ルベーグ積分の基礎のキソ
(β 版)

川平　友規

2020 年 4 月 23 日

目次

第 1 章　リーマン積分 vs. ルベーグ積分 2

1.1 積分とは？ 2

1.2 区間上のリーマン積分 2

1.3 リーマン可積分性の判定方法 4

1.4 極限とリーマン積分 5

1.5 ルベーグ積分のアイディア 7

1.6 演習問題 8

第 2 章　ルベーグ外測度と可測集合 10

2.1 ルベーグ測度に期待される性質 10

2.2 ルベーグ外測度の構成 11

2.3 可測集合とルベーグ測度 14

2.4 演習問題 16

第 3 章　可測集合と σ-加法族 17

3.1 可測集合の性質 17

3.2 演習問題 21

第 4 章　可測関数 (1) 22

4.1 可測集合の性質（つづき） 22

4.2 開集合，閉集合の可測性 22

4.3 ルベーグ測度の単調性 24

4.4 可測関数 25

4.5 演習問題 27

第 5 章　可測関数 (2) 28
5.1　可測関数の性質 28
5.2　可測関数の極限 30
5.3　いたるところで… 31
5.4　参考：非可測集合と非可測関数の構成 31
5.5　演習問題 34

第 6 章　ルベーグ積分 (1) 35
6.1　単関数 35
6.2　非負単関数の積分. 36
6.3　ルベーグ積分の定義 38
6.4　演習問題 40

第 7 章　ルベーグ積分 (2) 42
7.1　非負可測関数の積分 42
7.2　可積分関数の積分の線形性 45
7.3　演習問題 46

第 8 章　収束定理 48
8.1　収束定理 48
8.2　演習問題 52

第 9 章　項別積分・リーマン積分 54
9.1　関数項級数に対する積分の収束定理 54
9.2　演習問題 58

第 10 章　直積測度 (1) 60
10.1　フビニの定理に向けて 60
10.2　σ-加法族と測度 60
10.3　直積と可測長方形 61
10.4　演習問題 65

第 11 章　直積測度 (2) 66
11.1　直積外測度 λ^* の性質，測度 λ の構成 66
11.2　直積測度としての 2 次元ルベーグ測度 67
11.3　演習問題 70

第 12 章　フビニの定理 (1) 71
12.1　直積測度の積分表示 71
12.2　フビニの定理 74
12.3　演習問題 76

第 13 章　フビニの定理 (2) 77
13.1　フビニの定理 77
13.2　演習問題 82

付録 A　加法的集合関数とラドン・ニコディムの定理 84
A.1　加法的集合関数（符合つき測度） 84
A.2　ハーン分解とジョルダン分解 85
A.3　絶対連続性とラドン・ニコディムの定理 86
A.4　演習問題 88

はじめに

これはルベーグ積分の講義ノートである．ルベーグ積分論にはいくつかのスタイルがあって，その選択は，講義であれば講師の，書籍であれば著者の好みに委ねられる．講義に際して，悩みぬいた末に，私が選んだのは次のようなスタイルであった：

- 数直線 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ外測度の構成からはじめて，1 次元ルベーグ積分の基本性質（収束定理など）をきっちりと，丁寧に教える．
- その際，$\mathbb{R}$ が位相空間である，ということはできるだけ意識しないようにする．とくに，ボレル集合，ボレル可測性には触れない．
- つぎに，1 次元ルベーグ積分論をプロトタイプとして，一般の測度空間での積分を定式化する．ただし時間の都合で，議論の詳細は「1 次元ルベーグ測度と同様に…」で済ませる．
- 一般的な完備測度空間の直積測度空間を導入し，フビニの定理の証明する．

「ルベーグ積分論」としては物足りないが，「ルベーグ積分の基礎」あるいは「基礎のキソ」を名乗るには十分な内容だと思う．とにかく，素朴な 1 次元ルベーグ積分を丁寧に学んで，「完全な具体例」をひとつ手元に置いておくことはこの上なく重要であるし，そういう教科書があってもよいのではないかな．

さて，実際に自転車操業で講義を進めていくうちに，フビニの定理にむけた準備に差し掛かった頃であったか，吉田洋一著の『ルベグ積分入門』（ちくま学芸文庫）という本を手にとった．古い本，文庫本ということで確認を怠っていたのだが，どうやら自分の講義のテイストに非常に近い．いや，むしろ，自分の講義はこの本をつまみ読みしているようなものだ．

こうしてノートを公開するのは，ひとつ，「吉田の『ルベグ』のダイジェスト版です」，と言えるような本を世に送る，その準備と，意思表示をしようと考えたからである．

改訂履歴

- 20190808 ノート公開

ルベーグ積分を学ぶにあたって

関数のかずかずに「個性」を見出すのが，現代の解析学である．積分はその「個性」をあぶり出す道具のひとつだと言える．関数の属性として「身長」や「体重」のようなものがあるとするならば，積分とは例えば「関数の体重を計測する」，その行為にあたる．ふたつの関数が与えられたとき，「体重」が異なれば，これらの関数は異なると結論されるし，「体重」で関数を大雑把に分類することもできるだろう．

19 世紀，リーマンはそのような「体重計」の具体的な設計図を提示した．それがリーマン積分とよばれるものである．しかし，ほどなくして，この「リーマンの体重計」では「体重」が測れない関数が多数存在することもわかってきた．20 世紀に差し掛かったころ，それを改良するものとして提示されたのが「ルベーグの体重計」，すなわちルベーグ積分である．

ルベーグ積分の最大の特徴は，「零集合」という不可視の存在を許す点にある．「ルベーグの体重計」は，「零集合」上のみで値の異なる関数たちを区別できない．結果として，ルベーグの積分論には「ほとんどいたるところで…」という謎めいた言葉があちこちに散りばめられることになった．そこでの値がなんなのか，判断は完全に放棄される．あるいは，あなたが自由に決めても良いいんですよ，と丸投げされる．そのストレスたるや，若者たちの純粋な精神には耐え難い[*1]ものがあるだろう．

これは欠点だろうか？極端に感度が良く，何もかも区別するような「体重計」は必ずしも便利とは言えないかもしれない．抜け落ちた一本の髪の毛，衣服に沁みた湿気，といった些細な違いを定量化し，区別していては，個人（個体）という概念すら危うくなってしまう．

その点，ルベーグ積分は秀逸であった．関数を適度な感度で計測し，違いを適度に無視する仕組みが備わっている．そうして得られる，関数たちの程よく豊かな「個性」が，20 世紀以降の解析学の主題となったのである．

この，清濁併せ呑む精神こそがルベーグ積分の真骨頂かもしれない．みなさんも，純粋な精神から一皮むけてみませんか．

[*1] 坪井俊先生の言．

予備知識

- 自然数全体，有理数全体，実数全体からなる集合をそれぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ と表す．
- 本講義では，ε-δ 論法を用いた基本的な解析学はある程度仮定する．
- 空ではない実数の集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対し，記号 $\inf S$ や $\sup S$ の意味は以下の通り：まず，任意の実数 α に対し，$-\infty < \alpha < \infty$ と約束し，集合 $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に大小関係を入れておき，
  - 「集合 S 内の数列 $\{a_n\}$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を満たすものが存在する」という命題が真になるような $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ の中で最小のものを $\inf S$ と表す．
  - 「集合 S 内の数列 $\{a_n\}$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を満たすものが存在する」という命題が真になるような $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ の中で最大のものを $\sup S$ と表す．
- 写像 $f : X \to Y$ の記号や，集合の列 $A_1, A_2, \cdots$ に対する和集合や共通部分

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

  の意味は知っているものとする．（その程度に集合の扱いに慣れていないと，今後の議論についていけなくなるだろう．）集合の（有限個もしくは無限個の）列 $A_1, A_2, \cdots$ に対し，$A_i \cap A_j$ $(i \neq j)$ であるとき，**互いに素**もしくは**互いに共通部分を持たない**という．
- 集合 X が**可算集合**である（または，**可算濃度をもつ**）とは，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ からの全単射が存在することをいう．言い換えると，ある X の互いに異なる元からなる列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ が存在し，$X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ と書けることをいう．集合 X が有限個の元からなる集合（有限集合，空集合は 0 個の元からなる）であるか，もしくは可算集合であるとき，X は**高々可算集合**（または，**高々可算濃度をもつ**）という．そうでない集合は**非可算集合**である（または，**非可算濃度をもつ**）という．

1 次元のルベーグ積分論においては，次の定理は本質的である．

> **定理（カントール）**
> 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である．一方，$\mathbb{R}$ は非可算集合．

第1章　リーマン積分 vs. ルベーグ積分

1.1　積分とは？

積分とはなにか，ちょっと大風呂敷を広げて考えてみる．

例えば，X を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とし，関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考える．このとき，「f の X 上での積分（重積分）」とは

$$(X, f) \overset{\text{積分}}{\longmapsto} \int_X f(x, y)\, dxdy$$

のような写像だと解釈できる．すなわち，積分とは「集合と関数のペアから，1 つの実数を定める手続き」だと考えられる[*1]．ただし，たとえば集合 X が空でないコンパクト集合，f が連続関数，といった具合に，「集合と関数のペア」を適切に選ばないと積分の値は定まらない．

ここでは，1 次元リーマン積分の定義を復習しながら，「区間上の定積分」という「手続き」が処理できない（もしくは，処理がむずかしい）関数たちについて理解を深めよう．

1.2　区間上のリーマン積分

以下，a と b を $a < b$ を満たす実数とし，閉区間 $[a, b]$ 上の（連続とは限らない）関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を考える．区間 $[a, b]$ から

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

を満たす有限個（ここでは $N + 1$ 個）の点を集めた集合

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N\}$$

を区間 $[a, b]$ の**分割** (partition) という．

[*1] 集合 X を固定すると，X 上の積分は「X で関数を測定する仕組み」とみなされる．逆に関数 f を固定すると，f の積分は「f で集合を測定する仕組み」とみなされる．たとえば，$f \equiv 1$（定数関数）とすれば，積分は X の面積を与える．

分割 Δ が与えられたとき，各 $k=1,\dots,N$ に対し $x_{k-1} \le x_k^* \le x_k$ を満たす x_k^* を選んで得られる N 点からなる集合

$$\Delta^* = \{x_1^*,\, x_2^*,\, \dots,\, x_N^*\}$$

を分割 Δ の**代表点集合** (set of representatives) という．

関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，区間 $[a,b]$ の分割 Δ とその代表点集合 Δ^* が定める量

$$\Sigma(f,\Delta,\Delta^*) := \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*)\,(x_k - x_{k-1})$$

を関数 f の**リーマン和**（Riemann sum）とよぶ．

定積分　区間 $[a,b]$ とその分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^N$ に対し，分割された区間の最大幅を

$$|\Delta| := \max\left\{x_k - x_{k-1} \;\middle|\; 1 \le k \le N\right\}$$

と表すことにする．

定義（リーマン可積分性，定積分）． 関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が**リーマン可積分** (Riemann integrable) であるとは，以下を満たす実数 A が存在することをいう：「任意の正の数 ε に対し，ある正の数 δ が存在し，すべての $|\Delta| < \delta$ を満たす分割 Δ とその代表点集合 Δ^* に対し，

$$|\Sigma(f,\Delta,\Delta^*) - A| < \varepsilon$$

が成り立つ．」このとき，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \Sigma(f,\Delta,\Delta^*) = A$$

と表す．また，実数 A を関数 f の $[a,b]$ における**リーマン積分** (Riemann integral) もしくは**定積分** (definite integral) とよび，

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

と表す．

積分可能であるということは，記号で表すと

$$\begin{aligned}&({}^{\exists}A \in \mathbb{R})({}^{\forall}\varepsilon > 0)({}^{\exists}\delta > 0)({}^{\forall}\Delta \ : [a,b]\text{ の分割})({}^{\forall}\Delta^* \ : \Delta\text{ の代表点集合})\\ &\qquad |\Delta| < \delta \implies |\Sigma(f,\Delta,\Delta^*) - A| < \varepsilon.\end{aligned}$$

となる．すなわち，分割 Δ の最大幅 $|\Delta|$ が十分に小さければ，代表点集合 Δ^* の取り方に依存せずに，リーマン和は ε 未満の誤差で A の値を近似するのである．

注意！ 関数が「積分可能かどうか」をこの定義どおりに判定するには，定積分 A の値をあらかじめ知っていなくてはならない．それでは都合が悪いので，A の値を用いずに積分可能性を判定する方法が必要である[*2]．

1.3 リーマン可積分性の判定方法

以下，関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界な関数であると仮定する．すなわち，ある実数 $m < M$ が存在して，$f : [a,b] \to [m,M]$ と表されるものとする．

区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{N}$ が与えられているとき，各 $k = 1, \cdots, N$ に対し

$$M_k := \sup \left\{ f(x) \;\middle|\; x_{k-1} \leq x \leq x_k \right\}$$
$$m_k := \inf \left\{ f(x) \;\middle|\; x_{k-1} \leq x \leq x_k \right\}$$

とおくことにする．仮定より $m \leq m_k \leq M_k \leq M$ が成り立つことに注意しよう．さらに，

$$S(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{N} M_k \left(x_k - x_{k-1}\right)$$
$$s(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{N} m_k \left(x_k - x_{k-1}\right)$$

とおけば，Δ の任意の代表点集合 Δ^* に対し

$$m(b-a) \leq s(f,\Delta) \leq \Sigma(f,\Delta,\Delta^*) \leq S(f,\Delta) \leq M(b-a)$$

が成り立つ．とくに $s(f,\Delta)$, $S(f,\Delta)$ の取りうる値の範囲は有界であるから，ワイエルシュトラスの定理より

$$S(f) := \inf \left\{ S(f,\Delta) \;\middle|\; \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割} \right\}$$
$$s(f) := \sup \left\{ s(f,\Delta) \;\middle|\; \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割} \right\}$$

が存在する．このとき，以下が成り立つ：

ダルブー (Darboux) の定理 有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f,\Delta) = S(f), \qquad \lim_{|\Delta| \to 0} s(f,\Delta) = s(f)$$

が成り立つ．すなわち，任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し $|\Delta| < \delta$ であれば $|S(f,\Delta) - S(f)| < \varepsilon$ かつ $|s(f,\Delta) - s(f)| < \varepsilon$ とできる．

[*2] ちょうど，数列の収束性をコーシー列の収束性に置き換える必要が生じた事情と同じである．

定理 1.0（積分可能性の判定，あるいは別定義）　有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が積分可能であることの必要十分条件は $S(f)=s(f)$ が成り立つことである．

リーマン可積分であることの十分条件として，次のものがある：

命題 1.1 有界な関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が高々有限個の点を除いて連続であれば，リーマン可積分である．

注意！　ルベーグ（Lebesgue）は有界な関数がリーマン可積分となる必要十分条件は不連続点からなる集合が "長さ 0" の集合（零集合）であることを示した．

1.4　極限とリーマン積分

以下，f, f_n $(n=1,2,\cdots)$ を区間 $[a,b]$ 上の関数の列とする．

定理 1.2 連続関数の列 f_n $(n=1,2,\cdots)$ が関数 f に一様収束するとき，

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad (n\to\infty). \tag{1.1}$$

注意！

- 閉区間上の連続関数は有界である．また，命題 1.1 より，連続関数はリーマン可積分である．さらに，連続な関数列の一様収束極限は連続であるから，リーマン可積分である．以上の考察を経て，f_n と f の積分値は意味をもち，それが式 (1.1) のような収束の関係にある，というのが定理の詳細な主張である．
- リーマン積分の意味（「グラフと軸の間の符号つき面積」）と一様収束の意味（「グラフの収束」）を考えれば，定理 1.2 は関数の収束性が積分値の収束性を保証する「もっとも安全な」条件を提示しているように見える．

一方，f_n が f に各点収束する場合は，式 (1.1) のような積分の収束性が保証されない．じつは収束性はおろか，可積分性さえも極限では失われることがある．そのような典型例を見ておこう．

例 1（ディリクレ関数，リーマン可積分性の損失）　有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合で

あった．そこで，これを区間 $[0,1]$ に制限し，

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \cdots\}$$

と表現してみる．さらに，関数列 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x = r_1, \cdots, r_n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定め，関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める．このとき，f_n は f に各点収束する．また，各 f_n は命題 1.1 よりリーマン可積分である．一方 f については，任意の分割 Δ に対して $\mathbb{Q}$ の稠密性より $S(f,\Delta) = 1 > 0 = s(f,\Delta)$ となることがわかる．したがって $S(f) = 1 > 0 = s(f)$ であり，そもそも**リーマン可積分ですらない**．

注意！　関数 f は**ディリクレ関数**とよばれており，

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \{\cos(m!\,\pi\,x)\}^{2n} \right)$$

と表される．

例 2（極限の交換）　次の積分を計算してみよう[*3]．

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx.$$

まず，$x > 0$ を固定するとき

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x}\left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}.$$

よって I を

$$I = \int_0^\infty x^3 \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\,dx \quad \text{“}=\text{”} \quad \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-nx}\,dx$$

と変形する．途中の “ = ” は正当化が必要だが，一旦認めて計算を進める．$t = nx$ と変数変換すれば

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^3 e^{-t}\,\frac{dt}{n} = \int_0^\infty t^3 e^{-t}\,dt \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \Gamma(4)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = 6\,\zeta(4).$$

[*3] 神保道夫先生によるルベーグ積分の講義ノートから．

“$=$” の部分は

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N x^3e^{-nx}\right)dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\left(\lim_{M\to\infty}\int_0^M x^3e^{-nx}\,dx\right)$$

という「極限の順序交換」を正当化する必要があるので，かなりデリケートな問題である．

これから学ぶ「ルベーグ積分」を用いると，上のふたつの例に見られるような関数や積分の極限操作にまつわる問題をうまく扱うことができるようになる．

1.5　ルベーグ積分のアイディア

リーマン積分はまず x 軸（変域）の分割を与えてからグラフの面積を近似していく．ルベーグ積分は y 軸（値域）の分割に与えてからグラフの面積を近似していく．大雑把にいうと，関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $f(x)\in[m,M]$ $(m<M)$ を満たすとき，$m=y_0<y_1<\cdots<y_N=M$ となるような区間 $[m,M]$ の分割を考え, 各 $k=1,\cdots,N$ に対し集合 $A_k\subset[a,b]$ を

$$A_k:=\left\{x\in[a,b]\;\middle|\;f(x)\in[y_{k-1},y_k)\right\}$$

と定義する（ただし，例外的に A_N には $f(x)=y_N=M$ となる x たちも加えておこう）．その集合としての “長さ” を $\mu(A_k)$ と表す．N が十分に大きく分割の幅が小さいとき，リーマン和ならぬ「ルベーグ和」

$$\sum_{k=1}^N y_k\cdot\mu(A_k)$$

は積分の近似値を与えるであろう．これがルベーグ積分を定義する大まかな「手続き」である．しかし，一般に集合 A_k の形は極めて複雑なので[*4]，$\mu(A_k)$ を定義（決定）する部分が「手続き」の中でもっとも難しい．次章ではそのような $\mu(A_k)$ が満たすべき性質をさぐり，実際にそのようなものを構成する．

[*4] 例えば ディリクレ関数の場合，　$A_N=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ である．

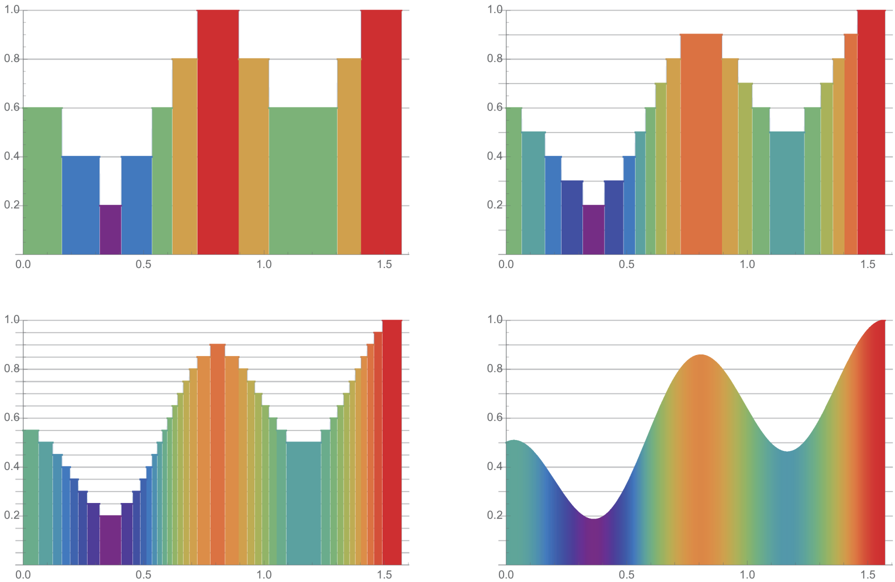


図 1.1　ルベーグ積分では同じ高さ（色）の短冊をまとめて足しあげる．

1.6　演習問題

以下，a と b は $a < b$ を満たす実数とする．

□ **1.1** リーマン可積分性の定義に基づいて，連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$，$f(x) = C$（定数）はリーマン可積分であることを示せ．

□ **1.2** 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ がリーマン可積分であるとき，任意の閉区間 $[a', b'] \subset [a, b]$ に対して関数 $f : [a', b'] \to \mathbb{R}$ はリーマン可積分であることを示せ．

□ **1.3 (S)** (命題 1.1 の証明) 有界な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が高々有限個の点を除いて連続であるとき，f はリーマン可積分であることを示せ．ただし，閉区間上の連続関数がリーマン可積分であることは用いてよい．

□ **1.4** (各点収束における連続性の損失) 連続関数列 $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$（$n = 1, 2, \cdots$）が関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に各点収束するとき，f は連続とは限らないことを示せ．

□ **1.5** (一様収束における連続性の保存) <u>連続関数列</u> $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$（$n = 1, 2, \cdots$）が関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に一様収束するとき，f も連続であることを示せ．

□ **1.6** (可積分性と積分値の収束性) <u>連続関数列</u> $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$（$n = 1, 2, \cdots$）が関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に一様収束するとき，f はリーマン可積分であり，

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つことを示せ．

注意！ 同様の結果は下線部を単に「リーマン可積分な関数列」に変えても正しい．

以下，リーマン可積分な関数列 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$（$n = 1, 2, \cdots$）はリーマン可積分な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に各点収束するが，一様収束はしないものとする．

□ **1.7** $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad (n \to \infty)$ が成り立つ例を構成せよ．

□ **1.8** $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx \not\to \int_a^b f(x)\,dx \quad (n \to \infty)$ が成り立つ例を構成せよ．

第 2 章　ルベーグ外測度と可測集合

2.1　ルベーグ測度に期待される性質

ルベーグ積分を定義するには，与えられた集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対しその大きさ（「長さ」）$\mu(A)$ を与える写像 μ が必要である（前章参照）．そのような写像に対し，つぎのような性質を期待するのは自然であろう：

(M1) 任意の $A \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し，$\mu(A) \in [0, \infty]$.
(M2) 任意の閉区間 $[a, b]$ $(a \leq b)$ に対し，$\mu([a, b]) = b - a$.
(M3) 互いに共通部分をもたない集合の列 A_1, A_2, $\cdots \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し，

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

(M4) 任意の $x \in \mathbb{R}$，$A \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し

$$A + x := \left\{a + x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \in A\right\}$$

とおくとき，$\mu(A + x) = \mu(A)$.

