\phi(U) \cap \mathbb{U}_\phi$ ）で定義できるので，
>
> $$D_v f(p) \;:=\; D_{\boldsymbol{v}} F_\phi(\phi(p))$$
>
> とする．また，p の近傍で定義された C^1 級関数 f に実数 $D_v f(p)$ を対応させる写像を「p における v に関する**方向微分**とよぶ．

ようするに，次のように定義した：まず点 p をカバーしている地図帳のページ $\phi \in \mathcal{A}(p)$ をひとつ選び，速度ベクトル v，関数 f をそのページで表現する．こうして表現したものについては，ユークリッド空間上の関数としての方向微分係数が計算できるので，その値をもとの関数 f の方向微分係数として採用するのである．

この定義では，$D_v F(p)$ の値は局所座標 ϕ の選び方に依存しているように見える．ところが，ここではちょっとした「奇跡」がおきていて，そんなことはないのである：

命題（方向微分は well-defined）．上で定義した $D_v f(p)$ は局所座標 $\phi \in \mathcal{A}(p)$ の選び方に依存しない．すなわち $p \in U_\phi \cap U_\psi$ のとき，速度ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathbb{U}_\phi$, $\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}_{\psi(p)}\mathbb{U}_\psi$, を $v = [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}]$，となるように選ぶとき，

$$D_{\boldsymbol{v}} F_\phi(\phi(p)) \;=\; D_{\boldsymbol{u}} F_\psi(\psi(p)).$$

証明 $\Phi = \psi \circ \phi^{-1}$ とおく．また，$\phi(p) \in \mathbb{U}_\phi$ における Φ の微分（行列）$D\Phi(\phi(p))$ を $\boldsymbol{J}$ とおく．

$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} F_\phi(\phi(p))$，$\boldsymbol{b} = \operatorname{grad} F_\psi(\psi(p))$ とおくと，$\boldsymbol{a} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{b}$ が成り立つのであった．また，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{v}$ より，

$$\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{u}} F_\psi(\psi(p)) &= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \\
&= (({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}) \\
&= {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v} \qquad (\leftarrow \text{行列としての積}) \\
&= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = D_{\boldsymbol{v}} F_\phi(\phi(p)).
\end{aligned}$$

■

注意（奇跡？あたりまえ？）． この命題はちょっとした「奇跡」と述べたが，考えようによっては「あたりまえ」でもある．なぜなら，点 $p \in M$ において速度ベクトル v をもつ C^1 級曲線 $x : [-1, 1] \to M$，$x(0) = p$ を考えたとき，v に関する方向微分 $K = D_v f(p) \in \mathbb{R}$ は

$$f(x(0 + \Delta t)) - f(x(0)) = K\Delta t + o(\Delta t) \qquad (\Delta t \to 0)$$

を満たす実数 K であり（左辺を局所座標を通して書き直すことですぐに確かめることができる），その値は左辺の f と x のみに依存して，本来局所座標に依存せずに決定可能なものだからである．

方向微分の性質． 方向微分の性質をいくつか調べよう．まず次の「方向」（速度ベクトル）に関する線形性は簡単にわかる：

命題（方向微分の「方向」に関する線形性）．f を M 上の C^1 級関数とする．$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$u$，$v \in T_p M$ にたいし，線形性

$$D_{\alpha u + \beta v} f(p) = \alpha D_u f(p) + \beta D_v f(p)$$

が成り立つ．

証明は局所座標 $\phi \in \mathcal{A}(p)$ に写すことで $\mathbb{R}^n$ の方向微分の問題に帰着できる．あとは計算だけなので，残りは練習問題としよう．

今度は $v \in \mathrm{T}_p M$ を固定したときの性質である：

命題（方向微分の微分作用素としての性質）．$p \in M$，$v \in \mathrm{T}_p M$ を固定する．このとき，p の近傍で定義された任意の C^1 級関数 f，g および任意の実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ にたいし，

1. 線形性：$D_v(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha D_v f(p) + \beta D_v g(p)$.

> 2. ライプニッツ性：$D_v(fg)(p) = D_v f(p)\, g(p) + f(p)\, D_v g(p)$.
>
> ただし，$(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$，$(fg)(x) := f(x)g(x)$ と定義した．

証明． 適当な局所座標 $\phi \in \mathcal{A}(p)$ に移して，ユークリッド空間の方向微分について証明すれば十分である．1. は簡単なので練習問題としよう．2. は次のようにする：$\boldsymbol{p} = \phi(p)$，$F = f \circ \phi^{-1}$，$G = g \circ \phi^{-1}$ とし，$v = [\boldsymbol{v}]$，$\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{U}_\phi$ とする．また，方向微分係数を $K = D_{\boldsymbol{v}}F(\boldsymbol{p}) = D_v f(p)$, $L = D_{\boldsymbol{v}}G(\boldsymbol{p}) = D_v g(p)$ とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\Delta t)G(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}\Delta t) &= (F(\boldsymbol{p}) + K\Delta t + o(\Delta t))(G(\boldsymbol{p}) + L\Delta t + o(\Delta t)) \\
&= F(\boldsymbol{p})G(\boldsymbol{p}) + (K\, G(\boldsymbol{p}) + F(\boldsymbol{p})L)\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって

$$D_{\boldsymbol{v}}(FG)(\boldsymbol{p}) = K\, G(\boldsymbol{p}) + F(\boldsymbol{p})L$$