しかし，条件 (M1)〜(M4) のすべてを満たす写像 $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ は**存在しない**．妥協案として，私たちは条件 (M1) を捨て，

- ある適当な集合の族 $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}}$ を選び，
- (M2)〜(M4)（の $2^{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ に変えたもの）を満たす写像 $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ を構成する．

$\mathcal{M}$ の元はこのあと「可測集合」としてよばれるものであり，写像 μ は「ルベーグ測度」とよばれるものである．

前章で紹介した「ルベーグ和」の考え方からいうと，このように $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}}$ に制限することで積分を考えることができる関数にも制限がかかることが想像される[*1]．それでも，

[*1] 実際，$A \in 2^{\mathbb{R}} - \mathcal{M}$ をとると，A 上で 1，それ以外で 0 となる関数の「ルベーグ和」は定義できない．

「リーマン積分を適切に拡張し，極限操作を容易にする」という目的が達成されれば OK なのだ.

2.2　ルベーグ外測度の構成

以下，$a \leq b$ を満たす実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，区間

$$I = [a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$$

の「長さ」を $|I| = b - a$ と定める．ただし，$a = b$ のときには $I = \emptyset$ であり，$|I| = 0$ となる.

定義（ルベーグ外測度）

- $\mathbb{R}$ の部分集合からなる列 $\{I_n\}_{n\geq 1}$ が集合 $A \in 2^{\mathbb{R}}$ を**被覆する** (cover) とは，$A \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n$ を満たすことをいう.
- $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 A（すなわち $A \in 2^{\mathbb{R}}$）に対し，**（1 次元）ルベーグ外測度**を

$$\mu^*(A) := \inf \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

  と定める．ただし，inf は以下の性質をみたす区間の列 $\{I_n\}_{n\geq 1}$ すべてをわたるものとする：
  - $\{I_n\}_{n\geq 1}$ は A を被覆する
  - 各 I_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は $[a_n, b_n)$（ただし $a_n \leq b_n$）の形の区間.

例 1　たとえば $A = \mathbb{R}$ のとき，$I_n := [-n, n)$ $(n \in \mathbb{N})$ とすれば $\{I_n\}_{n\geq 1}$ は $\mathbb{R}$ を被覆する.

例 2　区間列 $\{I_n\}_{n\geq 1}$ が集合 $A \subset \mathbb{R}$ を被覆するとき，$\{I_n\}_{n\geq 1}$ は A の任意の部分集合 B も被覆する．とくに, $\mathbb{R}$ を被覆する区間列が存在することから，$\mathbb{R}$ の任意の部分集合に対しルベーグ外測度は必ず負でない実数または無限大となる．すなわち，ルベーグ外測度は写像 $\mu^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ を定める.

例 3　$A = \emptyset$ のとき，任意の区間列 $\{I_n\}_{n\geq 1}$ は $\emptyset$ を被覆する．とくに $I_n := \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$ とおけば,

$$\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{n\geq 1} |I_n| = 0.$$

すなわち $\mu^*(\emptyset) = 0$.

例 4 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し，$\mu^*(\{a\}) = 0$ である．実際，$\varepsilon > 0$ に対し $I_1 = [a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，$I_n := \emptyset$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおけば，区間列 $\{I_n\}_{n\geq 1}$ は $\{a\}$ を被覆するので

$$\mu^*(\{a\}) \leq \sum_{n\geq 1} |I_n| = |I_1| = 2\varepsilon.$$

とくに，ε は任意なので $\mu^*(\{a\}) = 0$.

例 5 任意の $A \in 2^{\mathbb{R}}$ と実数 x に対し，$\mu^*(A) = \mu^*(A + x)$.（演習問題）

例 6 任意の可算集合 A に対し，$\mu^*(A) = 0$.（演習問題）

例 7 $a \leq b$ のとき，区間 $[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$，(a, b) の外測度はすべて $b - a$ となる．(命題 2.2)

命題 2.1 (外測度の性質，可算劣加法性) (1) $A \subset B \subset \mathbb{R}$ のとき，$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(2) **可算劣加法性：** $\mathbb{R}$ の部分集合からなる列 (共通部分はあってもよい) $A_1, A_2, \cdots \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し，

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu^*(A_i).$$

【証明】 (1) 区間の列 $\{I_n\}$ が B を被覆するとき，A も被覆する．言い換えると，B を被覆する区間列全体からなる集合は，A を被覆する区間列全体からなる集合の部分集合である．よって外測度の定義から $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(2) ある j が存在し $\mu^*(A_j) = \infty$ であるとき：右辺の値は明らかに ∞．また，$A_j \subset \bigcup_{i\geq 1} A_i$ と (1) より

$$\infty = \mu^*(A_j) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)$$

であるから，左辺も ∞.

すべての $i \geq 1$ に対し $\mu^*(A_i) < \infty$ であるとき：$\varepsilon > 0$ を任意に選び固定する．μ^* の定義から各 i に対し，ある A_i を被覆する区間列 $I_n(i)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n(i)| \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

を満たすものが存在する．とくに

$$\bigcup_{i\geq 1} A_i \subset \bigcup_{i\geq 1} \left(\bigcup I_n(i)\right)$$

であるから，$\{I_n(i)\}_{n,i\in\mathbb{N}}$（これは可算個の区間からなる）を適当に並べ直して区間列 I_k $(k =$

$1, 2, \cdots$) を作れば，これは集合 $\bigcup_{i\geq 1} A_i$ を被覆するので，

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \overset{*}{=} \sum_{i\geq 1}\sum_{n\geq 1} |I_n(i)| \leq \sum_{i\geq 1}\left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = [\text{右辺}] + \varepsilon.$$

ε は任意に小さくとれるので，求める不等式が得られた． ■

注意！ 上の $\overset{*}{=}$ のところで，正項級数は足し合わせる項の順序を替えても収束性や極限の値が変わらない，という性質を用いた．

区間の外測度 基本的な事実として，以下を示そう：

命題 2.2 $a \leq b < \infty$ のとき，区間 $[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$，(a, b) の外測度はすべて $b - a$ となる．

【証明】 区間 $[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$，(a, b) のいずれかを I と表す．$a = b$ のとき I は 1 点または空集合なので $\mu^*(I) = 0 = b - a$.

$a < b$ と仮定する．いま，$\mu^*([a, b]) = b - a$ が証明されたと仮定すると，任意の十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset I \subset [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ が成り立つので，命題 2.1 より

$$(b - \varepsilon) - (a + \varepsilon) \leq \mu^*(I) \leq (b + \varepsilon) - (a - \varepsilon).$$

ε は任意なので，$\mu^*(I) = b - a$ である．よって $I = [a, b]$（閉区間）として $\mu^*(I) = b - a$ を示そう．

$\varepsilon > 0$ を任意に固定し，$I_1 = [a, b + \varepsilon)$，$I_2 = \emptyset$ $(n \geq 2)$ とすれば $\mu^*(I) \leq |I_1| + 0 + 0 + \cdots = b - a + \varepsilon$. ε は任意なので $\mu^*(I) \leq b - a$ を得る．

つぎに，$\mu^*(I) \geq b - a$ を示そう．再び，任意に ε をとり固定する．また，区間列 $I_n = [a_n, b_n)$ $(a_n \leq b_n)$ が I を被覆したと仮定する．このとき，$J_n = (a'_n, b_n) := (a_n - \varepsilon/2^n, b_n)$ とおくと，$I_n \subset J_n$ かつ $\{J_n\}$ は I を被覆する．I はコンパクトなので，ハイネ・ボレルの定理よりある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $I \subset J_1 \cup \cdots \cup J_N$（有限開被覆）を満たす．

いま，必要なら $J_1, \cdots, J_N$ の添字を入れ替えて，ある $1 \leq k \leq N$ に対し $a \in J_1 = (a'_1, b_1)$，$b_1 \in J_2 = (a'_2, b_2)$，$b_2 \in J_3 = (a'_3, b_3), \cdots, b \in J_k = (a'_k, b_k)$ となるようにできる（$I \subset J_1$ とできるときは $k = 1$ とする）．$k \geq 2$ のとき $a'_2 < b_1$, $a'_3 < b_2$, $\cdots$, $a'_k < b_{k-1}$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} |I_n| = \sum_{n\geq 1}(b_n - a_n) = \sum_{n\geq 1}(b_n - (a'_n + \varepsilon/2^n)) &= -\varepsilon + \sum_{n\geq 1}(b_n - a'_n) \\
&\geq -\varepsilon + \sum_{n=1}^{k}(b_n - a'_n) \\
&= -\varepsilon + (b_k - a'_k) + (b_{k-1} - a'_{k-1}) + \cdots + (b_1 - a'_1) \\
&= -\varepsilon + b_k + (b_{k-1} - a'_k) + \cdots + (b_1 - a'_2) - a'_1 \\
&> -\varepsilon + b_k - a'_1.
\end{aligned}$$

$a'_1 < a < b < b_k$ より $b_k - a'_1 > b - a$ であり，

$$\sum_{n\geq 1} |I_n| > -\varepsilon + (b-a).$$

ε は任意なので，$\sum_{n\geq 1} |I_n| \geq b - a$ を得る．よって $\mu^*(I) \geq b - a$. ■

2.3 可測集合とルベーグ測度

命題 2.1(2) より，任意の $A_1, A_2 \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \tag{2.1}$$

が成り立つ．そこで，次の問題を考える：

問題. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ のとき，

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

が成り立つか？

この問題への答えは NO! である．すなわち，ある $A_1, A_2 \in 2^{\mathbb{R}}$ で，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ だが，

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) < \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

となるものが存在するのである．

可測集合 いま，任意に $A, B \in 2^{\mathbb{R}}$ が与えられたとき，$A_1 := B \cap A$，$A_2 := B \cap A^c$ とおけば[*2]，式 (2.1) より

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \tag{2.2}$$

が無条件に成立する．

これを念頭において，集合の可測性をつぎのように定義する[*3]．

定義（可測集合） 集合 $A \in 2^{\mathbb{R}}$ が**可測** (measurable) であるとは，任意の $B \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \tag{2.3}$$

が成り立つことをいう．可測集合全体からなる集合を $\mathcal{M}$ と表す．

[*2] 以下，$A \subset \mathbb{R}$ の補集合を A^c で表す．$\mathbb{R} - A$ と書かれることもある．（一般に，$a \in X$ かつ $a \notin Y$ を満たす a 全体からなる集合を $X - Y$ と表す．）

[*3] カラテオドリによる．

式 (2.3) は集合 A が任意の集合 B を外測度に関してきれいに分割できることを示唆している．また，たとえば $A_1 = B \cap A$，$A_2 = B \cap A^c$ とおくと，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ かつ

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

が成り立つので，先の「問題」に対して前進した感じがする．さらに A_2 に対し別の可測集合 A' をもってきて $A'_1 := A_1$，$A'_2 := A_2 \cap A'$，$A'_3 := A_2 \cap (A')^c$ とおけば，A'_1，A'_2，A'_3 は互いに共通部分をもたず．

$$\mu^*(A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3) = \mu^*(A'_1) + \mu^*(A'_2) + \mu^*(A'_3)$$

が成り立つ．同様につづけていけば，最初に掲げた条件 (M3) を実現しそうな集合たちがつぎつぎに生成できそうに思えてくる．

可測集合の例をあげよう．

命題 2.3 $\mu^*(A) = 0$ を満たす集合 A は可測である．すなわち，$A \in \mathcal{M}$.

【証明】 任意の $B \in 2^{\mathbb{R}}$ に対して $B \cap A \subset A$ より，$\mu^*(B \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$．また，$B \cap A^c \subset B$ より，$\mu^*(B \cap A^c) \leq \mu^*(B)$．よって

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \leq \mu^*(B).$$

式 (2.2) と合わせて 式 (2.3) が確認できた． ■

例 8　任意の $A \in \mathcal{M}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対し，$A + x \in \mathcal{M}$.（演習問題）

定義（ルベーグ測度）　ルベーグ外測度 $\mu^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ を $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}}$ に制限した写像

$$\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

を **（1 次元）ルベーグ測度** (Lebesgue measure) とよぶ．

2.4 演習問題

□ **2.1** 外測度の定義に基づいて $\mu^*(\mathbb{R})=\infty$ を示せ．

□ **2.2** $A\subset\mathbb{R}$ と $x\in\mathbb{R}$ に対し，$A+x:=\{x+a\in\mathbb{R} \mid a\in A\}$ と定める．このとき，$\mu^*(A)=\mu^*(A+x)$ を示せ．

□ **2.3** A が可測であれば，$A+x$ も可測である，と言えるか？証明もしくは反証せよ．

□ **2.4** $A\subset\mathbb{R}$ が $\mu^*(A)=0$ を満たすとき，任意の $B\subset\mathbb{R}$ に対し $\mu^*(B)=\mu^*(B\cup A)$ を示せ．

□ **2.5** $A_n\subset\mathbb{R}$ $(n=1,2,\cdots)$ が $\mu^*(A_n)=0$ を満たすとき，任意の $B\subset\mathbb{R}$ に対し $\mu^*(B)=\mu^*(B\cup A_1\cup A_2\cup\cdots)$ を示せ．

□ **2.6** 1 次元ルベーグ外測度の定義を真似て．$\mathbb{R}^2$ 上の 2 次元ルベーグ外測度 μ_2^* を定義せよ．

□ **2.7** $\mu_2^*(\emptyset)=0$ を示せ．また，$A\subset B\subset\mathbb{R}^2$ であれば $\mu_2^*(A)\le\mu_2^*(B)$ を示せ．

□ **2.8** $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$ は $\mu_2^*(A)=0$ を満たすことを示せ．

□ **2.9** 2 次元ルベーグ外測度は可算劣加法性を持つことを示せ．

□ **2.10** $A\subset\mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に対し，$A+\boldsymbol{x}:=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{a}\in A\}$ と定める．このとき，$\mu_2^*(A)=\mu_2^*(A+\boldsymbol{x})$ を示せ．

□ **2.11** Prove or disprove: If A is measurable, then so is $A+\boldsymbol{x}$.

□ **2.12** n 次元ルベーグ外測度を定義せよ．

第3章　可測集合と σ-加法族

3.1　可測集合の性質

$\mu^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ をルベーグ外測度とする．また，$\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}}$ を可測集合全体からなる集合とする．すなわち，

$$A \in \mathcal{M} \ :\Longleftrightarrow\ ({}^{\forall} B \in 2^{\mathbb{R}}) \quad \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

注意！　外測度の可算劣加法性（命題 2.1(2)）より，任意の $A \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$ が成り立つ（前章の式 (2.2)）．よって，集合 A の可測性を確認するには，$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$ を示せば十分である．下の命題 3.3 の証明ではそのような方針をとる．

例 1　$\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$．すなわち $\emptyset$ と $\mathbb{R}$ は可測集合である．実際，$A = \emptyset$ または $A = \mathbb{R}$ のとき，任意の $B \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B \cap \emptyset) + \mu^*(B \cap \mathbb{R}) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(B) = \mu^*(B).$$

命題 3.1 $\mathcal{M}$ は次の性質をもつ：

(1) $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$.

(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{M} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$.

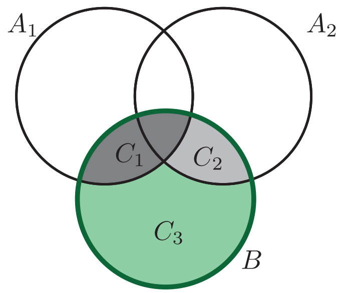
【証明】 (1) 任意の $B \subset \mathbb{R}$ に対し，

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B \cap (A^c)^c) + \mu^*(B \cap A^c).$$

よって A^c も可測.
(2) 任意の $B \subset \mathbb{R}$ をとり，次のように

$$B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 \quad \text{：互いに素な集合による和集合}$$

と分割する：まず B を A_1 を用いて $B = (B \cap A_1) \sqcup (B \cap A_1^c)$ と分割し，$C_1 := B \cap A_1$ とおく．つぎに $B \cap A_1^c$ を A_2 を用いて $B \cap A_1^c = ((B \cap A_1^c) \cap A_2) \sqcup ((B \cap A_1^c) \cap A_2^c)$ と分割し，$C_2 := (B \cap A_1^c) \cap A_2$ $C_3 := (B \cap A_1^c) \cap A_2^c$ とおく．このとき，$A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ より



$$\begin{aligned}\mu^*(B) =& \mu^*(C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3)\\ \overset{(1)}{=}& \ \mu^*(C_1) + \mu^*(C_2 \sqcup C_3)\\ \overset{(2)}{=}& \ \mu^*(C_1) + \mu^*(C_2) + \mu^*(C_3)\\ \overset{(3)}{=}& \ \mu^*(C_1 \sqcup C_2) + \mu^*(C_3)\\ =& \ \mu^*\bigl(B \cap (A_1 \cup A_2)\bigr) + \mu^*\bigl(B \cap (A_1 \cup A_2)^c\bigr)\end{aligned}$$

ただし，(1) では集合 B を可測集合 A_1 で分割し，(2) では集合 $C_2 \sqcup C_3$ を可測集合 A_2 で分割し，(3) では集合 $C_1 \sqcup C_2$ を可測集合 A_1 で分割する操作の逆を行った． ■

例 2 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{M} \implies A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{M}$. たとえば, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$ のように有限個の $\cup$ を用いて表現すれば，命題 3.1(2) より $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathcal{M}$.

例 3 $A_1, A_2 \in \mathcal{M} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ かつ $A_1 - A_2 \in \mathcal{M}$.
実際，$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c$，$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c$ と表されるから，命題 3.1 が（繰り返し）適用できる．

有限加法性と可算加法性

命題 3.2 (有限加法性) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$ は互いに素であると仮定する．このとき，任意の $B \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i).$$

とくに $B = \mathbb{R}$ のとき，

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

【証明】 読者の練習問題とする． ■

命題 3.3 (可算無限和集合) 可算個の可測集合の和集合は可測である．すなわち，可測集合からなる列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ に対し，$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

【証明】 $A_1' := A_1$，$A_2' := A_2 - A_1$，$A_3' := A_3 - (A_1 \cup A_2), \cdots,$, $A_i' := A_i - (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})$, $\cdots$, とおくと，

- $(^\forall i \in \mathbb{N})\ \ A_i' \in \mathcal{M}$.
- $i \neq j \implies A_i' \cap A_j' = \emptyset$.（互いに素）
- $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'$

が成り立つので，最初から $\{A_i\}$ は上の $\{A_i'\}$ の形の互いに素な集合の列だと仮定してよい．

$E_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$ とおくと，$E_n \subset A$ かつ $E_n \in \mathcal{M}$ である．とくに $E_n^c \supset A^c$ かつ $E_n^c \in \mathcal{M}$ であることに注意すると，任意の $B \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap E_n) + \mu^*(B \cap E_n^c) \\
&\geq \mu^*(B \cap E_n) + \mu^*(B \cap A^c) \\
&= \underline{\mu^*(B \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n))} + \mu^*(B \cap A^c) \\
&= \underline{\sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i)} + \mu^*(B \cap A^c).
\end{aligned}$$

最後の下線のところでは命題 3.2 を用いた．下線部は n に関して単調増加（単調非減少）なので

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) \geq& \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*(B \cap A^c) \\
\geq& \mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*(B \cap A^c) \quad \leftarrow \text{可算劣加法性} \\
\geq& \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).
\end{aligned}$$

一方，前章の式 (2.2) より

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

は成り立つ（外測度の劣加法性）．よって $A \in \mathcal{M}$. ■

命題 3.4 (可算加法性) 互いに素な可測集合からなる列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

【証明】 [左辺] $\leq$ [右辺] は外測度の可算劣加法性（命題 2.1）から従う．[左辺] $\geq$ [右辺] を示そう．$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ と有限加法性（命題 3.2）より

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

n は任意なので $n \to \infty$ とすれば [左辺] $\geq$ [右辺] を得る． ■

定義（有限加法族・σ-加法族） $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}}$ が**有限加法族** (algebra，代数) であるとは，次の (A1)，(A2)，(A3) を満たすことをいう：

(A1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(A2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$.

(A3) $A_1,\ A_2 \in \mathcal{A} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

また，$\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}}$ が **σ-加法族** (σ-algebra，σ-代数，可算加法族，etc.) であるとは，上の (A1)，(A2) に加え (Aσ) を満たすことをいう：

(Aσ) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.

系 3.5 $\mathcal{M}$ は**有限加法族**であり，**σ-加法族**でもある.

3.2　演習問題

□ **3.1** 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が開区間の族 $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ によって $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ と書けるとき，高々可算個の $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ が存在し，$A = \bigcup_{i \geq 1} I_{\lambda_i}$ と書けることを示せ．

□ **3.2** Show $\mu^*(A) = 0$ for any countable subset $A \in 2^{\mathbb{R}}$.

□ **3.3** $A,\ B \in \mathcal{M}$ であるとき，

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

が成り立つことを示せ．

□ **3.4** $A, B \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し，$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$ と定義する．$A, B \in \mathcal{M}$ のとき，$A \triangle B \in \mathcal{M}$ を示せ．

□ **3.5** Prove or Disprove: If $A, B \in \mathcal{M}$ and $\mu^*(A \triangle B) = 0$ then $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

□ **3.6** $\lambda > 0,\quad A \in 2^{\mathbb{R}}$ とする．このとき，$\lambda A := \{\lambda x \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$ は $\mu^*(\lambda A) = \lambda \mu^*(A)$ を満たすことを示せ．（Hint. 外測度の定義に基づいて計算する．）

□ **3.7** 問題 3-6 の仮定のもと，$A \in \mathcal{M} \implies \lambda A \in \mathcal{M}$ を示せ．

□ **3.8** Show versions of 問題 3-6 and 問題 3-7 for $\lambda \leq 0$.

□ **3.9** (カントールの 3 進集合) $T_0(x) = x/3$，$T_1(x) = (x-1)/3 + 1 = x/3 + 2/3$，$I_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ とする．以下，$I_0 \in \mathcal{M}$ であることは用いてよい．

(1) $n \geq 0$ に対し $I_{n+1} := T_0(I_n) \cup T_1(I_n)$ とおくとき，$\mu^*(I_n)$ を求めよ．
(2) $I_n \in \mathcal{M}$ を示せ．
(3) $K := \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ とするとき，$\mu^*(K) = 0$ を示せ．（よって $K \in \mathcal{M}$.）

□ **3.10 (S)** (カントール集合は非可算) Show that K is an uncountable set. (Hint: Consider the base 3 representation of $x \in K$, and compare it with binary numbers.)

注意！　この K を**カントールの 3 進集合**という．これは非可算濃度をもつがルベーグ測度 0 の集合である．

第4章　可測関数 (1)

4.1　可測集合の性質（つづき）

前章の復習（σ-加法族としての $\mathcal{M}$）． $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}}$ は以下の性質を満たすのであった．

(A1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

(A2) $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$

(Aσ) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M} \implies \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

この 3 つの性質をもって，$\mathcal{M}$ は「σ-加法族」とよばれるのであった．このとき，たとえば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{M} \tag{4.1}$$

が示される．

また，ルベーグ外測度 $\mu^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ の $\mathcal{M}$ への制限 $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ を「ルベーグ測度」というのであった．前章の命題 3.4 より，ルベーグ測度は次の性質をもつ（可算加法性）：

- $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ かつ互いに素 $\implies \mu\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$

4.2　開集合，閉集合の可測性

ルベーグ測度は「区間」や，より一般に「開集合」や「閉集合」の大きさを測ることができることを確認しておこう．まずは次を示す：

命題 4.1 $a \in \mathbb{R}$ のとき，$[a, \infty) \in \mathcal{M}$.

【証明】 (1) 任意の $B \subset \mathbb{R}$ に対し，

$$\mu(B) \geq \mu^*(B \cap [a, \infty)) + \mu^*(B \cap (-\infty, a)) \tag{4.2}$$

が成り立つことを示せば十分である．外測度の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある区間の列 $\{I_n = [a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$（ただし $a_n \le b_n$）で

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{かつ} \quad \mu^*(B) \le \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \le \mu^*(B) + \varepsilon$$

を満たすものが存在する．各 n に対し $I'_n = I_n \cap [a, \infty)$，$I''_n = I_n \cap (-\infty, a)$ とおくとき，

$$|I_n| = |I'_n| + |I''_n|$$

が成り立つことに注意しよう．（ただし，$|\emptyset| = 0$.）実際，$a < a_n$ のとき $I'_n = I_n$，$I''_n = \emptyset$ より $|I'_n| + |I''_n| = |I_n| + 0 = |I_n|$ であり，$a \ge b_n$ のときも $I''_n = I_n$，$I'_n = \emptyset$ より同様である．$a_n \le a < b_n$ のとき，$I'_n = [a, b_n)$，$I''_n = [a_n, a)$ より $|I'_n| + |I''_n| = (b_n - a) + (a - a_n) = b_n - a_n = |I_n|$.

いま

$$B \cap [a, \infty) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n, \quad B \cap (-\infty, a) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I''_n$$

であることに注意すると，

$$\mu^*(B \cap [a, \infty)) + \mu^*(B \cap (-\infty, a)) \le \sum_{n=1}^{\infty} |I'_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |I''_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \le \mu^*(B) + \varepsilon.$$

ε は任意だったので，式 (4.2) は示された．■

系 4.2 $a < b$ に対し，区間 $(-\infty, a)$，(a, ∞)，(a, b) も $\mathcal{M}$ の元である．

【証明】 式 (4.1) より $[a, \infty) \in \mathcal{M}$ である．よって $(-\infty, a) = [a, \infty)^c \in \mathcal{M}$．また，$(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, \infty)$（可測集合の可算和）より $(a, \infty) \in \mathcal{M}$．$(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b)$（可測集合の共通部分，式 (4.1) も参照）より $(a, b) \in \mathcal{M}$．■

命題 4.3 (開集合・閉集合は可測) $A \in 2^{\mathbb{R}}$ が開集合もしくは閉集合であれば，$A \in \mathcal{M}$ である．

【証明】 $A \subset \mathbb{R}$ を開集合とする．まず，次の補題を示す：

補題． ある区間の列 $I_n = (a_n, b_n)$ $(-\infty \le a_n \le b_n \le \infty)$ が存在し，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

補題の証明． 有理数の稠密性より，$\mathbb{Q} \cap A$ も A において稠密である．これを $\mathbb{Q} \cap A = \{r_1, r_2, \cdots\}$ と表すとき，r_n を含み，かつ A に含まれる開区間全体の和集合を I_n とすれば，これは $I_n = (a_n, b_n)$ $(-\infty \le a_n \le b_n \le \infty)$ の形であり，明らかに $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset A$ である．また，任意に $x \in A$ をとるとき，A は開集合なので x を含み，かつ A に含まれる開区間 I_x が存在する．このときある n が存在し $r_n \in I_x$ であるが，I_n の定義より $I_x \subset I_n$．とくに $x \in I_n$．よって $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.　■（補題）

補題より A は高々可算個の可測集合の和集合となるので，やはり可測（$\mathcal{M}$ の元）である．また，閉集合は開集合の補集合と定義されるから，可測（$\mathcal{M}$ の元）である．■

4.3 ルベーグ測度の単調性

ルベーグ測度の可算加法性から，次の重要な性質が得られる：

命題 4.4 (単調性) 可測集合からなる列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ に対し，次が成り立つ：

(1) ${}^\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$ ならば

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(2) ${}^\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$ かつ $\mu(A_1) < \infty$ ならば

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

【証明】 (1) $A'_1 = A_1$，$A'_2 = A_2 - A_1$，$A'_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$, $\cdots$ と定義すれば，$\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに素な $\mathcal{M}$ の元からなる列であり，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ を満たす．可算加法性より

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A'_n).$$

また，有限加法性（命題 3.2）より $\mu(A_N) = \mu(A'_1) + \cdots + \mu(A'_N)$ であるから，求める等式を得る．

(2) $A'_n := A_1 - A_n = A_1 \cap A_n^c$ とおくと，$A'_n \subset A'_{n+1}$．このとき (1) より

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n).$$

いま

$$\begin{aligned}
A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right)^c &= A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A'_n)^c\right) \\
&= A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c)^c\right) = A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1^c \cup A_n)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mu(A_1) &= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right)\right) + \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right)^c\right) \\ &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A'_n)\right)\right) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).\end{aligned}$$

いま $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_n) + \mu(A_1 \cap A_n^c) = \mu(A_n) + \mu(A'_n)$ に注意すると，

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = \lim_{n\to\infty} \left\{\mu(A_1) - \mu(A'_n)\right\} = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

を得る． ■

4.4 可測関数

「積分が定義できる」関数を定義するために，「ルベーグ和」の考え方をもう一度思い出そう．ひとまず，有界な関数 $f : \mathbb{R} \to [m, M] \subset \mathbb{R}$ （ただし m, M は $m < M$ を満たす実数）を考える．値域の分割 $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = M$ を考え，

$$A_k := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\right\} \quad (k = 1,\, 2,\, \cdots,\, N)$$

とおくとき，

$$\sum_{k=1}^{N} y_k \cdot \mu(A_k)$$

の形の和を積分の「近似」とみなすのがルベーグ積分の根本的なアイディアである．したがって，

$$A_k \in \mathcal{M}$$

でなくてはならない．分割が限りなく細かくなることを踏まえると，一般に任意の実数 a に対し

- $\{f \geq a\} := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \geq a\right\}$
- $\{f > a\} := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) > a\right\}$
- $\{f \leq a\} := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \leq a\right\}$
- $\{f < a\} := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) < a\right\}$

の形の集合たちがそれぞれ $\mathcal{M}$ の元であることが望ましい．（このとき，$A_k = \{f \geq y_{k-1}\} \cap \{f < y_k\} \in \mathcal{M}$.）以上の考察を踏まえて，「可測関数」を定義しよう．

無限大に関する記号 $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ とおく．集合 $X \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し，写像 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ を X 上の「関数」とよぶことにする．（すなわち，以後は関数の値として $\pm\infty$ も許す.）

定義（無限大の演算規約） $\pm\infty$ に関する演算を次のように定める．

- ${}^{\forall}a \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < \infty$ かつ $a \pm \infty = \pm\infty + a = \pm\infty$.（複号同順）
- $\infty + \infty = \infty = \infty - (-\infty)$.
- $\infty \cdot \infty = \infty$.
- $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

注意！ 最初の 3 つは極限を用いれば正当化できる．最後の $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ は極限を用いても正当化できないが，とにかくこう定める．$\infty - \infty$ や ∞/∞ は考えない．

定義（可測関数） $X \in 2^{\mathbb{R}}$ 上の関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が**可測** (measurable) であるとは，$X \in \mathcal{M}$ かつ任意の実数 a に対し $\{f > a\} \in \mathcal{M}$ を満たすことをいう．

例 1（特性関数） $A \in \mathcal{M}$ のとき，$\chi_A : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ を $x \in A$ のとき $\chi_A(x) = 1$，$x \in \mathbb{R} - A$ のとき $\chi_A(x) = 0$ と定める．このとき，χ_A は可測である．なぜなら，定義域 $\mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$ の元であり，与えられた実数 a に対し，$\{f > a\}$ は $\emptyset, \mathbb{R}, A$ のいずれかと一致するからである．

例 2（連続関数） $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続関数であるとき，f は可測関数である．なぜなら，定義域 $\mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$ の元であり，与えられた実数 a に対し，$\{f > a\} = f^{-1}((a, \infty))$ であり，これは開集合の連続関数（写像）による逆像なので開集合である．命題 4.3 より，$\{f > a\} \in \mathcal{M}$.

4.5 演習問題

□ **4.1** Prove or Disprove: If $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are σ-algebra, then so is $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

□ **4.2** Prove or Disprove: If $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are σ-algebra, then so is $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

□ **4.3** 集合族 $\mathcal{A}$ が σ-加法族であることと，条件 (A1)，(A2)，および

$$(\mathrm{A}\sigma') \;\; A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

を満たすことは同値であることを示せ．

□ **4.4** 有限加法族 $\mathcal{A}$ に対し，次が成り立てば，σ-加法族となることを示せ．

$$(\mathrm{A}\sigma'') \;\; A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \text{ かつ } A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

□ **4.5** 有限加法族 $\mathcal{A}$ に対し，次が成り立てば，σ-加法族となることを示せ．

$$(\mathrm{A}\sigma''') \;\; A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \text{ かつ } A_1 \supset A_2 \supset \cdots \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

□ **4.6** $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ が可測関数 (measurable function) であることと，以下はそれぞれ同値であることを示せ．

(1) ${}^{\forall} a \in \mathbb{R}, \;\; \{f \geq a\} \in \mathcal{M}.$

(2) ${}^{\forall} a \in \mathbb{R}, \;\; \{f < a\} \in \mathcal{M}.$

(3) ${}^{\forall} a \in \mathbb{R}, \;\; \{f \leq a\} \in \mathcal{M}.$

□ **4.7** Prove or Disprove: $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ is measurable if and only if $\{a \leq f < b\} \in \mathcal{M}$ for any a, $b \in \mathbb{R}$ with $a \leq b$.

第5章　可測関数 (2)

5.1　可測関数の性質

定義（可測関数：再） 関数 $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$ が**可測** (measurable) であるとは，任意の実数 a に対し $\{f>a\}\in\mathcal{M}$ を満たすことをいう．

ただし，記号 $\{f>a\}$ は集合 $\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;f(x)>a\right\}$ を略記したものである．

注意！ 集合 $X\subset\mathbb{R}$ 上の関数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ が与えられたとき，

$$\overline{f}(x):=\begin{cases} f(x) & (x\in X)\\ 0 & (x\in X^c)\end{cases}$$

として定まる関数 $\overline{f}:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ は f の拡張であり，しかも（リーマン積分の場合を考えればわかるように）積分の値に影響しない．したがって，積分を考える上では関数の定義域を $\mathbb{R}$ に限定しても一般性は失わない．

可測関数の定義は次のような言い換えをもつ（第 4 章の演習問題）：

命題 5.1 以下は同値である：

(1) $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ は可測関数.
(2) 任意の実数 a に対し，$\{f\geq a\}\in\mathcal{M}$.
(3) 任意の実数 a に対し，$\{f<a\}\in\mathcal{M}$.
(4) 任意の実数 a に対し，$\{f\leq a\}\in\mathcal{M}$.

【証明】 (1) $\implies$ (2)：任意の実数 a に対し区間 $[a,\infty)$ は $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-1/n,\infty)$ と表されることに注意すると，

$$\{f\geq a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f>a-1/n\}$$

がわかる．(1) より $\{f>a-1/n\}\in\mathcal{M}$ なので $\{f\geq a\}\in\mathcal{M}$.
(2) $\implies$ (3)：任意の実数 a に対し，

$$\{f<a\}=\{f\geq a\}^c\in\mathcal{M}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (4)：任意の実数 a に対し

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < a + 1/n\}$$

と表されるが，(3) より $\{f < a + 1/n\} \in \mathcal{M}$ なので $\{f \leq a\} \in \mathcal{M}$.
(4) $\Longrightarrow$ (1)：任意の実数 a に対し，

$$\{f > a\} = \{f \leq a\}^c \in \mathcal{M}.$$

■

例 1 $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ が可測関数であるとき，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$\{f = a\} = \{f \leq a\} \cap \{f \geq a\} \in \mathcal{M}.$$

また，

$$\{f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\} \in \mathcal{M},$$

$$\{f = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < -n\} \in \mathcal{M}.$$

命題 5.2 C を実数，$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可測関数とする．（値域に $\pm\infty$ は含まれないことに注意.）このとき，Cf，$f \pm g$，fg は可測関数である．

【証明】 以下，a は任意の実数とする．
Cf の可測性：$C = 0$ のとき，$\{0 \cdot f > a\}$ は $\emptyset$ もしくは $\mathbb{R}$ であるから，関数 $Cf = 0$（定数関数）は可測である（あるいは，定数関数は連続関数なので可測である.）．$C > 0$ のとき，$\{Cf > a\} = \{f > a/C\}$ より Cf は可測．$C < 0$ のとき，$\{Cf > a\} = \{f < a/C\}$ より Cf は可測.

$f + g$ の可測性：$x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) > a &\iff f(x) > a - g(x) \\ &\iff ({}^{\exists} r \in \mathbb{Q}) \;\; f(x) > r > a - g(x) \\ &\iff ({}^{\exists} r \in \mathbb{Q}) \;\; x \in \{f > r\} \cap \{g > a - r\}. \end{aligned}$$

仮定より $\{f > r\} \cap \{g > a - r\} \in \mathcal{M}$ であるから，$\mathbb{Q}$ が可算集合であることより

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{g > a - r\}) \in \mathcal{M}.$$

$f - g$ の可測性：$f - g = f + (-1)g$ より可測.

fg の可測性： $fg = \dfrac{1}{2}\{(f+g)^2 - f^2 - g^2\}$ より，f^2 が可測であることを示せば十分である．実際，

$$\{f^2 > a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & (a < 0) \\ \{f < -\sqrt{a}\} \cup \{f > \sqrt{a}\} & (a \geq 0) \end{cases}$$

が成り立つので f^2 は可測である． ■

5.2 可測関数の極限

$f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を関数の列とする．このとき，以下の関数の可測性について考える：

- $\sup f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \sup\limits_{n \geq 1} f_n(x)$
- $\inf f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \inf\limits_{n \geq 1} f_n(x)$
- $\limsup f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \inf\limits_{n \geq 1}\left(\sup\limits_{k \geq n} f_k(x)\right)$
- $\liminf f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \sup\limits_{n \geq 1}\left(\inf\limits_{k \geq n} f_k(x)\right)$

これらの関数について，次が成り立つ：

命題 5.3 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が可測関数の列であるとき，関数 $\sup f_n$，$\inf f_n$，$\limsup f_n$, $\liminf f_n$ はそれぞれ可測関数である．

【証明】 a を任意の実数とする．いま，実数 x に対し，

$$\sup_{n \geq 1} f_n(x) > a \iff ({}^\exists n \geq 1) \quad f_n(x) > a$$

であるから，

$$\{\sup f_n > a\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{n \geq 1} f_n(x) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\} \in \mathcal{M}.$$

よって $\sup f_n$ は可測関数である．$\inf f_n$ も同様に可測関数であることが示される．

つぎに $\limsup f_n(x) = \inf_{n \geq 1}\left(\sup_{k \geq n} f_k(x)\right)$ を考える．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，関数 g_n を $g_n(x) := \sup_{i \geq 0} f_{n+i}(x)$ と定めれば，これは可測関数列の上限なので可測関数である．さらに $\limsup f_n = \inf g_n$ なのでこれもやはり可測関数である．$\liminf f_n$ についても同様． ■

系 5.4 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を可測関数の列とする．$\{f_n\}$ が関数 $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ に<u>各点収束</u>するとき，f も可測関数である．

【証明】 仮定より各 $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が成り立ち，これは $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ を意味する．命題 5.3 より，f も可測関数である．■

5.3　いたるところで…

2 つの関数 $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ が**ほとんどいたるところで等しい**とは，

$$\mu^*(\{f \neq g\}) = 0$$

が成り立つことをいう．このとき

$$f = g \quad \text{a.e.}$$

と表す．a.e. とは almost everywhere を略したものである．

命題 5.5 関数 $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測関数であり，関数 $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ とほとんどいたるところで等しいものとする．このとき g も可測関数である．

【証明】 $A = \{f \neq g\}$ とすれば，$\mu^*(A) = 0$ より $A \in \mathcal{M}$．よって

$$\{g > a\} = (\{g > a\} \cap A) \cup (\{g > a\} \cap A^c) = (\{g > a\} \cap A) \cup (\{f > a\} \cap A^c).$$

いま $\mu^*(\{g > a\} \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$ より，$\{g > a\} \cap A \in \mathcal{M}$．よって $\{f > a\} \cap A^c \in \mathcal{M}$ より $\{g > a\} \in \mathcal{M}$．■

バリエーション 2 つの関数 $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し，

- $f \geq g \quad \text{a.e.} \ :\Longleftrightarrow\ \mu^*\big(\{f < g\}\big) = 0$
- $|f| < \infty \quad \text{a.e.} \ :\Longleftrightarrow\ \mu^*\big(\{f = \infty\} \cup \{f = -\infty\}\big) = 0$

のように表す．

注意！ 一般に，実数 x に関する命題 $\mathrm{P}(x)$ が外測度 0 の集合 A を除いた A^c 上で成立するとき，「命題 P は a.e. で成り立つ」ともいう．

5.4　参考：非可測集合と非可測関数の構成

まず，$\mathcal{M}$ に属さない $\mathbb{R}$ の部分集合を構成しよう．

命題 5.6 $\mathcal{M}$ に属さない集合 $X \subset [0,1]$ が存在する．

【証明】 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$A(x) := \{x + r \mid r \in \mathbb{Q}\}$$

とおく．いま，ある実数 x, y に対し $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$ であると仮定する．このときある有理数 r_x, r_y が存在し，

$$x + r_x = y + r_y \in A(x) \cap A(y),$$

すなわち $x = y + (r_y - r_x)$ が成り立つ．よって $x + r = y + (r_y - r_x + r)$ $(r \in \mathbb{Q})$ であるから，$A(x) \subset A(y)$ である．同様に $A(y) \subset A(x)$ であるから，$A(x) = A(y)$ となる．このことから，任意の実数 x と y に対し，$A(x) = A(y)$ か $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ のいずれか一方のみが成り立つことがわかった．

さて，同様の議論により任意の実数 x に対し $A(x) = A(x+1)$ となるから，

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in [0,1]} A(x)$$

が成り立つ．このことから，以下を満たす $X \subset [0,1]$ が存在する：

- $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in X} A(x)$
- $x, y \in X$ かつ $x \neq y$ のとき，$A(x) \cap A(y) = \emptyset$

（この X は次のように構成する．$x \sim y \ :\Longleftrightarrow\ A(x) = A(y)$ とすると，$\sim$ は同値関係を定める．そこで，各同値類 $A(x)$ から代表元 x^* を $0 \le x^* \le 1$ となるように選べばよい[*1]．）

背理法により，$X \notin \mathcal{M}$ を示そう．$X \in \mathcal{M}$ と仮定する．自然数 n に対し $X_n := X + 1/n = \{x + 1/n \mid x \in X\}$ とおくと，$X_1, X_2, \cdots$ は互いに素であり，ルベーグ外測度の平行移動不変性から $\mu^*(X_n) = \mu^*(X)$ が成り立つ．また，$X_n \subset [0,2]$ であるから，任意の自然数 N に対し

$$2 = \mu^*([0,2]) \ge \mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} X_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(X_n) = N\mu^*(X)$$

が成り立つ．N は任意なので，$\mu^*(X) = 0$ でなくてはならない．

一方，集合 X の定義より，互いに異なる有理数 r, r' に対し $(X + r) \cap (X + r') = \emptyset$ が成り立つから，$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ と表すと

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (X + r_i) \quad \text{：互いに素な集合族の和集合}$$

であるが，$\mu^*(X + r_i) = \mu^*(X) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$ と可算加法性より

$$\infty = \mu^*(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X + r_i) = 0.$$

これは矛盾である． ■

[*1] ここで，そのような同値類は非可算無限個存在するから，非可算無限個の集合族から一斉に元を選び取る，という操作をしている．すなわち，選択公理を用いなくてはならない．

系 5.7 可測でない関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する．

【証明】 上の命題 5.6 で構成した X に対し，$x \in X$ のとき $f(x) := 1$，それ以外で $f(x) := 0$（すなわち f は X の特性関数 χ_X）とおけば，$X = \{f > 0\} \notin \mathcal{M}$ より f は可測関数ではない． ■

5.5 演習問題

□ **5.1** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が可測関数であるとき，正の数 $p>0$ に対し関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(x):=|f(x)|^p$ と定める．このとき，g も可測関数であることを示せ．

□ **5.2** $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ が可測関数であるとき，関数 $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ を $g(x):=1/f(x)$ と定める．このとき，g も可測関数であることを示せ．

□ **5.3** $A\in\mathcal{M}$，$f,g:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする．関数 $h:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ を

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & : x\in A \text{ のとき} \\ g(x) & : x\in A^c \text{のとき}\end{cases}$$

とおくとき，h は可測関数であることを示せ．

□ **5.4** Prove or Disprove: If $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ and $g:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ are measurable functions, then the set

$$\{f=g\} \;=\; \bigl\{x\in\mathbb{R}\;\big|\;f(x)=g(x)\bigr\}$$

is a measurable set (i.e., an element of $\mathcal{M}$).