が成り立つ．方向微分の定義より左辺は $D_v(fg)(p)$ に他ならない． ■

微分作用素の空間． 速度ベクトル $v \in \mathrm{T}_pM$ が定める方向微分は，ある意味で 点 p の近傍で定義された関数を「計測」するものだといえる．そのような「関数計測器」として機能に注目してみよう．

一旦，多様体 M は C^r 級であると仮定しよう．ここで $1 \le r \le \infty$，もしくは $r = \omega$（解析的）である．さらに $p \in M$ を固定し，少なくとも p のある近傍で定義された C^r 級関数の全体を（便宜的に）$C^r(M)_p$ と表すことにする．[10] これが方向微分によって「計測される」関数の全体である．

いま，$C^r(M)_p$ の元 $f : U \to \mathbb{R}$ にたいし実数を対応づける写像 $V : f \mapsto V(f)$ が

(D1) 線形性：$V(\alpha f + \beta g) = \alpha V(f) + \beta V(g)$.

(D2) ライプニッツ性：$V(fg) = V(f)\, g(p) + f(p)\, V(g)$.

を満たすとき，V は p における**微分作用素**であるという．そのような微分作用素全体の集合を D_pM と表すことにする．

例えば速度ベクトル $v \in T_pM$ に関する方向微分 $f \mapsto D_v f(p)$ を写像の形で

$$v : C^r(M)_p \to \mathbb{R}, \quad v(f) := D_v f(p)$$

と表現してみよう．[11] このとき，微分作用素として $v \in \mathrm{D}_pM$ であり，その意味で

$$\mathrm{T}_pM \subset \mathrm{D}_pM$$

といえる．

もう少し詳しく，次が成り立つ：

[10] すなわち $f \in C^r(M)_p$ とは，ある $p \in U = U_f$ をみたす開集合が存在して，$f : U \to \mathbb{R}$ が C^r 級関数であることをいう．

[11] 速度ベクトルと写像に同一の記号を用いるのは記号の濫用ではあるが，「〇〇さん俳優かつ歌手」，ぐらいのノリでおおらかに考えるのがよい．

命題（微分作用素のなす線形空間） D_pM は次のようにして定まる和と定数倍によってベクトル空間をなす：$V_1,\ V_2 \in \mathrm{D}_pM,\ \alpha \in \mathbb{R},\ f \in C^r(M)_p$ とするとき，

$$(V_1 + V_2)(f) := V_1(f) + V_2(f) \qquad (\alpha V_1)(f) := \alpha V_1(f).$$

また，T_pM はその部分空間である．

証明は形式的に計算を確認するだけなので練習問題としよう．

注意． 一般に，$r < \infty$ であれば $\mathrm{T}_pM \subsetneq \mathrm{D}_pM$ である．しかし $r = \infty$ （もしくは $r = \omega$）のときは $T_pM = \mathrm{D}_pM$ が成り立つことが知られている．

5.5.1 方向微分を用いた接空間の定義

以上をふまえて，一般的に採用される接空間の定義をやってみよう．これまでの議論の中で,「多様体内の速度ベクトル」すなわち「接ベクトル」はまだ定義されていない，と仮定する．それ以外の部分，たとえば C^1 級曲線であるとか，ユークリッド空間の速度ベクトルであるとか，方向微分が局所座標によらずに定まる，といったことは使用する．

接空間の定義（その２）． $p \in M$ を固定する．いま局所座標 $\phi \in \mathcal{A}(p)$ を任意に選び，$\boldsymbol{p} = \phi(p) \in \mathbb{U}_\phi$ を考える．また，$x \in U_\phi$ にたいし局所座標を $\phi(x) = \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ のように表すことにする．任意の $C^1(M)_p$ の元 $f : U \to \mathbb{R}$ （ただし $U \subset M$ は p の近傍）にたいし，必要であれば f の定義域を制限することで，$U \subset U_\phi$ としてよい．このとき，C^1 級関数 $F = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ を考えることができる．

ここで D_pM の元 $v_1, \ldots, v_n$ を

$$v_i(f) := D_{\boldsymbol{e}_i}F(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial}{\partial x_i}F(\boldsymbol{p}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

によって定義する．ただし $\boldsymbol{e}_i$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底の i 番目のベクトルである．($\boldsymbol{e}_i$ に関する方向微分は第 i 座標に関する偏微分であったことを思い出そう.)