□ **5.5** 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，次は同値であることを示せ．

(1) f は可測．

(2) 任意の開集合 $A\subset\mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}(A)$ は可測．

□ **5.6** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を可測関数，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき，$g\circ f$ も可測関数であることを示せ．（問題 5-5 の結果は用いて良い．）

□ **5.7** $f_n:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ $(n=1,2,\cdots)$ を可測関数の列とする．このとき，$\inf f_n$，$\liminf f_n$ は可測関数であることを示せ．

□ **5.8** $f_n:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ $(n=1,2,\cdots)$ を可測関数の列とする．関数 $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ を

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & : \limsup f_n(x)=\liminf f_n(x) \text{ のとき} \\ 0 & : \text{それ以外}\end{cases}$$

とおくとき，f は可測関数であることを示せ．

第6章　ルベーグ積分 (1)

6.1　単関数

リーマン積分では細長い長方形（「短冊」）を並べて関数のグラフを近似した．ルベーグ積分で同様の役割を演じるのが，ここで定義する「単関数」である．

特性関数　$A \in 2^{\mathbb{R}}$ に対し，

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in A^c) \end{cases}$$

で定まる関数 $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ を集合 A の**特性関数** (characteristic function) という．

互いに素な和集合の記号　また，互いに素な集合 $A_1, \cdots, A_n$ に対し，和集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ のことを

$$A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n, \qquad \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$$

などと表す．これは**非交和** (disjoint union) ともよばれる．

例 1　$A, B \in 2^{\mathbb{R}}$ が互いに素であるとき，

$$\chi_{A \sqcup B} = \chi_A + \chi_B.$$

とくに，$\chi_A + \chi_{A^c} = \chi_{\mathbb{R}} = 1$.

定義（単関数） 関数 $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が有限個の値のみをとる可測関数であるとき，これを**単関数** (simple function) という．すなわち，ある互いに素な $A_1, \cdots, A_N \in \mathcal{M}$ と実数 $a_1, \cdots, a_N$ が存在し，

$$\mathbb{R} = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_N \quad \text{かつ} \quad s = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i} \tag{6.1}$$

と表されることをいう．ただし，$\{a_i\}$ は重複を許す．

注意！　単関数を式 (6.1) のように表す方法は一意的ではない．これは，$\{a_i\}$ が重複

を許すことに起因する．たとえば，区間 $A=[0,1]$ の特性関数は単関数であるが，

$$\chi_A = 1\cdot\chi_A + 0\cdot\chi_{A^c} = 1\cdot\chi_{[0,1/2)} + 1\cdot\chi_{[1/2,1]} + 0\cdot\chi_{(-\infty,0)} + 0\cdot\chi_{(1,\infty)}$$

などと表すことができる．

命題 6.1 α,β を実数，$s,t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を単関数とするとき，$\alpha s+\beta t$ も単関数である．

【証明】 いま $1\le i\le N,\ 1\le j\le M$ に対し実数 $a_i,\ b_j\in\mathbb{R}$ と $A_i,\ B_j\in\mathcal{M}$ が存在し，

$$\mathbb{R}=\bigsqcup_{i=1}^{N}A_i=\bigsqcup_{j=1}^{M}B_j,\quad s=\sum_{i=1}^{N}a_i\,\chi_{A_i},\quad t=\sum_{j=1}^{M}b_j\,\chi_{B_j}$$

と表される．いま，各 i に対し $A_i=\bigsqcup_{j=1}^{M}(A_i\cap B_j)$ であるから，

$$\mathbb{R}=\bigsqcup_{\substack{1\le i\le N\\1\le j\le M}}(A_i\cap B_j)$$

と表される．とくに，$A_i\cap B_j$ 上では $\alpha s(x)+\beta t(x)=\alpha a_i+\beta b_j$ となるので，

$$\alpha s+\beta t=\sum_{\substack{1\le i\le N\\1\le j\le M}}(\alpha a_i+\beta b_j)\,\chi_{A_i\cap B_j}.$$

これは単関数である．■

6.2　非負単関数の積分．

負の値をとらない単関数 $s:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ をとくに「非負単関数」という．

定義． 非負単関数 $s:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ が $a_i\ge 0$ と $A_i\in\mathcal{M}$ $(1\le i\le N)$ を用いて

$$\mathbb{R}=\bigsqcup_{i=1}^{N}A_i,\quad s=\sum_{i=1}^{N}a_i\,\chi_{A_i}$$

と表されるとき，その**積分**を

$$\int s\,d\mu := \sum_{i=1}^{N}a_i\,\mu(A_i)\quad\in\quad[0,\infty]$$

と定義する．

注意！　単関数が別の $b_j \geq 0$ と $B_j \in \mathcal{M}$ $(1 \leq j \leq M)$ を用いて

$$s = \sum_{j=1}^{M} b_j \, \chi_{B_j}$$

とも表されるとき，積分について

$$\left(\int s \, d\mu = \right) \sum_{i=1}^{N} a_i \, \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{M} b_j \, \mu(B_j)$$

が成り立つ．すなわち，積分は単関数の，特性関数を用いた表現にはよらない．

注意！　非負単関数の積分は，先に述べた「ルベーグ和」に相当するものである[*1]．実際，非負可測関数 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ と $[0, \infty]$ の分割 $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_N (< \infty)$ が与えられたとき，

$$A_k := \{y_k \leq f < y_{k+1}\} \quad (0 \leq k \leq N-1), \quad A_N := \{y_N \leq f \leq \infty\}$$

とおくと，これは可測集合であり，$\mathbb{R} = A_0 \sqcup \cdots \sqcup A_{N-1} \sqcup A_N$ を満たす．さらに，

$$s := \sum_{k=0}^{N} y_k \, \chi_{A_k}$$

などとすれば，これは非負可測関数 f を近似する単関数になっており，

$$\int s \, d\mu = \sum_{k=0}^{N} y_k \, \mu(A_k).$$

.

命題 6.2 $s, t : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を（非負）単関数，α, β を負でない実数とするとき，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int (\alpha \, s + \beta \, t) \, d\mu = \alpha \int s \, d\mu + \beta \int t \, d\mu.$

(2) $s \leq t$ a.e. のとき，$\displaystyle\int s \, d\mu \leq \int t \, d\mu.$

【証明】 (1) 命題 6.1 の記号を流用する．以下，添字 i は 1 から N まで，j は 1 から M までを

[*1] 本当は積分の記号ではなく $L(s, \mu)$ や $\Lambda(s, \mu)$ のように書きたいところ．しかし，単関数の積分はそのルベーグ積分と一致するので，積分記号で表現するのが一般的である．

渡るものとすると，

$$\begin{aligned}\int (\alpha s + \beta t)\, d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha a_i + \beta b_j)\mu(A_i \cap B_j) \\ &= \alpha \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \beta \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \alpha \sum_i a_i \mu(A_i) + \beta \sum_j b_j \mu(B_j) \\ &= \alpha \int s\, d\mu + \beta \int t\, d\mu.\end{aligned}$$

(2) (1) と同じ記号のもと，

$$\int s\, d\mu = \sum_i a_i \mu(A_i) = \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j)$$

だが，$s \le t$ a.e. より，もし $x \in A_i \cap B_j$ に対し $s(x) = a_i > b_j > t(x)$ であれば $\mu(A_i \cap B_j) \le \mu(\{s > t\}) = 0$．よって積分には寄与しないので，

$$\begin{aligned}\int s\, d\mu &= \sum_{\substack{i,j \\ a_i \le b_j}} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{\substack{i,j \\ a_i > b_j}} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ a_i \le b_j}} a_i \mu(A_i \cap B_j) + 0 \\ &\le \sum_{\substack{i,j \\ a_i \le b_j}} b_j \mu(A_i \cap B_j) + 0 \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ a_i \le b_j}} b_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{\substack{i,j \\ a_i > b_j}} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_j b_j \mu(B_j) = \int t\, d\mu.\end{aligned}$$

6.3 ルベーグ積分の定義

単関数の積分を元にして，可測関数の積分を定義しよう．

非負可測関数の積分 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ を（非負）可測関数とする．このとき，

$$\int f\, d\mu := \sup_{0 \le s \le f} \int s\, d\mu \quad \in \ [0, \infty]$$

と定める．ここで，sup の s は $0 \le s \le f$ （すなわち，任意の実数 x に対し $0 \le s(x) \le f(x)$ ）を満たすすべての（非負）単関数を渡るものとする[*2]．

[*2] そのような s は必ず存在する（たとえば定数関数 $s = 0$）ので，sup の記号は意味をもつ．

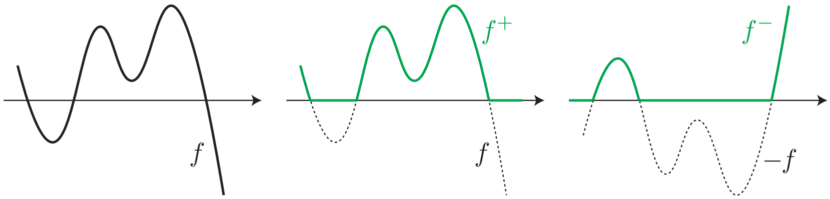
一般の可測関数の積分　$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ を可測関数とする．

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\}$$

と定義すると，これらは非負可測関数であり，$f = f^+ - f^-$ を満たす．このとき，

$$\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

を f の**ルベーグ積分** (Lebesgue integral) もしくは単に**積分**という．



f が**積分確定**であるとは，

$$\int f^+\, d\mu < \infty \quad \text{または} \quad \int f^-\, d\mu < \infty$$

が成り立つことをいう．このとき，$\infty - \infty$ の形にはならないので f の積分は $\overline{\mathbb{R}}$ に値をもつ．

f が**ルベーグ可積分** (Lebesgue integrable) もしくは単に**可積分**であるとは，

$$\int f^+\, d\mu < \infty \quad \text{かつ} \quad \int f^-\, d\mu < \infty$$

が成り立つことをいう．このとき，f の積分は $\mathbb{R}$ に値をもつ．

$A \in \mathcal{M}$ とするとき，f の A 上での積分を

$$\int_A f\, d\mu := \int f \cdot \chi_A\, d\mu$$

と定義する．$f\chi_A$ が可積分関数であるとき，f は ***A* 上で可積分**であるという．

記号　ルベーグ積分 $\int f\, d\mu$ は $\int f$, $\int f(x)\, d\mu$, $\int f(x)\, d\mu(x)$ などと表されることもある．

6.4 演習問題

□ **6.1** $s_1,\ s_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を単関数とするとき，$\max\{s_1,\ s_2\}$，$\min\{s_1,\ s_2\}$ も単関数であること示せ．

□ **6.2** 非負単関数 $s : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ の

$$s = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$$

（ただし $a_i \geq 0$，$A_1, \cdots, A_n$ は互いに素な $\mathcal{M}$ の元）という形の表現は一意的ではないが，積分値

$$\int s\, d\mu := \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i)$$

は一意的に定まることを示せ．

□ **6.3** (1) Prove or Disprove: Suppse that $s : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ is a simple function with $\displaystyle\int s\, d\mu = 0$. Then $s = 0$.

(2) Prove or Disprove: Suppse that $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ is a measurable function with $\displaystyle\int f\, d\mu = 0$. Then $f = 0$ a.e.

□ **6.4** Prove or Disprove: A measurable function $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ is integrable if and only if $|f| : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ is integrable.

□ **6.5** $A, B \in \mathcal{M}$ は互いに素，$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ は可積分関数とする．このとき，

$$\int_{A \cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$$

を示せ．

□ **6.6** 実数 a に対し $T_a(x) = x + a$ と定める．$A \in \mathcal{M}$ であり，$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ が可積分関数であるとき，

$$\int_A f\, d\mu = \int_{T_a^{-1}(A)} f \circ T_a\, d\mu$$

を示せ．

□ **6.7** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x$ と定める．ルベーグ積分の定義に基づいて，f はルベーグ可積分ではないことを示せ．また，f は $[-1, 1]$ 上ではルベーグ可積分であることを示せ．

□ **6.8** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ と定めるとき，f はルベーグ可積分ではないことを示せ．

□ **6.9** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ （ただし $g(0) := 1$）と定めるとき，g はルベーグ可積分ではないことを示せ．

第7章　ルベーグ積分 (2)

7.1　非負可測関数の積分

命題 7.1 $f,\, g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ を非負可測関数とするとき，次が成り立つ．

(1) 負でない実数 α に対し，$\displaystyle\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$.

(2) $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.

(3) $f \leq g$ a.e. のとき，$\displaystyle\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

注意！ f が非負関数であるとき $f^- = 0$ となるから，$\displaystyle\int f^-\, d\mu = 0$. よって積分確定である．

(1) と (3) の証明 (1) s を $0 \leq s \leq f$ を満たす非負単関数とするとき，$t = \alpha s$ は $0 \leq t \leq \alpha f$ を満たす単関数である．命題 6.2 (1) より，$\displaystyle\int t\, d\mu = \alpha \int s\, d\mu$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \alpha f\, d\mu &= \sup_{0 \leq t \leq \alpha f} \int t\, d\mu = \sup_{0 \leq \alpha s \leq \alpha f} \int \alpha s\, d\mu = \sup_{0 \leq \alpha s \leq \alpha f} \alpha \int s\, d\mu \\ &= \sup_{0 \leq s \leq f} \alpha \int s\, d\mu = \alpha \sup_{0 \leq s \leq f} \int s\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.\end{aligned}$$

(3) 単関数 s が $0 \leq s \leq f$ を満たすと仮定する．$A := \{f > g\}$ とおくと，$\mu(A) = 0$ となる．そこで

$$t := s\,\chi_{A^c} = s\,(1 - \chi_A)$$

とおくと，これは単関数であり，$s = t$ a.e. より $\displaystyle\int t\, d\mu = \int s\, d\mu$ を満たす．$A^c = \{f \leq g\}$ 上で $t \leq f \leq g$ かつ A 上 $t = 0 \leq g$. よって $\mathbb{R}$ 上で $t \leq g$ であり，

$$\int g\, d\mu = \sup_{0 \leq s' \leq g} \int s'\, d\mu \geq \int t\, d\mu = \int s\, d\mu.$$

よって $0 \leq s \leq f$ となる単関数 s すべてについて上限をとれば，$\displaystyle\int g\, d\mu \geq \int f\, d\mu$ を得る． ■

命題 7.1 の (2) を示すために，次のふたつの補題を用いる．

補題 7.2 $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ を非負可測関数とする．このとき非負単関数の列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で，

- $0\le s_1\le s_2\le\cdots$ かつ
- $f=\lim_{n\to\infty} s_n$ （各点収束）

を満たすものが存在する．

【証明】 自然数 n に対し

$$A_k(n):=\left\{\frac{k}{2^n}\le f<\frac{k+1}{2^n}\right\}\quad(0\le k\le n2^n-1),$$
$$B(n):=\{f\ge n\}$$

とおくと，$\mathbb{R}=\left(\bigsqcup_{k=0}^{n2^n-1}A_k(n)\right)\sqcup B(n)$ であり，単関数

$$s_n:=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\chi_{A_k(n)}+n\,\chi_{B(n)}$$

は求める $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を与える（確認せよ）． ■

補題 7.3 非負単関数の列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$0\le s_1\le s_2\le\cdots$$

を満たし，$f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ に各点収束するとき，

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int s_n\,d\mu.$$

注意！ $I_n=\int s_n\,d\mu$ とおくと，補題の仮定 ($s_n\le s_{n+1}$) と命題 6.2(2) より，$I_n\le I_{n+1}\le\infty$ が成り立つ．よって，$\lim_{n\to\infty}I_n\in[0,\infty]$ が存在する．その値が $\int f\,d\mu$ と一致するのである．

証明：($\ge$)

$$\int f\,d\mu:=\sup_{\substack{0\le s\le f\\ s:\,\text{単関数}}}\int s\,d\mu\ge\int s_n\,d\mu \tag{7.1}$$

であるから，$n\to\infty$ とすれば $\int f\,d\mu\ge\lim_{n\to\infty}\int s_n\,d\mu$. を得る．

($\le$) $\int f\,d\mu$ の定義（式 (7.1)）より，ある単関数の列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し $0\le t_n\le f$ かつ

$$\int t_n\,d\mu\to\int f\,d\mu\quad(n\to\infty)$$

を満たす．そこで，

$$\sigma_n := \max\{s_n,\, t_1,\, t_2,\, \cdots, t_n\}$$

とおくと，これは非負単関数であり，$0 \le \sigma_n \le \sigma_{n+1} \le f$ を満たす．このとき，$s_n \le \sigma_n$ より $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = f$ （各点収束）であるから，次の「補題の補題」より $\lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sigma_n \, d\mu$ が成り立つ．また，$t_n \le \sigma_n$ より，$\int t_n \, d\mu \le \int \sigma_n \, d\mu$ が成り立つことに注意しよう．

任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 N が存在し，$n \ge N$ のとき

$$\int f \, d\mu - \varepsilon \le \int t_n \, d\mu \le \int \sigma_n \, d\mu.$$

n と ε は任意なので，

$$\int f \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int \sigma_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu.$$

■

補題の補題. $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を非負単関数の列とし，$0 \le s_n \le s_{n+1}$，$0 \le \sigma_n \le \sigma_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ が成り立つものとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sigma_n \, d\mu$$

【証明】 N を固定し，$\sigma_N \le \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ を考える．このとき，

$$\int \sigma_N \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu \tag{7.2}$$

が成り立つことを示せば十分である．実際， 式 (7.2) で $N \to \infty$ とすれば

$$\lim_{N\to\infty} \int \sigma_N \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu$$

となり，σ_n と s_n を入れ替えれば逆の不等式が得られるからである．

いま，互いに素な $A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{M}$ と実数 $a_1, \cdots, a_m$ を用いて $\sigma_N = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k}$ と表されるとする．任意の $\varepsilon \in (0,1)$ を固定し，

$$A_k(n) := \left\{ x \in A_k \;\middle|\; s_n(x) \ge (1-\varepsilon)\, a_k \right\}$$

とおくと，$A_k(n) \subset A_k(n+1)$，$\bigcup_{n=1}^\infty A_k(n) = A_k$ が成り立つ．$s_n \ge (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k(n)}$ より，

$$\lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu \ge (1-\varepsilon) \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mu\big(A_k(n)\big) = (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^m a_k \mu\big(A_k\big) = (1-\varepsilon) \int \sigma_N \, d\mu.$$

ε は任意なので 式 (7.2) が示された． ■(補題の補題)

命題 7.1 の (2) の証明 補題 7.2 より，非負単関数の列 $\{s_n\}$ と $\{t_n\}$ が存在し，$s_n \le s_{n+1}$，$f = \lim_{n\to\infty} s_n$，$t_n \le t_{n+1}$，$g = \lim_{n\to\infty} t_n$ を満たす．このとき 列 $\{s_n + t_n\}$ は

$s_n + t_n \leq s_{n+1} + t_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = f + g$ を満たす単関数の列であるから，補題 7.3 より

$$\int (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (s_n + t_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\left\{\int s_n\,d\mu + \int t_n\,d\mu\right\} = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

■

7.2　可積分関数の積分の線形性

命題 7.4 $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ を可積分関数とするとき，次が成り立つ．

(1) 任意の実数 α に対し，αf は可積分であり，$\int \alpha f\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu$.

(2) $f + g$ は可積分であり，$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$.

(3) $f \leq g$ a.e. のとき，$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

【証明】 一般に α, β を実数とするとき，$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$ である．よって

$$\int |\alpha f + \beta g|\,d\mu \leq |\alpha| \int |f|\,d\mu + |\beta| \int |g|\,d\mu < \infty$$

であり，$\alpha f + \beta g$ は可積分となる．

(1)，(2) が成り立つことは演習問題とする．(3) を示す．$g - f \geq 0$ a.e. と命題 7.1(3) より

$$\int (g-f)\,d\mu \geq 0.$$

(1) と (2) より，

$$\int g\,d\mu - \int f\,d\mu \geq 0 \iff \int g\,d\mu \geq \int f\,d\mu.$$

■

7.3 演習問題

以下，命題 7.1 は仮定してよい．

□ **7.1** $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ を可積分関数，α を実数とする．

(1) $\alpha \geq 0$ のとき，$\displaystyle\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$ を示せ．

(2) $\alpha < 0$ のとき，$(\alpha f)^{\pm} = |\alpha| f^{\mp}$ であることを用いて $\displaystyle\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$ を示せ．

□ **7.2** $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ を可積分関数とする．

(1) $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ を示せ．

□ **7.3** 命題 7.4(3) の等号成立条件を確認しよう．$f \leq g$ a.e. と仮定する．

(1) $\displaystyle\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$ と仮定する．$E_n := \{g - f \geq 1/n\}$ とおく．このとき，$\mu(E_n) = 0$ を示せ．

(2) $\mu(\{g - f > 0\}) = 0$ を示せ．よって $f = g$ a.e. である．

(3) 逆に，$f = g$ a.e. ならば $\displaystyle\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$ を示せ．

注意！ したがって，$f < g$ a.e. であれば $\displaystyle\int f\, d\mu < \int g\, d\mu$.

□ **7.4** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続関数であるとき，$f = g$ a.e. であれば $f = g$ であることを示せ．（Hint. 対偶を示すとよい．）

□ **7.5** $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ が可積分であるとき，自然数 m, n に対し

$$A_{m,n} := \left\{ \alpha \in [1/m, \infty) \;\middle|\; \mu(\{f = \alpha\}) \geq 1/n \right\}$$

とおく．

(1) $\displaystyle\int f\, d\mu \geq \frac{\sharp A_{m,n}}{mn}$ を示せ．ただし，$\sharp A_{m,n}$ は $A_{m,n}$ の元の濃度．

(2) $\mu(\{f = \alpha\}) \neq 0$ を満たす実数 α からなる集合 A はたかだか可算な集合であることを示せ．

□ **7.6** 集合 $X \in \mathcal{M}$ は $\mu(X) < \infty$ を満たすものとする．可測関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し

$$A_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \leq |f| < n+1 \right\}$$

とおくとき，f が X 上可積分であることと

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(A_n) < \infty$$

は同値であることを示せ．（Hint. $n\mu(A_n) \leq \displaystyle\int_{A_n} |f| \, d\mu \leq (n+1)\mu(A_n)$ を用いる．）

第 8 章　収束定理

8.1　収束定理

この章では「$f_n \to f$ （各点収束）のとき，$\displaystyle\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$ か？」という問題を考える[*1].

定理 8.1 (単調収束定理) $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は次を満たす非負可測関数列とする：

(1) すべての自然数 n に対し $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ a.e.（単調性）

(2) ある非負可測関数 f が存在し，$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a.e.

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

ただし，$\infty = \infty$ も許す.

注意！ 非負可測関数は積分確定である．また，条件 (1) で「a.e.」を除いた場合，単調性より各点収束極限 $\lim_{n\to\infty} f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ は必ず存在する．この場合，条件 (2) は不要で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)\,d\mu.$ が得られる.

[*1] ルベーグ積分は可積分関数から実数への線形写像だと考えられる．この問題は，その写像の連続性に関する問題とも解釈できる.

【証明】 可算個の零集合の和集合はまた零集合であるから，「a.e.」を除いて定理を証明すれば十分である．

いま各 n に対し，f_n に単調に収束する単関数列 $\{s_n^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を次のように与える．自然数 m に対し，

$$s_n^m := \sum_{k=0}^{m2^m-1} \frac{k}{2^m}\chi_{\left\{\frac{k}{2^m}\le f_n<\frac{k+1}{2^m}\right\}}.$$

このとき，

$$0\le s_n^m \le s_n^{m+1}\le f_n,\quad f_n=\lim_{m\to\infty}s_n^m$$

が成り立つ．大小関係は右の図のようになっている．

$$\begin{array}{ccccccccc}
\max & & \max & & & & \max & & \\
s_1^1 & \le & s_1^2 & \le & \cdots & \le & s_1^n & \le \cdots \to & f_1 \\
t_1 & & & & & & & & \text{\rotatebox{90}{$\ge$}} \\
s_2^1 & \le & s_2^2 & \le & \cdots & \le & s_2^n & \le \cdots \to & f_2 \\
 & & t_2 & & & & & & \text{\rotatebox{90}{$\ge$}} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \text{\rotatebox{90}{$\ge$}} \\
s_n^1 & \le & s_n^2 & \le & \cdots & \le & s_n^n & \le \cdots \to & f_n \\
 & & & & & & t_n & & \text{\rotatebox{90}{$\ge$}} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & f
\end{array}$$

そこで，自然数 n に対し

$$t_n := \max\{s_1^n,\, s_2^n,\, \cdots,\, s_n^n\}$$

と定めよう．これは単関数であり，$s_k^n\le s_k^{n+1}$ より

$$\begin{aligned}
0\le t_n &= \max\{s_1^n,\, s_2^n,\, \cdots,\, s_n^n\}\\
&\le \max\left\{s_1^{n+1},\, s_2^{n+1},\, \cdots,\, s_n^{n+1},\, s_{n+1}^{n+1}\right\}=t_{n+1}
\end{aligned}$$

（非負単調性）を満たす．そこで，$g:=\lim_{n\to\infty}t_n$ とおき，$g=f$ であることを示そう．まず

$$t_n=\max\{s_1^n,\, s_2^n,\, \cdots,\, s_n^n\}\le\max\{f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n\}=f_n\le f \tag{8.1}$$

より，$n\to\infty$ とすれば $g\le f$ を得る．つぎに自然数 i を固定し $i<n$ とするとき，

$$s_i^n\le\max\{s_1^n,\, s_2^n,\, \cdots,\, s_n^n\}=t_n\le g$$

より，$n\to\infty$ として $f_i\le g$ を得る．i は任意だから，$f\le g$．よって $f=g$ が示された．また，補題 7-3 より，

$$\int f\,d\mu=\int g\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int t_n\,d\mu$$

が成り立つ．一方，式 (8.1) より

$$\lim_{n\to\infty}\int t_n\,d\mu\le\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu\le\int f\,d\mu$$

が成り立つから，上の不等式と合わせて

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

が示された． ■

例 1（ディリクレ関数） $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ は可算集合なので $\{r_1, r_2, \cdots\}$ と表すことができる．$A_n := \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ とおき，$f_n(x)$ を $x\in A_n$ のとき 1，それ以外の実数のとき 0 となる関数として定める．すなわち，$f_n = \chi_{A_n}$ であり，これは単関数である．また，$\mu(A_n)=0$ であるから，$\displaystyle\int f_n\,d\mu = 0$ である．

一方，明らかに単調性 $f_n \le f_{n+1}$ を満たすから，極限関数 $f=\lim_{n\to\infty} f_n$（ディリクレ関数！）は可測であり，単調収束定理より

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = 0.$$

リーマン積分に関して，ディリクレ関数 f はリーマン可積分ですらなかったことに注意しよう．

ファトゥの補題 次の定理は「ファトゥの補題」(P. Fatou) と呼ばれている．

定理 8.2（ファトゥの補題） 非負可測関数の列 $\{f_n : \mathbb{R}\to[0,\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu. \tag{8.2}$$

注意！ 等号が成立しない例としては．$f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}$ がある．このとき，式 (8.2) の左辺は 0，右辺は 1 となる．

【証明】 $g_n := \inf_{k\ge n} f_k$ とおくと，$0\le g_n\le g_{n+1}$ であり

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} f_k\right) = \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

よって単調収束定理（定理 8.1）より，

$$\int\left(\lim_{n\to\infty} g_n\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu \iff \int\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu.$$

一方，$g_n\le f_n$ より

$$\liminf_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu.$$

$\displaystyle\left\{\int g_n\,d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調非減少列であるから，

$$\liminf_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu\ \left(=\limsup_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu\right)$$

が成り立つ．以上の不等式を組み合わせば，式 (8.2) を得る． ■

ルベーグの優収束定理

定理 8.3 (ルベーグの優収束定理) $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は次を満たす可測関数列とする：

(1) ある可測関数 f が存在し，$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a.e.
(2) ある非負可積分関数 $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ が存在し，すべての自然数 n に対し $|f_n| \le \Phi$ a.e.

このとき，f_n，f は可積分であり，

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

ただし，$\infty = \infty$ も許す．

証明：可積分性 $|f_n| = f_n^+ + f_n^- \le \Phi$ a.e. より，

$$\int f_n^+ \, d\mu + \int f_n^- \, d\mu \le \int \Phi \, d\mu < \infty.$$

よって f_n は可積分である．同様に，$|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \le \Phi$ a.e. より f も可積分である．

収束性 条件 (2) より $0 \le \pm f_n + \Phi$ a.e. であることに注意すると，ファトゥの補題（定理 8.2）より

$$\int \liminf (\pm f_n + \Phi) \, d\mu \le \liminf \int (\pm f_n + \Phi) \, d\mu.$$

$\liminf(\pm f_n) = \lim(\pm f_n) = \pm f$ より，上の不等式は

$$\begin{aligned} \int (\pm f + \Phi) \, d\mu \ &\le\ \liminf \int (\pm f_n + \Phi) \, d\mu \\ \Longleftrightarrow \quad \pm \int f \, d\mu \ &\le\ \liminf \left(\pm \int f_n \, d\mu \right) \end{aligned}$$

と変形できる．$+$ の符号を選ぶと，

$$\int f \, d\mu \ \le\ \liminf \left(\int f_n \, d\mu \right). \tag{8.3}$$

$-$ の符号を選ぶと，

$$\begin{aligned} -\int f \, d\mu \ &\le\ \liminf \left(-\int f_n \, d\mu \right) = -\limsup \left(\int f_n \, d\mu \right) \\ \Longleftrightarrow \quad \int f \, d\mu \ &\ge\ \limsup \left(\int f_n \, d\mu \right) \end{aligned} \tag{8.4}$$

式 (8.3) と式 (8.4) より，

$$\int f \, d\mu \le \liminf \left(\int f_n \, d\mu \right) \le \limsup \left(\int f_n \, d\mu \right) \le \int f \, d\mu$$

よって $\lim \left(\int f_n \, d\mu \right)$ は存在し値は $\int f \, d\mu$ と一致する． ■

8.2 演習問題

□ **8.1** $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は可積分関数の列で，$f_n \le f_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ かつ $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ に各点収束するものとする．このとき，$\displaystyle\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ $(n \to \infty)$ を示せ．(Hint. $g_n := f_n - f_1 \ge 0$ は非負なので単調収束定理が使える．)

□ **8.2** $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ に各点収束するものとする．f_n に優関数が存在せず，$\displaystyle\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ $(n \to \infty)$ とならない例をあげよ．

□ **8.3** $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は可積分関数の列で，$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ に各点収束するものとする．さらに，$A \in \mathcal{M}$ は $\mu(A) < \infty$ を満たし，ある定数 $M > 0$ が存在して $\sup_{x \in A} |f_n(x)| \le M$ がすべての n で成り立つとする．このとき，$f\chi_A$ は可積分であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$ が成り立つことを示せ．

□ **8.4** $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を可積分関数の列とする．また，$A \in \mathcal{M}$ は $\mu(A) < \infty$ を満たし，$\{f_n\}$ は $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ に A 上一様収束するものとする．このとき，$f\chi_A$ は可積分であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$ が成り立つことを示せ．

□ **8.5** $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を可積分関数の列とする．$\{f_n\}$ は $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ に一様収束するが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$ が成り立たない例をあげよ．

記号 可測関数の列 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が定める

$$F_n := f_1 + \cdots + f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対し，各点収束極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n$ が存在するとき，極限関数を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ もしくは $f_1 + f_2 + \cdots$ と表し，$\{f_n\}$ が定める**（関数項）級数**は**収束する**という．等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

が成り立つとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は**項別積分可能**であるという．

□ **8.6** $\{f_n\}_{n\ge1}$ を可測関数の列とする．$\{f_n\}_{n\ge1}$ の定める級数 $F = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が収束するとき，F は可測関数であることを示せ．

□ **8.7** Prove or Disprove: Suppose that $\{f_n\}_{n\geq 1}$ is a sequence of integrable functions. If the series $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ for $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converges, then F is integrable.

□ **8.8** $\{f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]\}_{n\geq 1}$ を非負可測関数の列とする．$\{f_n\}_{n\geq 1}$ の定める級数 $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が収束するとき，項別積分可能であることを示せ．

第9章　項別積分・リーマン積分

9.1　関数項級数に対する積分の収束定理

前章で示した単調収束定理と優収束定理を用いて，関数からなる級数に対して積分の収束性を保証する定理を示す．

関数項級数　可測関数からなる列 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し，$F_n := f_1 + \cdots + f_n$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n$ が a.e. で存在するとき，すなわち，ある可測関数 $F : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ が存在し $F = \displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n$ a.e. が成り立つとき[*1]，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が定める級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は（a.e. で，もしくは μ-a.e. で）**収束する**といい，$F = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a.e. と表す．収束しないとき**発散する**という．

いま各 f_n は可積分であると仮定する．もし $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も可積分であり，

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu \tag{9.1}$$

が成り立つとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は**項別積分可能**であるという．

定理 9.1 (非負関数からなる関数項級数)　可測関数からなる列 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ はすべての n に対し $f_n \geq 0$ a.e. を満たすものとする．このとき

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu. \tag{9.2}$$

ただし，$\infty = \infty$ も認めるものとする．

【証明】　すべての n に対し $f_n \geq 0$ a.e. のとき，$0 \leq F_n \leq F_{n+1}$ a.e. が成り立つから，必ず各点

[*1] ある x で $F_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ に $\infty - \infty$ が含まれるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ は存在しない．そのような点からなる集合も測度 0 であれば問題ない．

収束極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ が存在する．すなわち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は必ず収束する．

単調収束定理（前章の定理 8.1）より，

$$
\begin{aligned}
&\int \lim_{n\to\infty} F_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int F_n\, d\mu \\
\iff &\int \lim_{n\to\infty} (f_1 + \cdots + f_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_1 + \cdots + f_n)\, d\mu \\
\iff &\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_1\, d\mu + \cdots + \int f_n\, d\mu \right) \\
&\qquad\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.
\end{aligned}
$$

■

定理 9.2 可測関数からなる列 $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ はそれぞれ可積分であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\, d\mu < \infty$$

を満たすものとする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は a.e. で収束し可積分である．さらに，

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu. \tag{9.3}$$

【証明】 $|f_n| \geq 0$ は非負可測関数列であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ が存在して，定理 9.1 より

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\, d\mu < \infty.$$

すなわち，$\displaystyle\Phi := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は可積分である．とくに $\Phi < \infty$ a.e. が成り立つから，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ はほとんどすべての x に対しある実数に絶対収束する．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ はほとんどいたるところで収束する．

いま $F_n := f_1 + \cdots + f_n$ とおくと，$|F_n| \leq \Phi$ であるからルベーグの優収束定理（定理 8.2）が適用できて，定理 9.1 の証明と同様の議論により式 (9.3) を得る．■

応用例　$\mathbb{R}$ 上の非負関数 $f(x) = e^{-x}$ が $[0,\infty)$ 上可積分であることを示そう．すなわち，$\displaystyle\int_{[0,\infty)} e^{-x}\, d\mu = \int f\chi_{[0,\infty)}\, d\mu < \infty$ を示す．

$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し $s_n := e^{-n}\chi_{[n,\, n+1)}$（これは非負単関数）とおこう．$\displaystyle\int s_n\, d\mu =$

$e^{-n}\mu([n, n+1)) = e^{-n}$．よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int s_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1} < \infty.$$

$g := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ とおくと，定理 9.2 より，

$$\int g \, d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} s_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int s_n \, d\mu = \frac{e}{e-1}$$

であるから，$g = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ は可積分である．$f\chi_{[0,\infty)} \leq g$ より $f\chi_{[0,\infty)}$ も可積分である．

リーマン積分 vs. ルベーグ積分　実数 a, b $(a < b)$ に対し関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ のリーマン積分とルベーグ積分の関係を考えよう．

いま f の定義域を実数全体に拡張するために，

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と拡張しておく．このとき，f が**ルベーグ可積分**であるとは，$\widetilde{f}$ がルベーグ可積分であることをいい，$\displaystyle\int \widetilde{f} \, d\mu$ を f のルベーグ積分といい，$\displaystyle\int_{[a,b]} f \, d\mu$ と表す．

定理 9.3 区間 $[a, b]$ 上の有界関数 f がリーマン可積分であるとき，ルベーグ可積分であり

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$$

が成り立つ．ただし，左辺はリーマン積分である．

よって，ルベーグ積分はリーマン積分の拡張だと考えられる．

【証明】 $x \notin [a, b]$ に対し $f(x) := 0$ と定義し，f を $\mathbb{R}$ 上の関数として拡張しておく．$f(x)$ は有界なので，ある実数 $M > 0$ が存在し $-M \leq f(x) \leq M$ が成り立つとしてよい．区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta := \{x_0, x_1, \cdots, x_N\}$（すなわち，$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ を満たす）をひとつとる．$0 \leq k \leq N$ に対し，

$$m_k := \inf \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1} \}, \quad M_k := \sup \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1} \}$$

とおき，

$$s(f, \Delta) := \sum_{k=0}^{N-1} m_k \, (x_{k+1} - x_k), \quad S(f, \Delta) := \sum_{k=0}^{N-1} M_k \, (x_{k+1} - x_k)$$

とおく．リーマン可積分性より，$|\Delta| = \max_{0\le k<N}(x_{k+1}-x_k) \to 0$ のとき，$s(f,\Delta)$ と $S(f,\Delta)$ はともにリーマン積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する．また，単関数

$$t_\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} m_k \chi_{[x_k,\,x_{k+1})},\quad T_\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} M_k \chi_{[x_k,\,x_{k+1})}$$

は

$$\int t_\Delta\,d\mu = \sum_{k=0}^{N-1} m_k \mu([x_k,\,x_{k+1})) = s(f,\Delta),\quad \int T_\Delta\,d\mu = \sum_{k=0}^{N-1} M_k \mu([x_k,\,x_{k+1})) = S(f,\Delta)$$

を満たす．そこで，$n = 1, 2, \cdots$ に対し

$$\Delta_n := \left\{a + \frac{b-a}{2^n}\cdot k\right\}_{k=0}^{2^n}$$

とすると，$\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ であり，$|\Delta_n| = |b-a|/2^n \to 0$.

$$t_n := t_{\Delta_n},\quad T_n := T_{\Delta_n}$$

とおくと，

$$-M \le t_n \le t_{n+1} \le f \le T_{n+1} \le T_n \le M \quad \text{a.e.}$$

がすべての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ（Δ_{n+1} に含まれる分割点では成り立たないかもしれないが，$\mu(\Delta_{n+1}) = 0$ であるから a.e. で成り立つ．）．とくに $\{t_n\}$，$\{T_n\}$ は有界な単調列だから，$g = \lim_{n\to\infty} t_n$ a.e.，$G = \lim_{n\to\infty} T_n$ a.e. を満たす可測関数 g, G が存在し，$g \le f \le G$ a.e. を満たす．ここで $\Phi := M\chi_{[a,b]}$ とおくと，これは明らかに非負可積分関数であり，$|t_n| \le M\chi_{[a,b]}$，$|T_n| \le M\chi_{[a,b]}$ を満たす．よって優収束定理より g と G は可積分であり，

$$\int g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int t_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n),\quad \int G\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int T_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n)$$

が成り立つ．リーマン可積分性より

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

であるから，$\displaystyle\int g\,d\mu = \int G\,d\mu = \int_a^b f(x)\,dx$. 一方，$g \le f \le G$ a.e. より $G - g \ge 0$ a.e. であるが，

$$0 \le \int (G-g)\,d\mu = \int G\,d\mu - \int g\,d\mu = 0$$

より $g = G$ a.e. でなくてはならない．すなわち $g = f = G$ a.e. であり，f はルベーグ可積分かつ

$$\int f\,d\mu = \int_a^b f(x)\,dx$$

を得る． ■

9.2 演習問題

$-\infty < a < b \leq \infty$ とする．関数 $f : [a,\, b) \to \mathbb{R}$ に対し極限

$$\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\, dx =: \int_a^b f(x)\, dx$$

が存在するとき，**広義リーマン積分** (improper integral) が存在するという．$-\infty \leq a < b < \infty$ のとき，区間 $(a,\, b]$ 上の関数の広義リーマン積分も同様に定義する．また，開区間 $(a,\, b)$ 上の関数の広義リーマン積分は $a < c < b$ となる c を任意にとり，$(a, c]$ と $[c, b)$ 上でともに広義リーマン積分が存在するときに，それぞれの和として定義する．

□ **9.1** Prove or disprove: If the improper integeral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ exists for the non-negative function $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, then

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_{[0,\infty)} f\, d\mu.$$

□ **9.2** $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ を可積分関数とする．このとき，$F(x) := \displaystyle\int_{(-\infty,x]} f\, d\mu$ は $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数を定めることを示せ．

□ **9.3** $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{1 + x^2}$ と定義する．このとき，f は $[0, \infty)$ 上でルベーグ可積分であることを示せ．

□ **9.4** $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ と定義する．このとき，f は $[1, \infty)$ 上でルベーグ可積分であることを示せ．

□ **9.5** 任意の $p > 0$ に対し，$f(x) = e^{-px}$ は $[0,\, \infty)$ 上でルベーグ可積分であることを示せ．

以下，任意の $p > 0$ と十分に大きな x に対し $x^p e^{-x} \leq e^{-x/2} \to +0$ $(x \to \infty)$ であることは用いて良い．

□ **9.6** 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) := x^3 e^{-nx}$ と定義する．このとき，f_n は $[0, \infty)$ 上ルベーグ可積分であることを示せ．

□ **9.7** 上の問題の続き：$\displaystyle\int_{[0,\infty)} \sum_{n=1}^\infty f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} f_n\, d\mu$ を示せ．

□ **9.8** 上の問題の続き：$\displaystyle\int_{[0,\infty)} f_n\,d\mu$ は広義リーマン積分 $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ と一致することを示せ．

□ **9.9** $p>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\log\frac{1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(p+n)^2}$ を示せ．

□ **9.10** $A\in\mathcal{M}$ かつ $\mu(A)<\infty$ とする．A に属さない点では 0 を値にもつ有界可測関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$n\to\infty$ のとき以下が成り立つことを示せ：

(1) $\displaystyle\int_A\left(1+\frac{f}{1!}+\frac{f^2}{2!}+\cdots+\frac{f^n}{n!}\right)d\mu \to \int_A e^f\,d\mu$

(2) $\displaystyle\int_A\left(1+\frac{f}{n}\right)^n d\mu \to \int_A e^f\,d\mu$

第10章　直積測度 (1)

10.1　フビニの定理に向けて

重積分を計算する際には，それを累次積分として表現し，1 次元の定積分にまで帰着させるのがふつうである．このとき「重積分を累次積分として表現する」ことをルベーグ積分の範疇で考えよう．

本章ではやや抽象的な枠組みで測度論を展開するが，つねに 1 次元ルベーグ測度を具体例として念頭に置いておくとよい．

10.2　σ-加法族と測度

以下，X を集合とし，2^X でその部分集合全体のなす族を表す．

定義（σ-加法族）　$\mathcal{M} \subset 2^X$ が X 上の **σ-加法族**（σ-代数，可算加法族）であるとは，次の (1)，(2)，(3) を満たすことをいう：

(1) $\emptyset,\ X \in \mathcal{M}$.