この v_i が本当に D_pM の元になっていることを確かめないといけない．普通に計算すればよいのであるが，じつはその作業はすでに済んでいる．

ちょっとインチキをして「知らないことになっている」多様体の速度ベクトルの定義を思い出すと，$\boldsymbol{e}_i \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}\mathbb{U}_\phi$ が表現する p における速度ベクトル $v_i = [\boldsymbol{e}_i] \in \mathrm{T}_pM$ がただひとつ存在し，局所座標によらない方向微分

$$D_{v_i}f(p) := D_{\boldsymbol{e}_i}F(\boldsymbol{p})$$

が定まるのであった．これを微分作用素として $v_i : f \mapsto D_{v_i}f(p)$ とおき，D_pM の元とみなせばよいのである．

このとき，$v_1,\ \ldots,\ v_n$ で張られる D_pM の（ベクトル空間としての）部分空間

$$\langle v_1,\ \ldots,\ v_n \rangle$$

を $p \in M$ における**接空間** (tangent space) とよび T_pM と表す．

すなわち接空間の元は $a_1, \ldots, a_n$ を実数として

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

と表される $\mathrm{D}_p M$ の元であり，これを $p \in M$ における**接ベクトル** (tangent vector) とよぶ．

v_i は習慣的に（これも記号の濫用の一種だと思われるが）局所座標での偏微分記号を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{x=p}, \quad \partial_{x_i}, \cdots$$

などとも表されるので，接ベクトルはしばしば

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

のようにも書かれる．多くの教科書ではこの書式を採用しているだろう．

局所座標に依存しないことの確認. この接空間の定義（その２）では，最初の局所座標 $\phi \in \mathcal{A}(p)$ の取り方に強く依存しているように見える．そこで，別の $\psi \in \mathcal{A}(p)$ を選んでも，おなじ $\mathrm{D}_p M$ の部分空間が得られることを確認しよう．

$\boldsymbol{q} = \psi(p) \in \mathbb{U}_\psi$ とし，$x \in U_\psi$ にたいし局所座標は $\psi(x) = \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ と表すことにする．また任意の $C^1(M)_p$ の元 $f : U \to \mathbb{R}$ にたいし，（必要であれば f の定義域を制限して）C^1 級関数 $F_\psi = f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \mathbb{R}$ を考えることができる．このとき，$\mathrm{D}_p M$ の元 $u_1, \ldots, u_n$ を標準基底 $\boldsymbol{e}_i$ を用いて

$$u_i(f) := D_{\boldsymbol{e}_i} F_\psi(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial}{\partial y_i} F_\psi(\boldsymbol{q}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

と定める．

以上の仮定のもと，次の命題が成立するのである：

命題．接空間 $\mathrm{T}_p M \subset \mathrm{D}_p M$ は局所座標の取り方によらず決まる．すなわち上記の設定のもと，

$$\langle v_1, \ \ldots, \ v_n \rangle = \langle u_1, \ \ldots, \ u_n \rangle.$$

もし u_i を $\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ と表すならば，命題の等式は

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial y_n} \right\rangle.$$

のように書くことができる．

この証明も多様体の教科書には必ず書いてあるし難しくはないが，われわれは知らないはずの「速度ベクトル」の観点からこの事実を簡単に納得することができる：速度ベクトル空間としての $\mathrm{T}_p M$ を定義したときに用いた同値類からベクトル空間 $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} \mathbb{U}_\phi$，$\mathrm{T}_{\boldsymbol{q}} \mathbb{U}_\psi$，$\mathrm{T}_p M$ はおよびは互いに同型であり，自然な対応をもっていた．たとえば標準基底を $\boldsymbol{e}_i \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} \mathbb{U}_\phi$ とみなした場合

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} \mathbb{U}_\phi = \langle \boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n \rangle$$

は速度ベクトルの意味で

$$\mathrm{T}_p M = \langle [\boldsymbol{e}_1], \ \ldots, \ [\boldsymbol{e}_n] \rangle$$

と自然に対応する．この右辺がちょうど $\langle v_1, \ \ldots, \ v_n \rangle$ である．一方標準基底を $\boldsymbol{e}_i \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} \mathbb{U}_\psi$ とみなした場合も同様に，

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{q}} \mathbb{U}_\psi = \langle \boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n \rangle$$

は

$$\mathrm{T}_p M = \langle [\boldsymbol{e}_1],\ \ldots,\ [\boldsymbol{e}_n] \rangle$$

と対応し，これは $\langle u_1,\ \ldots,\ u_n \rangle$ に他ならない．

もちろんわれわれは「速度ベクトル」を知らないことになっているので，これで命題を証明したことにはならない．命題の証明には，方向微分の言葉で左辺の元と右辺の元の対応を（座標変換 $\Phi = \psi \circ \phi^{-1}$ の微分を用いて）書き下す必要がある．

命題の証明（これは単なる基底の取替えの問題）はいろんな本に書いてあるので，読者の練習問題としよう．