(2) $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$.

(3) $A_1,\ A_2, \dots \in \mathcal{M} \implies \displaystyle\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{M}$.

定義（測度，測度空間）　$\mathcal{M} \subset 2^X$ を X 上の σ-加法族とする．関数 $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が X 上の**測度**であるとは，つぎの (M1), (M2) を満たすことをいう．

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) $A_1,\ A_2, \dots \in \mathcal{M}$ が互いに素であるとき，$\mu\left(\displaystyle\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$.

さらに集合 X，X 上の σ-加法族 $\mathcal{M}$，X 上の測度 μ からなる 3 つ組 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を**測度空間**という．

注意！

- 組 $(X, \mathcal{M})$ を**可測空間**ということがある．
- 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ において，$\mathcal{M}$ の元を μ**-可測集合**もしくは単に**可測集合**ということもある．
- $\mu(X) = 1$ であるとき，μ は X 上の**確率測度**であるという．

例 1（1 次元ルベーグ測度空間）　$X = \mathbb{R}$ とし，$\mathcal{M}$ をルベーグ可測集合全体，μ を 1 次元ルベーグ測度とするとき，$(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ は測度空間である．

例 2（n 次元ルベーグ測度空間）　$X = \mathbb{R}^n$ とするとき，1 次元ルベーグ測度の構成をほぼそのまま真似て n 次元ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ を構成することができる．

たとえば $n = 2$ のとき，

- まず $I = [a, b) \times [c, d)$ の形の「長方形」からなる集合全体を考え，$|I| := (b - a)(d - c)$ とおく．
- 任意の $A \subset \mathbb{R}^2$ に対し，2 次元ルベーグ外測度を

$$\mu_2^*(A) := \inf_{\{I_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

と定める．ただし，$\{I_n\}$ は $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ を満たす可算無限個の「長方形」からなる族すべてわたるものとする．
- $A \subset \mathbb{R}^2$ が可測であるとは，任意の $B \subset \mathbb{R}^2$ に対し $\mu_2^*(B) = \mu_2^*(B \cap A) + \mu_2^*(B \cap A^c)$ が成り立つこととする．可測集合全体を $\mathcal{M}_2$ と表す．
- $A \in \mathcal{M}_2$ に対し，$\mu_2(A) := \mu_2^*(A)$

10.3　直積と可測長方形

2 つの測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ が与えられているとする．これから次章にかけて，直積

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

上の σ-加法族とその上の「直積測度」を構成していく．

定義（長方形）． 集合 $R \subset X \times Y$ が**長方形**であるとは，ある $A \subset X$，$B \subset Y$ が存在し

$$R = A \times B := \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

と表されることをいう．

命題 10.1 $k=1,2$ に対し $A_k \subset X$，$B_k \subset Y$，$R_k := A_k \times B_k$ とおく．このとき，

$$R_1 \cap R_2, \quad R_1 \cup R_2, \quad R_1^c, \quad R_1 - R_2$$

は互いに素な有限個の長方形の和集合としてあらわされる．

【証明】 たとえば（図を描きながら考えると）

$$R_1 \cap R_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$
$$R_1^c = (A_1^c \times Y) \sqcup (A_1 \times B_1^c)$$

がいえる．これらは互いに素な有限個の長方形の和集合である．$R_1 \cup R_2 = (R_1^c \cap R_2^c)^c$, $R_1 - R_2 = R_1 \cap R_2^c$ よりこれらも互いに素な有限個の長方形の和集合である． ■

定義（可測長方形）． 集合 $I \subset X \times Y$ が**可測長方形**であるとは，ある $A \in \mathcal{M}$ かつ $B \in \mathcal{N}$ が存在し $I = A \times B$ と表されることをいう．可測長方形全体からなる族（$2^{X \times Y}$ の部分集合）を $\mathcal{I}$ と表す．また，可測長方形 $I \in \mathcal{I}$ に対し，

$$|I| := \mu(A)\,\nu(B)$$

と定める．

定義（直積空間の外測度）． 任意の $E \subset X \times Y$ に対し，

$$\lambda^*(E) := \inf_{\{I_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

とおく．ただし，$\{I_n\}$ は E を被覆する（すなわち $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$ をみたす）可測長方形の族すべてを渡る．

外測度が期待通りの性質を持つことを確認していく．

命題 10.2 (可測長方形の性質) 次が成り立つ．

(1) $I \in \mathcal{I}$ ならば，$0 \leq |I| \leq \infty$．とくに，$|\emptyset| = 0$．

(2) **有限加法性：** $I \in \mathcal{I}$ であり，互いに素な有限個の $I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{I}$ によって $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$ と表されるとき，

$$|I| = |I_1| + \cdots + |I_n|.$$

(3) **可算劣加法性：** $I \in \mathcal{I}$ であり，無限個の可測長方形 $I_1, I_2, \cdots \in \mathcal{I}$ によって I が被

覆される（すなわち $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$）とき，

$$|I| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

記号　証明の前に，特性関数の記号をつぎのように「濫用」する：A を任意の集合とするとき，$x \in A$ であれば $\chi_A(x) := 1$ とし，$x \notin A$ のとき $\chi_A(x) := 0$ と定める．

たとえば $I = A \times B$ に対し，$(x,y) \in I$ であれば $\chi_I((x,y)) = 1$ であるが，この場合は例外的に $\chi_I(x,y) = 1$ と表すことにする．

このとき，次が成り立つことに注意しよう．

$$\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\,\chi_B(y).$$

【証明】 (1) は明らか．
(2) $I = A \times B$, $I_i = A_i \times B_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおく．$I_1, \cdots, I_n$ は互いに素であるから，任意の $(x,y) \in X \times Y$ に対し

$$\chi_I(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{I_i}(x,y) \iff \chi_A(x)\,\chi_B(y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\,\chi_{B_i}(y).$$

いま $x \in X$ を固定すると，

$$\begin{aligned}
\nu(B)\chi_A(x) &= \int_Y \chi_A(x)\,\chi_B(y)\,d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_Y \chi_{A_i}(x)\,\chi_{B_i}(y)\,d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x) \int_Y \chi_{B_i}(y)\,d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\,\nu(B_i).
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
|I| = \mu(A)\,\nu(B) &= \int_X \nu(B)\chi_A(x)\,d\mu \\
&= \int_X \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x)\,\nu(B_i)\,d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i) \int_X \chi_{A_i}(x)\;d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} |I_i|.
\end{aligned}$$

(3) $I_i = A_i \times B_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \iff& {}^{\forall}(x, y) \in X \times Y, \quad \chi_I(x, y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i}(x, y) \\
\iff& {}^{\forall}(x, y) \in X \times Y, \quad \chi_A(x)\,\chi_B(y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x)\,\chi_{B_i}(y).
\end{aligned}
$$

後の議論は (2) と同様である. ■

10.4 演習問題

□ **10.1** (σ-加法族) $X = \{a, b, c, d\}$ とする．このとき，X の部分集合族で σ-加法族となるものはいくつあるか．また，その中で部分集合族 $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ を含む最小の σ-加法族は何か．

□ **10.2** (数え上げ測度 1) $\mathbb{N}$ 上の「数え上げ測度 (counting measure)」を $A \subset \mathbb{N}$ が有限個集合のときには $\mu(A)$ をその個数（濃度），有限個ではないときには $\mu(A) = \infty$ として定める．このとき，$(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \mu)$ が測度空間となるように σ-加法族 $\mathcal{N}$ をひとつ定めよ．

□ **10.3** (数え上げ測度 2) $\mathbb{R}$ 上の数え上げ測度を $A \subset \mathbb{R}$ が有限個集合のときには $\mu(A)$ をその個数（濃度），有限個ではないときには $\mu(A) = \infty$ として定める．このとき，$(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ が測度空間となるように σ-加法族 $\mathcal{M}$ をひとつ定めよ．

□ **10.4** X を集合とし，$\mathcal{N} \subset 2^X$ とする．$\mathcal{N}$ を含む X 上の σ-加法族すべての共通部分を $\widetilde{\mathcal{N}}$ と表すとき，これはまた σ-加法族 であることを示せ．

注意！ この $\widetilde{\mathcal{N}}$ を，$\mathcal{N}$ によって生成される（最小の）σ-加法族という．

$(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ を測度空間とする．また，A_1, $A_2 \subset X$，B_1, $B_2 \subset Y$ に対し，$R_1 = A_1 \times B_1$，$R_2 = A_2 \times B_2$ とおく．また，$X \times Y$ の可測長方形全体の集合を $\mathcal{I}$ で表し，$\mathcal{I}$ が生成する最小の σ-加法族を $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ と表す．R_1 が可測長方形であるとき，$|R_1| = \mu(A_1)\nu(B_1)$ と表す．

□ **10.5** $R_1 \cap R_2$，$R_1 - R_2$，R_1^c，$R_1 \cup R_2$ は有限個の互いに素な長方形の和であることを示せ．

□ **10.6** (命題 10.2(3) の証明) $I \in \mathcal{I}$，$I_i \subset \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ が $I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$ を満たすとき，$|I| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |I_n|$ であることを示せ．

□ **10.7** (直積測度) Prove or Disprove: Suppose that both $(X, \mathcal{M}, \mu)$ and $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ are one-dimensional Lebesgue measure space $(\mathbb{R}^1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$. Then $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1$ coincides with $\mathcal{M}_2$, the family of two-dimensional Lebesgue measurable sets.

第11章　直積測度 (2)

11.1　直積外測度 λ^* の性質，測度 λ の構成

以下，測度空間 $(X,\mathcal{M},\mu)$，$(Y,\mathcal{N},\nu)$ から定まる可測長方形の全体を $\mathcal{I}$，$I=A\times B\in\mathcal{I}$ のとき $|I|=\mu(A)\nu(B)$ とする．また，任意の $E\subset X\times Y$ に対し，

$$\lambda^*(E):=\inf_{\{I_n\}}\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$$

（ただし，$\{I_n\}$ は $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ をみたす可測長方形の族すべてを渡る）と定め，本講義では便宜的に $X\times Y$ 上の「直積外測度」と呼ぶことにする．

命題 11.1 直積外測度 $\lambda^*:2^{X\times Y}\to[0,\infty]$ について，次が成り立つ：

(1) $\lambda^*(\emptyset)=0$.

(2) $E_1\subset E_2$ のとき，$\lambda^*(E_1)\le\lambda^*(E_2)$.

(3) $E\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ のとき，$\lambda^*(E)\le\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(E_i)$.

(4) $I\in\mathcal{I}$ のとき，$|I|=\lambda^*(I)$.

証明はルベーグ外測度に関する同様の命題の証明とほとんど同じである．

定義（可測集合と直積測度）. $E_0\subset X\times Y$ が**可測（集合）**であるとは，任意の $E\subset X\times Y$ に対し

$$\lambda^*(E)=\lambda^*(E\cap E_0)+\lambda^*(E\cap E_0^c)$$

が成り立つことをいう．$X\times Y$ の可測な部分集合全体からなる族を $\mathcal{L}\subset 2^{X\times Y}$ と表す．また，λ^* を $\mathcal{L}$ に制限した写像を $\lambda:=\lambda^*|\mathcal{L}\to[0,\infty]$ と表す．

命題 11.2 次が成り立つ：

(1) $\mathcal{L}$ は $\mathcal{I}$ を含む．すなわち，可測長方形は可測集合である．

(2) $\mathcal{L}$ は σ-加法族．

(3) $\lambda : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ は $X \times Y$ 上の測度.

すなわち，$(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ は測度空間.

測度 λ を測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ および $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ が定める**直積測度**という[*1].

【証明】 1 次元ルベーグ測度の場合とおなじである. ■

例 1（零集合は可測） $\lambda^*(E_0) = 0$ のとき，E_0 を**零集合** (null set) という．零集合は可測である．実際，命題 11.1(2) より任意の $E \subset X \times Y$ に対し，$\lambda^*(E \cap E_0) \leq \lambda^*(E_0) = 0$, $\lambda^*(E \cap E_0^c) \leq \lambda^*(E)$ であるから $\lambda^*(E \cap E_0) + \lambda^*(E \cap E_0^c) \leq \lambda^*(E)$．一方，命題 11.1(3) より $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap E_0) + \lambda^*(E \cap E_0^c)$.

等測包　$E \in 2^{X \times Y}$ と $E^* \in \mathcal{L}$ に対し，

$$E \subset E^* \quad \text{かつ} \quad \lambda^*(E) = \lambda^*(E^*) \quad (= \lambda(E^*))$$

が成り立つとき，E^* は E の**等測包** (measurable cover) であるという．等測包はつねに存在するが，次の命題のように，特定の性質を満たすように構成することができる：

命題 11.3 (等測包) $\lambda^*(E) < \infty$ を満たす任意の $E \in 2^{X \times Y}$ に対し，E の等測包 $E^* \in \mathcal{L}$ で，つぎの形のものが存在する.

(1) $E^* = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_n \in \mathcal{L}$ $(n = 1, 2, \cdots)$; かつ

(2) すべての n に対し，$E_n = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} I_n(i)$，$I_n(i) \in \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$

さらに，次の条件を満たすように取ることができる：すべての n に対し，

(3) $E_{n+1} \subset E_n$，かつ

(4) $I_n(i) \in \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ は互いに素.

【証明】 読者の練習問題とする.

11.2　直積測度としての 2 次元ルベーグ測度

1 次元ルベーグ測度とルベーグ可測集合を構成したときと同様に，任意の自然数 n に対し，n 次元ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ を考えることができる（第 10 章例 2).

[*1] $\mu \otimes \nu$ と表すこともある.

では, 前章までの直積測度の構成法において, $(X,\mathcal{M},\mu)=(\mathbb{R}^m,\mathcal{M}_m,\mu_m)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)=(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_n,\mu_n)$ とおき，直積空間 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^{m+n}$ を同一視しよう．このとき，直積測度 $(X\times Y,\mathcal{L},\lambda)$ は $(\mathbb{R}^{m+n},\mathcal{M}_{m+n},\mu_{m+n})$ と一致するだろうか？答えは YES であるが，ここでは話を簡単にするために $m=n=1$ の場合だけを考えよう．

命題 11.4 (ユークリッド直積測度) $(X,\mathcal{M},\mu)=(Y,\mathcal{N},\nu)=(\mathbb{R}^1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$ とする．直積空間 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視するとき，直積測度空間 $(X\times Y,\mathcal{L},\lambda)$ は 2 次元ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^2,\mathcal{M}_2,\mu_2)$ と一致する．

【証明】 2 つの外測度 $\lambda^*:2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=2^{\mathbb{R}^2}\to[0,\infty]$ と $\mu_2^*:2^{\mathbb{R}^2}\to[0,\infty]$ が一致することを示せば十分である．(あとは可測集合の定義方法から，$\mathcal{L}=\mathcal{M}_2$ が直ちに導かれる．)

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の可測長方形全体を $\mathcal{I}$ と表し，可測長方形の中でも $R=[a_1,a_2)\times[b_1,b_2)$ の形（これを単に「区画」とよぼう）の集合を $\mathcal{R}$ と表す．$I=A\times B\in\mathcal{I}$ のとき，$|I|=\mu_1(A)\mu_1(B)$ であり，上の R の場合 $|R|=(a_2-a_1)(b_2-b_1)$ であることに注意する．以下，$\mathbb{R}$ 上の区間の長さと区別するために，便宜的に $|I|$ を $\|I\|$ と表すことにする．

$E\in 2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ を任意にとるとき，

$$\lambda^*(E):=\inf_{\{I_i\}}\sum_{i=1}^{\infty}\|I_i\|$$

（ただし，$\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ は E を被覆する可測長方形の列）であった．一方，

$$\mu_2^*(E):=\inf_{\{R_i\}}\sum_{i=1}^{\infty}\|R_i\|$$

（ただし，$\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ は E を被覆する区画の列）である．$\{R_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{R}\subset\mathcal{I}$ から，$\lambda^*(E)\le\mu_2^*(E)$ はつねに成り立つ．$\lambda^*(E)=\infty$ のときは $\mu_2^*(E)=\infty$ であるから，とくに $\lambda^*(E)<\infty$ のとき，$\mu_2^*(E)\le\lambda^*(E)$ を示せば十分である．

まず，E が有界な集合であると仮定する．とくに，ある $M>0$ が存在し，$E\subset[-M,M]\times[-M,M]$ が成り立つものとする．いま，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $[-M,M]\times[-M,M]$ 内の可測長方形の列 $I_k=A_k\times B_k\in\mathcal{I}$ $(k=1,2,\cdots)$ が存在し，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|I_k\|\le\lambda^*(E)+\varepsilon$$

が成り立つとしてよい．さらに，各 $k=1,2,\cdots$ に対し，ある $[-M,M]$ 内の互いに素な半閉半開区間の列 $X_k(i)$ $(i=1,2,\cdots)$ と $Y_k(j)$ $(j=1,2,\cdots)$ が存在し，

$$\sum_{i=1}^{\infty}|X_k(i)|\le\mu_1(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\quad\text{かつ}\quad\sum_{j=1}^{\infty}|Y_k(j)|\le\mu_1(B_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$$

が成り立つとしてよい．これより，

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|X_k(i)|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|Y_k(j)|\right)\le\mu_1(A_k)\mu_1(B_k)+\{\mu_1(A_k)+\mu_1(B_k)\}\cdot\frac{\varepsilon}{2^k}+\frac{\varepsilon}{2^k}\cdot\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

とくに，$\mu_1(A_k), \mu_1(B_k) \leq 2M$ であり，$\dfrac{\varepsilon}{2^k} \leq 1$ と仮定してよいから，$|X_k(i)||Y_k(j)| = \|X_k(i) \times Y_k(j)\|$ より，

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \|X_k(i) \times Y_k(j)\| \leq \|I_k\| + (4M+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

いま $\{X_k(i) \times Y_k(j)\}_{i,j,k=1}^{\infty}$ は E を被覆する可算無限個の区画であるから，k について和をとることで

$$\mu_2^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} \|X_k(i) \times Y_k(j)\| \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|I_k\| + (4M+1)\varepsilon \leq \lambda^*(E) + (4M+2)\varepsilon.$$

ε は任意であったから，

$$\mu_2^*(E) \leq \lambda^*(E)$$

を得る．よって，有界な E に対しては等式 $\mu_2^*(E) = \lambda^*(E)$ が示された．

一般の E に対しては，少し工夫が必要である[*2]．まず，自然数 n に対し $X_n := [-n,n] \times [-n,n]$ とおき，$Y_1 := X_1$，$Y_{n+1} := X_{n+1} - X_n$ と定義する．これらはすべて $\mathcal{L}$-可測かつ $\mathcal{M}_2$-可測であることに注意しよう．また，$Y_1, Y_2, \cdots$ は互いに素であり，$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \cdots$ を満たしている．いま，$E_n := E \cap Y_n$ とおくと，$E = E_1 \sqcup E_2 \sqcup \cdots$ であり，各 E_n は有界であることから，$\mu_2^*(E_n) = \lambda^*(E_n)$ が成り立つ．よって，外測度の可算劣加法性により，

$$\mu_2^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E_i).$$

可測集合の有限加法性（命題 3.2，本質的には可測集合の定義式を繰り返し適用し非交和に分解しているだけ）より，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E \cap Y_i) = \lambda^*(E \cap (Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_n)) \leq \lambda^*(E)$$

であるから，$\mu_2^*(E) \leq \lambda^*(E)$ を得る．同様にして $\lambda^*(E) \leq \mu_2^*(E)$ も得られるから，この場合も等式 $\mu_2^*(E) = \lambda^*(E)$ が成り立つ．■

[*2] ここでは，$\mathbb{R}^2$ が後述する「σ-有限性」を持つことを使っている．

11.3 演習問題

以下，測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$，$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ から定まる可測長方形の全体を $\mathcal{I}$，$I = A \times B \in \mathcal{I}$ のとき $|I| = \mu(A)\nu(B)$ とする．以下直積測度空間 $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ を考える．

□ **11.1** $I \in \mathcal{I}$，$I_i \in \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が $I = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ を満たすとき，次を示せ．

$$\text{各}\, I_1, \cdots, I_n \,\text{は互いに素} \iff \chi_I(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{I_i}(x,y)$$

□ **11.2** $I \in \mathcal{I}$，$I_i \in \mathcal{I}$ $(n = 1, 2, \cdots,)$ が $I \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ を満たすとき，次を示せ．

$$\chi_I(x,y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i}(x,y)$$

□ **11.3** Prove or Disprove: If $f : X \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{M}$-measurable and $g : Y \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{N}$-measurable, then $h(x,y) = f(x) + g(y)$ is $\mathcal{L}$-measurable.

□ **11.4** Prove or Disprove: If $f : X \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{M}$-measurable and $g : Y \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{L}$-measurable, then $h(x,y) = f(x)g(y)$ is $\mathcal{L}$-measurable.

□ **11.5** 完備ではない測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ の例をあげよ．

□ **11.6** (等測包，命題 12.1 の後半) $E = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_n \in \mathcal{L}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ であり，さらにすべての n に対し，$E_n = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} I_n(i)$，$I_n(i) \in \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ であると仮定する．$n = 1, 2, \cdots$ に対し $E'_n := E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$ とするとき，次が成り立つことを示せ．

(a) $E'_{n+1} \subset E'_n$，　$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E'_n$.

(b) ある互いに素な $I'_n(i) \in \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ が存在し，$E'_n = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{\infty} I'_n(i)$

第12章　フビニの定理 (1)

12.1　直積測度の積分表示

測度の完備性　測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ が（もしくは測度 μ が）**完備**であるとは，A が零集合であるとき，任意の A の部分集合 A' が $\mathcal{M}$ の元となることをいう．とくに，このとき $\mu(A') = 0$ を満たす．

ルベーグ測度や上で構成した直積測度など，命題 11.1 のような性質をもつ外測度を経由して構成される測度空間は完備性をもつ．これは上の例（零集合は可測）と命題 11.1(2) から明らかであろう．わざわざこのように定義をするのは，完備で「ない」測度空間が存在するからである．

可測関数と積分　測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ に対し，関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が**可測**（関数）であるとは，任意の実数 a に対し $\{f > a\} \in \mathcal{M}$ となることをいう．

可測関数 f に対し，1 次元ルベーグ積分とまったく同様に（単関数を経由して）その積分 $\displaystyle\int_X f\,d\mu$ が定義できる．さらに，「単調収束定理」「ルベーグの優収束定理」などの定理がそのまま証明できる．

直積測度の積分表示　以下，測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ および $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ は完備であると仮定する．（これらの直積測度空間 $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ はその構成方法から完備である．）基本的には $(X, \mathcal{M}, \mu) = (Y, \mathcal{N}, \nu) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ の場合を念頭においておけばよい．

次の命題はフビニの定理の根幹にある定理だと言ってもよい：

命題 12.1　$E \in \mathcal{L}$，$\lambda(E) < \infty$ とし，$E_x := \left\{ y \in Y \;\middle|\; (x, y) \in E \right\}$ と定める．このときある $\mu(X_0) = 0$ を満たす $X_0 \in \mathcal{M}$ が存在し，次を満たす：

(1)　すべての $x \in X - X_0$ に対し，$E_x \in \mathcal{N}$．

(2)　$x \in X - X_0$ に対し $g(x) := \nu(E_x)$ と定めると，$g(x)$ は非負可測関数であり，

$$\int_X g(x)\,d\mu = \int_X \nu(E_x)\,d\mu = \lambda(E).$$

（ただし $x \in X_0$ のときは形式的に $g(x) = 0$ として考えればよい．）

【証明】 次の（ア）〜（オ）の 5 段階に分けて証明する．

（ア） $E \in \mathcal{I}$ のとき．$A \in \mathcal{M}$，$B \in \mathcal{N}$ とし $E = A \times B$ と表されたとしよう．$x \in A$ のとき $E_x = B$，$x \notin A$ のとき $E_x = \emptyset$ であるから，いずれの場合も $E_x \in \mathcal{N}$ である．また，任意の $x \in X$ に対し

$$g(x) := \nu(E_x) = \nu(B) \cdot \chi_A(x)$$

と表される．$\nu(B)$ は定数であり，$A \in \mathcal{M}$ （すなわち $\mathcal{M}$-可測）であるから，$g(x)$ は X 上の非負（$\mathcal{M}$-）可測な関数である．さらに，

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu = \int_X \nu(B)\chi_A(x)\, d\mu = \nu(B)\int_X \chi_A(x)\, d\mu = \nu(B) \cdot \mu(A) = |A \times B| = \lambda(E).$$

（イ） ある互いに素な $I_i \in \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ が存在し，$E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i$ と表されるとき．（ア）より，各 i に対し $(I_i)_x \in \mathcal{N}$ であり，$g_i(x) := \nu\big((I_i)_x\big)$ とおくとこれは X 上の非負（$\mathcal{M}$-）可測関数である．$\mathcal{N}$ が σ-加法族であることから $(E)_x = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (I_i)_x \in \mathcal{N}$ であり，ν の可算加法性より

$$g(x) := \nu(E_x) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu\big((I_i)_x\big) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x).$$

非負可測関数の無限和は非負可測関数であるから，$g(x)$ も X 上の非負（$\mathcal{M}$-）可測関数である．さらに項別積分可能（定理 9.1）であるから，

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \nu\big((I_i)_x\big)\, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X g_i(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i).$$

測度 λ の可算加法性より，最後の項は $\lambda(E)$ に等しい．

（ウ） ある $I_n(i) \in \mathcal{I}$ $(n,\, i = 1, 2, \cdots)$ が存在し，$E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n(i) \in \mathcal{L}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}$ と表され，とくに $\lambda(E_1) < \infty$ を満たすとき．命題 11.3（の後半）より，すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対し $E_{n+1} \subset E_n$ かつ $I_n(i) \in \mathcal{I}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ は互いに素であると仮定してよい．すなわち，$E_n = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_n(i)$．（イ）より，各 $n = 1, 2, \cdots$ に対し $(E_n)_x = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \big(I_n(i)\big)_x$ であり，$g_n(x) := \nu\big((E_n)_x\big)$ とおくとこれは（$\mathcal{M}$-）可測関数であり，

$$\int_X g_n(x)\, d\mu = \int_X \nu\big((E_n)_x\big)\, d\mu = \lambda(E_n)$$

が成り立つ．とくに $n = 1$ のとき，

$$\int_X g_1(x)\, d\mu = \lambda(E_1) < \infty$$

という仮定から，$X_0 := \{g_1 = \infty\} \in \mathcal{M}$ は零集合でなくてはならない．

$x \in X - X_0$ のとき $\nu\big((E_1)_x\big) = g_1(x) < \infty$ であることに注意すると，$E_{n+1} \subset E_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より

$$0 \leq \cdots \leq \nu\big((E_3)_x\big) \leq \nu\big((E_2)_x\big) \leq \nu\big((E_1)_x\big) < \infty$$

が成り立つ．よって命題 4.4（単調性，これは Y 上の測度 ν に対しても成立することが確かめられる）より，

$$\lim_{n\to\infty} \nu\big((E_n)_x\big) = \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n)_x\right) = \nu(E_x).$$

これを関数 g, g_n の言葉に置き換えると，$x \in X - X_0$ のとき

$$0 \leq \cdots \leq g_3(x) \leq g_2(x) \leq g_1(x) < \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

となる．g_n は X 上の（$\mathcal{M}$-) 可測関数であるから，$X - X_0$ 上に制限しても（$\mathcal{M}$-) 可測関数であり，したがって g は $X - X_0$ 上の（$\mathcal{M}$-) 可測関数である．さらに X_0 は零集合であったから，(必要なら X_0 での値を適当に定めることで) g は X 上の（$\mathcal{M}$-) 可測関数となる．ルベーグの優収束定理（定理 8.3）を $\Phi = g_1$ として適用すれば，

$$\int_X g(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n). \tag{12.1}$$

すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対し $E_{n+1} \subset E_n$, $E = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}$，$\lambda(E_1) < \infty$ より，命題 4.4（単調性，今度は $X \times Y$ 上の測度 λ に対しても成立することが確かめられる）を適用して

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lambda(E).$$

よって上の式 (12.1) と合わせて $\displaystyle\int_X g(x)\,d\mu = \lambda(E)$ を得る．

(エ) $\lambda(E) = 0$ のとき．命題 11.3(1)(2)(3)(4) を満たす E の等測包 E^*，$E_n \in \mathcal{L}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$I_n(i) \in \mathcal{I}$ $(i, n = 1, 2, \cdots)$ が存在する．とくに，(測度の単調性 と $\lambda(E^*) = 0$ より) $\lambda(E_1) < \infty$ を満たすと仮定してよい．E^* には (ウ) の議論が適用できるので，$g^*(x) := \nu\big((E^*)_x\big)$, $g_n^*(x) := \nu\big((E_n)_x\big)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと，$X_0^* := \{g_1^* = \infty\}$ は零集合であり，g^* は $X - X_0^*$ で可測な非負関数となる．さらに，

$$\int_X g^*(x)\,d\mu = \lambda(E^*) = \lambda(E) = 0$$

が成り立つ．よって $g^*(x) = \nu\big((E^*)_x\big)$ は X 上ほとんどいたるところで 0 である．そこで

$$X_1^* := \left\{x \in X - X_0^* \;\middle|\; g^*(x) > 0\right\}$$

とおくと，これも零集合であり，$x \in X - X_0^* \cup X_1^*$ のとき $\nu\big((E^*)_x\big) = 0$．ところで $E \subset E^*$ より $E_x \subset (E^*)_x$ だが，測度空間 $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ の完備性より E_x も $\nu\big(E_x\big) = 0$ を満たす．よって $X_0 := X_0^* \cup X_1^*$ とおくとき，これは零集合であり，$x \in X - X_0$ のとき

$$g(x) = \nu\big(E_x\big) = 0.$$

よって μ-a.e. x について $g(x)=0$ であり，

$$\int_X g(x)\,d\mu = 0 = \lambda(E).$$

（オ） 一般の場合．命題 11.3(1)(2)(3)(4) を満たす E の等測包 $E^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ で，$\lambda(E_1)<\infty$ を満たすものが存在する．$E' := E^* - E$ とおくと，$\lambda(E')=0$ である．よって（エ）より，ある $\mu(X_0')=0$ を満たす $X_0' \subset X$ が存在し，$x \in X - X_0'$ のとき $\nu\big((E')_x\big)=0$，とくに $(E')_x \in \mathcal{N}$ が成り立つ．

一方，等測包 E^* について，(ウ) よりある $\mu(X_0^*)=0$ を満たす $X_0^* \subset X$ が存在し，$x \in X - X_0^*$ のとき $(E^*)_x \in \mathcal{N}$ であり，

$$\int_X \nu\big((E^*)_x\big)\,d\mu = \lambda(E^*) = \lambda(E) \tag{12.2}$$

が成り立つ．よって $X_0 := X_0' \cup X_0^*$ とおくと，$\mu(X_0)=0$ かつ $x \in X - X_0$ のとき $E_x = (E^*)_x - (E')_x \in \mathcal{N}$ であり，(測度の可算加法性より) $\nu\big(E_x\big) = \nu\big((E^*)_x\big) - \nu\big((E')_x\big) = \nu\big((E^*)_x\big)$ が成り立つ．よって式 (12.2) より，

$$\int_X \nu\big(E_x\big)\,d\mu = \int_X \nu\big((E^*)_x\big) = \lambda(E). \qquad \blacksquare$$

12.2 フビニの定理

可測性と可積分性，零集合 関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathcal{M}$**-可測**もしくは単に**可測**であるとは，任意の実数 a に対し $\{f > a\} \in \mathcal{M}$ となることをいう．また，関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が μ**-可積分**もしくは単に**可積分**であるとは，$\mathcal{M}$-可測関数であり，$\displaystyle\int_X |f|\,d\mu < \infty$ となることをいう．(これは $\displaystyle\int_X f^+\,d\mu < \infty$ かつ $\displaystyle\int_X f^-\,d\mu < \infty$ と同値．)

$A \subset X$ が μ**-零集合**もしくは単に**零集合**であるとは，$A \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(A)=0$ が成り立つことをいう．測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ において，ある命題 $P(x)$ が μ-零集合 X_0 を除いた $x \in X - X_0$ において真であるとき，「μ-a.e. $x \in X$ に対し $P(x)$ が成り立つ」，もしくは単に「ほとんどすべての $x \in X$ に対し $P(x)$ が成り立つ」，という．

（完備性，再） $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする．これが**完備**であるとは，$A \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(A)=0$ であるとき，任意の $B \subset A$ に対し $B \in \mathcal{M}$（よって $\mu(B)=0$）が成り立つことをいう．標語的にいえば，「μ-零集合の部分集合はすべて $\mathcal{M}$-可測，とくに μ-零集合」．

例 1（完備でない測度空間） 自明な例だが，2 つ以上の元をもつ集合 X に対し $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$，$\mu(\emptyset)=0$, $\mu(X)=0$ とおくとき，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ は測度空間にはなるが完備ではない．

（フビニ (Fubini) の定理）　$(X, \mathcal{M}, \mu)$，$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ をともに完備な測度空間とし，$(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ をその直積測度空間とする．$X \times Y$ 上の λ-可積分関数に対し，次が成り立つ．

定理 12.2 (フビニの定理) 関数 $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ が λ-可積分のとき，以下が成り立つ．

(1) μ-a.e. $x \in X$ に対し Y 上の関数 $y \mapsto f(x,y)$ は ν-可積分であり，X 上の関数 $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu$ は μ-可積分．

(2) ν-a.e. $y \in Y$ に対し X 上の関数 $x \mapsto f(x,y)$ は μ-可積分であり，Y 上の関数 $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu$ は ν-可積分．

(3) $\displaystyle\int_{X \times Y} f(x,y)\,d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu \right) d\nu.$

ユークリッド空間の場合．　m と n を自然数とし，$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^{m+n}$ を同一視するとき，ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m, \mu_m)$ と $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ と直積測度空間は $(m+n)$ 次元ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{M}_{m+n}, \mu_{m+n})$ とみなせるのであった（命題 11.4）．したがって，フビニの定理より次が成り立つ：

定理 12.3 (ルベーグ測度に関するフビニの定理) 関数 $f : \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \mapsto f(x,y)$ が μ_{m+n}-可積分のとき，以下が成り立つ．

(1) μ_m-a.e. $x \in \mathbb{R}^m$ に対し $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $y \mapsto f(x,y)$ は μ_n-可積分であり，$\mathbb{R}^m$ 上の関数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\mu_n$ は μ_m-可積分．

(2) μ_n-a.e. $y \in \mathbb{R}^n$ に対し $\mathbb{R}^m$ 上の関数 $x \mapsto f(x,y)$ は μ_m-可積分であり，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\mu_m$ は μ_n-可積分．

(3) 次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\mu_{m+n} &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\mu_n \right) d\mu_m \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\mu_m \right) d\mu_n.\end{aligned}$$

12.3 演習問題

完備な測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$，$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ から定まる直積測度空間 $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ を考える．

□ **12.1** f が非負 λ-可積分関数のときフビニの定理が成り立つならば，一般の λ-可積分関数についてもフビニの定理が成り立つことを示せ．

□ **12.2** $X \times Y$ 上の非負可測関数列 f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は λ-可積分であり，$f_n \leq f_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ かつ極限 $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ をもつとする．このとき，f に対してフビニの定理の (3) が成り立つことを示せ．

□ **12.3** $X = Y = [0, 1] \subset \mathbb{R}$，$\mathcal{M} = \mathcal{N} = \{A \cap [0, 1] \mid A \in \mathcal{M}_1\}$ （ただし $\mathcal{M}_1$ はルベーグ可測集合全体)，$\mu = \nu$ は 1 次元ルベーグ測度を $[0, 1]$ に制限したものとする．いま，$(x, y) = (0, 0)$ のとき $f(x, y) := 0$，それ以外のとき

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

とおく．（このとき，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) = f(x, y)$ が成り立つ)．

(1) ほとんどすべての $x \in X$ に対して，Y 上の関数 $y \mapsto f(x, y)$ は $Y = [0, 1]$ 上リーマン可積分であることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu\right) d\mu \neq \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu\right) d\nu$ を示せ．

□ **12.4** 上の例でフビニの定理が成り立たない理由を述べよ．

□ **12.5** $h : X \times Y \to (0, \infty)$ を正値 λ-可積分関数とし，$\mathcal{M}$-可測関数 $f : X \to (0, \infty)$ と $\mathcal{N}$-可測関数 $g : Y \to (0, \infty)$ を用いて，

$$h(x, y) := f(x)\, g(y)$$

と表されるものとする．このとき，f と g はそれぞれ μ-可積分，ν-可積分であり，

$$\int_{X \times Y} h(x, y)\, d\lambda = \left(\int_X f(x)\, d\mu\right)\left(\int_Y g(y)\, d\nu\right)$$

が成り立つことを示せ．

第13章　フビニの定理 (2)

13.1　フビニの定理

$(X, \mathcal{M}, \mu)$，$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ をともに完備な測度空間とし，$(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ をその直積測度空間とする．$X \times Y$ 上の λ-可積分関数に対し，次が成り立つ．

定理 12.2（フビニの定理，再） 関数 $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ が λ-可積分のとき，以下が成り立つ．

(1) μ-a.e. $x \in X$ に対し Y 上の関数 $y \mapsto f(x, y)$ は ν-可積分であり，X 上の関数 $x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu$ は μ-可積分．

(2) ν-a.e. $y \in Y$ に対し X 上の関数 $x \mapsto f(x, y)$ は μ-可積分であり，Y 上の関数 $y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu$ は ν-可積分．

(3) $\displaystyle\int_{X \times Y} f(x, y)\, d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu \right) d\nu.$

注意！ (1) を正確に，冗長になることを恐れずに述べるならば，「ある $\mu(X_0) = 0$ を満たす集合 $X_0 \in \mathcal{M}$ が存在し，$x \in X - X_0$ に対し Y 上の関数 $y \mapsto f(x, y)$ は ν-可積分である．すなわち，$X - X_0$ 上の関数 $x \mapsto g(x) := \int_Y f(x, y)\, d\nu \in \mathbb{R}$ が定まる．さらに，$g(x)$ は $X - X_0$ 上 μ-可積分である．すなわち，

$$\int_{X - X_0} |g(x)|\, d\mu := \int_X |g(x)| \chi_{(X - X_0)}(x)\, d\mu < \infty.$$

一方，$x \in X_0$ に対して実数 $g(x)$ の値を自由に割りあてることにすれば（たとえば X_0 上 $g(x) = 0$ としてしまう），X_0 は零集合なので

$$\int_X |g(x)|\, d\mu = \int_{X - X_0} |g(x)|\, d\mu + \int_{X_0} |g(x)|\, d\mu = \int_{X - X_0} |g(x)|\, d\mu + 0 < \infty.$$

すなわち，$g(x)$ は（μ-零集合 X_0 での値の選び方によらず）X 上可積分である．

【証明】 $f = f^+ - f^-$ （ただし $f^+, f^- \geq 0$ は可積分）と分割できることから，積分の線形性より，$f \geq 0$ の場合を証明すれば十分である．

Step 1：f が有限測度集合の特性関数の場合　ある $\lambda(E) < \infty$ を満たす $E \in \mathcal{L}$ が存在し

$f = \chi_E$ と表される場合を考える．$x \in X$ に対し

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$$

とおき，

$$X_1 := \{x \in X \mid E_x \notin \mathcal{N}\}$$

とすれば，命題 12.1 より $\mu(X_1) = 0$ である．とくに，任意の $x \in X - X_1$ に対し $E_x \in \mathcal{N}$ であるから $X - X_1$ 上の関数

$$g(x) := \int_Y f(x, y)\, d\nu = \int_Y \chi_{E_x}(y)\, d\nu = \nu(E_x) \tag{13.1}$$

は非負可測関数である．さらに命題 12.1 より，$x \in X_1$ に対し $g(x)$ として任意に実数を割りあてるとき，

$$\int_X g(x)\, d\mu = \lambda(E) < \infty \tag{13.2}$$

が成り立つ．この式から，

$$X_2 := \{x \in X - X_1 \mid g(x) = \infty\}$$

とおくとき，$\mu(X_2) = 0$ となることがわかる．$X_0 := X_1 \cup X_2$ とおけば，$\mu(X_0) = 0$ であり，$x \in X - X_0$ に対し $g(x) < \infty$ より $y \mapsto f(x, y)$ は ν-可積分，式 (13.2) より

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu\right) d\mu = \lambda(E) = \int_{X \times Y} f(x, y)\, d\lambda$$

を得る．よって (1) と，(3) の左側の等式が得られた．(2) と (3) の右側の等式も全く同様にして得られる．以上で，f が有限測度集合の特性関数の場合にフビニの定理が成り立つことがわかった．

Step 2：f が可積分な単関数の場合　f は単関数であり，とくにある互いに素な $E_1, \cdots, E_N \in \mathcal{L}$ で $\lambda(E_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を満たすものが存在し，$f = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_N\chi_{E_N}$ （ただし $a_1, \cdots, a_N > 0$，重複があってもよい）と表されるものとする．このときフビニの定理が成り立つことを示そう．

まず，各 $i = 1, 2, \cdots, N$ に対し，特性関数 χ_{E_i} に Step 1 の議論が適用できる．Step 1 における X_0 にあたる集合を $X_0(i)$ と置くと，

$$X_0 := X_0(1) \cup \cdots \cup X_0(N) \subset X$$

は $\mu(X_0) = 0$ を満たし，$x \in X - X_0$ のとき $y \mapsto f(x, y) = a_1\chi_{E_1}(x, y) + \cdots + a_N\chi_{E_N}(x, y)$ は Y 上可積分である．すなわち，$x \in X - X_0$ のとき

$$g(x) := \int_Y f(x, y)\, d\nu = a_1 \int_Y \chi_{E_1}(x, y)\, d\nu + \cdots + a_N \int_Y \chi_{E_N}(x, y)\, d\nu < \infty.$$

さらに Step 1 より，X_0 上での $g(x)$ の値を自由に決めてあげれば，

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu\right) d\mu &= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_X \left(\int_Y \chi_{E_i}(x, y)\, d\nu\right) d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{X \times Y} \chi_{E_i}(x, y)\, d\lambda = \int_{X \times Y} f(x, y)\, d\lambda.\end{aligned}$$

よって (1) と，(3) の左側の等式が得られた．(2) と (3) の右側の等式も全く同様にして得られる．以上で $f \geq 0$ が可積分な単関数の場合にフビニの定理が確かめられた．

Step 3: f が一般の非負可積分関数の場合 f を Step 2 を満たす単関数で近似し，単調収束定理を繰り返し適用する．

まず，たとえば補題 7.2 や定理 8.1（単調収束定理）のときのように，$f \geq 0$ に対し非負単関数 $s_n : X \times Y \to [0, \infty)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f, \ \lim_{n\to\infty} s_n = f$$

を満たすものが存在する．このとき，単調収束定理より

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} s_n(x, y)\, d\lambda. \tag{13.3}$$

が成り立つ．

f の可積分性と優収束定理より，s_n は可積分である．とくに，Step 2 のような可積分な単関数だとわかる．実際，$s_n = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_N\chi_{E_N}$ （各 E_i は互いに素，$a_i > 0$）と表すことができるが，もしある i について $\lambda(E_i) = \infty$ であれば $\displaystyle\int_{X\times Y} s_n(x, y)\, d\lambda \geq a_i\lambda(E_i) = \infty$ となり，可積分性に反する．

各 s_n $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して Step 2 の議論を適用しよう．Step 2 の X_0 にあたる集合を $X_0(n)$ とおくと，$x \in X - X_0(n)$ に対し

$$g_n(x) := \int_Y s_n(x, y)\, d\nu < \infty$$

であり，さらに $g_n(x)$ の $X_0(n)$ での値を適当に割りあてることで

$$\int_X g_n(x)\, d\mu = \int_X \left(\int_Y s_n(x, y)\, d\nu\right) d\mu = \int_{X\times Y} s_n(x, y)\, d\lambda.$$

いま

$$X_1 := X_0(1) \cup X_0(2) \cup \cdots$$

とおくと，$X_1 \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(X_1) = 0$ である．$x \in X - X_1$ のとき，単調収束定理（定理 8.1）より

$$g(x) := \int_Y f(x, y)\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_Y s_n(x, y)\, d\nu = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

$g_n \leq g_{n+1}$，$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ よりふたたび単調収束定理（定理 8.1）が使えて，($g(x)$ の X_1 での値を適当に定めれば)

$$\int_X g(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y s_n(x, y)\, d\nu\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} s_n(x, y)\, d\lambda.$$

よって 式 (13.3) と合わせて

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu\right) d\mu = \int_{X\times Y} f(x, y)\, d\lambda.$$

が示された．また，$\displaystyle\int_X g(x)\,d\mu = \int_{X\times Y} f(x,y)\,d\lambda < \infty$ より $X_2 := \{g=\infty\}$ は $\mu(X_2)=0$ を満たす．よって $X_0 := X_1 \cup X_2$ とおくと，$\mu(X_0)=0$ かつ $x \in X - X_0$ のとき

$$g(x) = \int_Y f(x,y)\,d\nu < \infty.$$

すなわち，$g(x)$ は μ-a.e. で ν 可積分である．よって (1) と，(3) の左側の等式が得られた．(2) と (3) の右側の等式も全く同様にして得られる．以上でフビニの定理が示された． ■

σ 有限性とトネリの定理 非負可測関数に対するフビニの定理のバリエーション[*1]を紹介する．

測度空間 $(X,\mathcal{M},\mu)$ が **σ-有限** (σ-finite) であるとは，ある可測集合の列 $X_n \in \mathcal{M}$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在し，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ かつ $\mu(X_n)<\infty$ $(n=1,2,\cdots)$ を満たすことをいう．

例 1 測度空間 $(X,\mathcal{M},\mu)$，$(Y,\mathcal{N},\nu)$ がともに σ-有限であるとき，その直積測度空間 $(X\times Y,\mathcal{L},\lambda)$ も σ-有限である．実際，各 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$X_n \in \mathcal{M},\ X_n \subset X_{n+1},\ \mu(X_n)<\infty,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$
$$Y_n \in \mathcal{N},\ Y_n \subset Y_{n+1},\ \nu(Y_n)<\infty,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = Y$$

であれば，$E_n := X_n \times Y_n$ も測度 λ について同様の性質を満たす．

以下，$(X,\mathcal{M},\mu)$，$(Y,\mathcal{N},\nu)$ をともに完備かつ σ-有限な測度空間とし，$(X\times Y,\mathcal{L},\lambda)$ をその直積測度空間とする．$X\times Y$ 上の非負 λ-可測関数に対し，次の 2 つの定理が成り立つ：

定理 13.1 (トネリの定理) 非負 λ -可測関数 $f: X\times Y \to [0,\infty]$ に対し，以下が成り立つ．

(1) μ-a.e. $x\in X$ に対し Y 上の関数 $y\mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{N}$-可測であり，X 上の関数 $\displaystyle x\mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu$ は $\mathcal{M}$-可測．

(2) ν-a.e. $y\in Y$ に対し X 上の関数 $x\mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{M}$-可測であり，Y 上の関数 $\displaystyle y\mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu$ は $\mathcal{N}$-可測．

(3) $\displaystyle\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\lambda = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu\right)d\mu = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu\right)d\nu.$

[*1] 以下で述べる「トネリの定理」「フビニ・トネリの定理」はいずれも単に「フビニの定理」と呼ばれることがある．

ただし，(3) の等式は $\infty = \infty = \infty$ を許す．

【証明】 フビニの定理の Step 3 の議論を改変して証明する．

$f \geq 0$ は可測関数であるから，非負単関数 $s_n : X \times Y \to [0, \infty)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f, \ \lim_{n\to\infty} s_n = f$$

を満たすものが存在する．

いま，$(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ の σ-有限性より，

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \subset E_{n+1}, \quad \lambda(E_n) < \infty \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{L}$ が存在する．$t_n := s_n \chi_{E_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと，

$$t_n = s_n \chi_{E_n} \leq s_n \chi_{E_{n+1}} \leq s_{n+1} \chi_{E_{n+1}} = t_{n+1}$$

より $\{t_n\}_n$ は単調な関数列であり，任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対し $x \in E_n$ となる n をとれば，$m \geq n$ のとき $t_m(x, y) = s_m(x, y) \to f(x, y)$ $(m \to \infty)$ となることから，$\lim_{n\to\infty} t_n = f$ がいえる．よって単調収束定理より

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} t_n(x, y)\, d\lambda. \tag{13.4}$$

となる（これは $\infty = \infty$ も許す）．

ここで，各 t_n $(n = 1, 2, \cdots)$ はフビニの定理の証明の Step 2 のような，可積分な単関数であることを示そう．実際，$s_n = a_1 \chi_{A_1} + \cdots + a_N \chi_{A_N}$（ただし $a_i > 0$，$A_1, \cdots, A_N \in \mathcal{L}$ は互いに素）と表されるとき，$\chi(A_i \cap E_n) = \chi(A_i)\chi(E_n)$ より，$t_n = s_n \chi_{E_n} = a_1 \chi_{A_1 \cap E_n} + \cdots + a_N \chi_{A_N \cap E_n}$ は単関数．さらに $\lambda(A_i \cap E_n) \leq \lambda(E_n) < \infty$ であるから，Step 2 の条件を満たす．

よって，あとはフビニの定理の Step 3 と同様の議論ができる．■

トネリの定理より，（同じく σ-有限性の仮定のもとで）次が成り立つ：

定理 13.2 (フビニ・トネリの定理) 非負 λ -可測関数 $f : X \times Y \to [0, \infty]$ に対し，3 つの積分

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d\lambda, \quad \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu \right) d\mu, \quad \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu \right) d\nu$$

のいずれか 1 つが有限の値（すなわち，∞ ではない）をとるならば，f は λ-可積分であり，

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu \right) d\nu$$

が成り立つ．

13.2　演習問題

□ **13.1** 1 次元ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ は σ-有限であることを示せ．また，σ-有限でないような測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ の例を構成せよ．

以下，$(X, \mathcal{M}, \mu)$，$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ をともに完備かつ σ-有限な測度空間とし，$(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ をその直積測度空間とする．

□ **13.2 (S)** 定理 13.2（フビニ・トネリの定理）を $\displaystyle\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu \right) d\mu < \infty$ のときに示せ．（Hint. 与えられた f に単調に収束する単関数列をとり，それぞれの単関数にトネリの定理を適用し，極限をとる．

□ **13.3** μ-可積分関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ と ν-可積分関数 $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ を用いて，$h : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ を

$$h(x,y) := f(x)\, g(y)$$

と定義するとき，これは λ-可積分であり，

$$\int_{X \times Y} h(x,y)\, d\lambda = \left(\int_X f(x)\, d\mu \right) \left(\int_Y g(y)\, d\nu \right)$$

が成り立つことを示せ．（Hint. h の可測性を示し，トネリの定理を $|h|$ に適用する．）

□ **13.4** $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = 2^{\mathbb{N}}$ とし，$\mu = \nu$ を「数え上げ測度」とする．すなわち，$\mu(A) := [A$ の元の個数（濃度）$] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とする．このとき，直積測度空間 $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ に対しトネリの定理を適用することで，非負二重数列 $a(m,n) = a_{m,n}$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$ が

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$$

を満たすことを示せ．

□ **13.5** $0 \leq a < b$，$0 < \alpha < 1$ のとき，

$$\int_{(0,\infty)} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^{\alpha+1}}\, d\mu = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} (b^\alpha - a^\alpha)$$

を示せ．（Hint. $(x,y) \mapsto e^{-xy} x^{-\alpha}$ にフビニ-トネリを適用する．また，$y > 0$ のとき $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy} x^{-\alpha}\, dx = \Gamma(1-\alpha) y^{\alpha-1}$ であることを用いてもよい．）

□ **13.6** 上の結果を用いて，$0 < a < b$ のとき，

$$\int_{(0,\infty)} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, d\mu = \log \frac{b}{a}$$

を示せ．

付録A　加法的集合関数とラドン・ニコディムの定理

以下，証明は省略して概説のみとする．

A.1　加法的集合関数（符合つき測度）

測度の定義を思い出しておこう．集合 X とその上の σ 加法族 $\mathcal{M}$ が与えられているとき，写像 $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が測度であるとは，

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ が互いに素であるとき，

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つことをいうのであった．この概念を一般化しよう．

$\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty) = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ もしくは $\nu : \mathcal{M} \to (-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が**加法的集合関数** (additive set function) もしくは**符合つき測度** (signed measure) であるとは，

(A1) $\nu(\emptyset) = 0$.

(A2) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ が互いに素であるとき，

$$\nu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

を満たすことをいう．測度は非負加法的集合関数である．

注意！ $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)\right| < \infty$ であれば，$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| < \infty$ （すなわち，級数として絶対収束）することがわかる（→演習問題）．

例 1　$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$f : X \to [-\infty, \infty]$ を μ-可積分関数とする．このとき，$A \in \mathcal{M}$ に対し

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu = \int_X f\chi_A\, d\mu$$

とおくとき，これは加法的集合関数を定める．

A.2　ハーン分解とジョルダン分解

いま $(X,\mathcal{M})$ を可測空間（すなわち，集合 X とその上の σ 加法族 $\mathcal{M}$ のペア）とし，$\nu:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ を（実数値であり，$\pm\infty$ に値をとらない）加法的集合関数とする．

定義． $A\subset X$ が ν の**正集合** (positive set) であるとは任意の $B\subset A$ を満たす $B\in\mathcal{M}$ に対し，$\nu(B)\geq 0$ となることをいう．同様に $A\subset X$ が ν の**負集合** (negative set) であるとは任意の $B\subset A$ を満たす $B\in\mathcal{M}$ に対し，$\nu(B)\leq 0$ となることをいう．

例 2　$\emptyset$ は正集合かつ負集合である．

定理 A.1 (ハーン分解) 正集合 A と負集合 B のペアで，$X=A\sqcup B$ を満たすものが存在する．

$X=A\sqcup B$ と表すとき，これを ν に関する**ハーン分解** (Hahn decomposition) という．

このとき，空集合のように $\nu(C)=0$ となる集合があるとき，$(A\cup C)\sqcup(B-C)$ もハーン分解を与える．その意味で，ハーン分解は一般に一意的とは言えない．しかし，次が成り立つ：

定理 A.2 (ハーン分解の性質) ν に関するふたつのハーン分解 $X=A\sqcup B=A'\sqcup B'$（ただし A，A' が正集合，B,B' が負集合とする）が存在するとき，任意の $E\in\mathcal{M}$ に対し，

$$\nu(E\cap A)=\nu(E\cap A')\quad\text{かつ}\quad\nu(E\cap B)=\nu(E\cap B').$$

【証明】 $E\cap(A-A')\subset A$ より $\nu(E\cap(A-A'))\geq 0$．一方，$E\cap(A-A')=E\cap A\cap(A')^c\subset(A')^c=B'$ でもあるから，$\nu(E\cap(A-A'))\leq 0$．よって $\nu(E\cap(A-A'))=0$．

$$\nu(E\cap(A\cup A'))=\nu\big(E\cap((A-A')\sqcup A')\big)=\nu(E\cap(A-A'))+\nu(E\cap A')=\nu(E\cap A').$$

以上の議論で A と A' を入れ替えれば，$\nu(E\cap(A\cup A'))=\nu(E\cap A)$ を得るから，$\nu(E\cap A)=\nu(E\cap A')$．$B$ についても同様である．■

ジョルダン分解の構成　いま，加法的集合関数 $\nu:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ に対しハーン分解 $X=A\sqcup B$ が少なくともひとつ定まるから，$E\in\mathcal{M}$ に対し

$$\nu^+(E):=\nu(E\cap A),\qquad\nu^-(E):=-\nu(E\cap B)$$

と定める．$\nu^+,\nu^-:\mathcal{M}\to[0,\infty)$ は非負加法的集合関数，すなわち測度であることがわ

かる（各自確認せよ）．さらに，ハーン分解の性質（定理 A.2）より，これらの測度はハーン分解 $X = A \sqcup B$ の取り方によらない．

よって，次の定理を得る：

定理 A.3 (ジョルダン分解) 加法的集合関数 $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ に対しふたつの測度 $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ が存在し，

$$\nu = \nu^+ - \nu^-$$

と表される．すなわち，任意の $E \in \mathcal{M}$ に対し，$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E)$.

$\nu = \nu^+ - \nu^-$ となる測度 $\nu^+, \nu^- : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ のペア（もしくは，それによる $\nu = \nu^+ - \nu^-$ という表示）を ν の**ジョルダン分解** (Jordan decomposition) という．

σ-有限性　与えられた加法的集合関数 $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ に対し，ジョルダン分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ を用いて

$$|\nu| := \nu^+ + \nu^-$$

と定義する．これは $\mathcal{M}$ 上の測度であり，ν の **全変動** (total variation) という．ν が測度であるときは，$|\nu| = \nu$ である．

加法的集合関数 $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ が**有限**であるとは，$\nu(X) < \infty$ を満たすことをいう．また，$\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ が **σ-有限** であるとは，測度空間 $(X, \mathcal{M}, |\nu|)$ が σ-有限となることをいう．

A.3　絶対連続性とラドン・ニコディムの定理

絶対連続性　加法的集合関数 $\mu, \nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ が与えられているとき，ν が μ に対し**絶対連続** (absolutely continuous) であるとは，任意の $A \in \mathcal{M}$ に対し，$|\mu|(A) = 0$ であれば $|\nu|(A) = 0$ が成り立つことをいい，これを $\nu \ll \mu$ もしくは $\mu \gg \nu$ と表す．

例 3　測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の μ-可積分関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し，加法的集合関数 $\nu_f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ を

$$\nu_f(A) := \int_A f \, d\mu \quad (A \in \mathcal{M})$$

と定めるとき，$\nu_f \ll \mu$ が成り立つ．

一般には，σ-有限性のもとで次が成り立つ：

定理 A.4 (ラドン・ニコディム (Radon-Nikodym) の定理) σ-有限な測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の加法的集合関数 $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ に対し，$\nu \ll \mu$ が成り立つならば，ある $\mathcal{M}$-可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在し，任意の $A \in \mathcal{M}$ に対し

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

が成り立つ．この f は，μ-零集合での値の違いを除いて一意的に定まる．

このような（μ-a.e. で定まる）関数 f を**ラドン・ニコディム導関数** (Radon-Nikodym derivative) といい，$f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ と表す．

特異性とルベーグ分解　加法的集合関数 $\mu, \nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ が与えられているとき，ν が μ に対し**特異** (singular) であるとは，ある $A \in \mathcal{M}$ が存在し，$|\mu|(A) = 0$ かつ $|\nu|(A^c) = 0$ が成り立つことをいい，これを $\nu \perp \mu$ もしくは $\mu \perp \nu$ と表す．

例 4　加法的集合関数 $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ の Jordan 分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ は $\nu^+ \perp \nu^-$ を満たす．実際，$X = A \sqcup B = A \sqcup A^c$ を ν に関するハーン分解で A が正集合であるとき，$\nu^+(A^c) = 0$ かつ $\nu^-(A) = 0$ が成り立つ．

定理 A.5 (ルベーグ分解) σ-有限な測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の加法的集合関数 $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ に対し，以下を 2 条件を満たす加法的集合関数 $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ の組が一意的に定まる：

(1) $\nu_1 \ll \mu$ かつ $\nu_2 \perp \mu$.

(2) $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

A.4 演習問題

以下，$(X, \mathcal{M})$ を可測空間（集合 X と σ-加法族 $\mathcal{M}$ のペア）とする．また，$\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty)$ または $\nu : \mathcal{M} \to (-\infty, \infty]$ を加法的集合関数とする．

□ **A.1** $A, B \in \mathcal{M}$ が $B \subset A$, $|\nu(A)| < \infty$ を満たすならば，$|\nu(B)| < \infty$ を示せ．（Hint：$\nu(A) = \nu(B) + \nu(A - B)$ を用いる．）

……………………………………………………………………………

命題． $A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{M}$ が互いに素であり，$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)\right| = \left|\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right| < \infty$ であるとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ は絶対収束する．

□ **A.2** 命題の仮定のもと，$\nu(A_n) \geq 0$ のとき $A_n^+ = A_n$, $A_n^- = \emptyset$，$\nu(A_n) < 0$ のとき $A_n^- = A_n$, $A_n^+ = \emptyset$ と定める．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n^+) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+\right) \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n^-) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^-\right)$$

を示せ．また，いずれか一方は収束することを示せ．

□ **A.3** 命題の仮定のもと，以下を示せ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n^+)$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n^-)$ のいずれか一方が収束すれば，もう一方も収束する．（結果的にこれらは同時に収束することがわかる．）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)|$ は収束する．

……………………………………………………………………………

□ **A.4** $\mu, \nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ が σ-有限であるとき，$\lambda = \mu + \nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ も σ-有限であることを示せ．

□ **A.5** ν の正集合からなる列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ に対し，$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も正集合であり，$\nu(A_n) \leq \nu(A)$ となることを示せ．

□ **A.6** μ を $(X, \mathcal{M})$ 上の測度とする．$\nu \ll \mu$ かつ $\nu \perp \mu$ であれば，すべての $E \in \mathcal{M}$ に対し $\nu(E) = 0$ であることを示せ．

以下，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ **を** σ**-有限な測度空間とする．**

□ **A.7** ラドン・ニコディムの定理において f が μ-零集合での値の差を除いて一意であることを示せ．

□ **A.8** ルベーグ分解 $\nu = \nu_1 + \nu_2$，$\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \perp \mu$ の一意性を示せ．