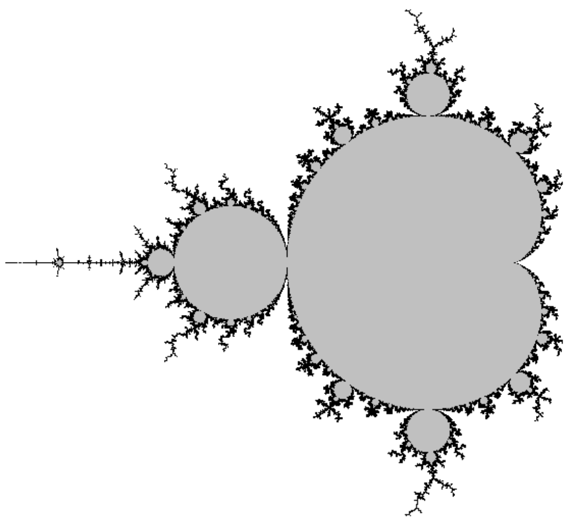
マンデルブロー集合

——2次関数の複素力学系入門——



川平　友規

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

Email: kawahiraAmath.nagoya-u.ac.jp (A=@)

平成 24 年 12 月 22 日

はじめに

EUPHRANOR.— Tell me, Alciphron, can you discern the doors, windows, and battlements of that same castle ?
ALCIPHRON.— I cannot. At this distance it seems only a small round tower.
EUPHRANOR.— But I, who have been at it, know that it is no small round tower, but a large square building, with battlements and turrets, which it seems you do not see.
ALCIPHRON.— What will you infer from thence ?
EUPHRANOR.— I would infer, that the very object, which you strictly and properly perceive by sight, is not that thing which is several miles distant.
ALCIPHRON.— Why so ?
EUPHRANOR.— Because a little round object is one thing, and a great square object is another. Is it not ?
— G.Berkeley "Alciphron — or the Minute Philosopher" (the 4th dialogue, §9 より)

このノートについて

1. このノートは複素数と数列の扱いにある程度習熟した人を読者に想定しつつ，マンデルブロー集合とそのバックグラウンドである複素力学系理論の平易な解説をめざします.

2. 必要な複素関数論に関する知識はできるだけ解説しますが，はなしの流れを妨げない程度に抑えます．必要に応じて他の教科書を参照していただくことになるでしょう.

3. 大学 1，2 年程度の微積分，とくに ϵ-δ 論法について知っていれば，読みやすくなると思われます．平面集合（開・閉集合，境界，集積点，コンパクト性）を扱う部分も多いですが，読み進めるうちに慣れていけばよいと思います.

4. 章が進むごとに，数学独特の言い回しなどが増え，記述が専門的になっていきます．計算や議論の省略度合いも少しずつ大きくしていきます.

改訂履歴

- 11/11/20(日) 17:57:17 段落前の数字を削除し，普通の本の体裁に近づけた.

- 11/09/30(金) 11:54:58 fancyhdr.sty と framed.sty を使って全体的なデザインを変えた.
- 10/02/06(土) 19:14:32 クラスファイルを jreport にした.（jbook だと無駄な空白ページが入る.）

目 次

第1章　漸化式から力学系へ

マンデルブロー集合は人間の心の発明ではない．それは発見である．エヴェレスト山と同じように，マンデルブロー集合はただ「そこに」存在する．

— R. ペンローズ（『皇帝の新しい心』林 一 訳）

1.1　マンデルブロー集合

ある漸化式から． 複素数 c をひとつ選んで，次のような漸化式 (C) で定まる数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$（とくに断らない限り，複素数列）を考えてみる：

$$C_0 = 0; \quad C_{n+1} = C_n^2 + c \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{C}$$

すなわち，

$$0,\ c,\ c^2+c,\ (c^2+c)^2+c,\ \left((c^2+c)^2+c\right)^2+c,\ \ldots$$

であたえられる数列である．この数列は c の値に依存するので，関数の形で各項を $C_n(c)$ のように表現することにしよう．あらためて書きなおすと，次のようになる：

$$\begin{aligned}
C_0(c) &= 0\\
C_1(c) &= c\\
C_2(c) &= c^2+c\\
C_3(c) &= (c^2+c)^2+c \;=\; c^4+2c^3+c^2+c\\
C_4(c) &= ((c^2+c)^2+c)^2+c \;=\; c^8+4c^7+6c^6+6c^5+5c^4+2c^3+c^2+c\\
&\cdots
\end{aligned}$$

さて，数列 $\{C_n(c)\}_{n\geq 0}$ が複素平面 $\mathbb{C}$ 上でどのように動き回るかを考えてみよう．たとえば $c=0$ のとき，すべての n で $C_n(0)=0$ が成り立つ．すなわち，数列 $\{C_n(0)\}_{n\geq 0}$ は

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots$$

となり，原点からまったく動かない．

次に，$c=1$ としてみよう．数列 $\{C_n(1)\}_{n\geq 0}$ は

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 26,\ 677,\ 458330,\ 210066388901,\ \ldots$$

となり，実軸上をすごい勢いで右に向かっていく．どうやら正の無限大に発散しているようである．

今度は複素数をとって，$c = i$ （虚数単位）としてみよう．すると，$\{C_n(i)\}_{n\geq 0}$ は

$$0,\ i,\ -1+i,\ -i,\ -1+i,\ -i,\ \ldots$$

となり，一旦 0 から i に飛んだあと，$-1+i$ と $-i$ を交互に移動する．このように，同じ形の漸化式から生成しても，得られる数列の振る舞いはいろいろである．もちろん，各 n で $C_n(c)$ は c の多項式であるから，それぞれの項は c の変化に応じて連続的に変化しているはずである．しかし，数列全体の変化となると，予測は難しい．

ここで，数列に複雑な（＝面白い）振る舞いを期待するために，上でいうと $c = 1$ のような，絶対値が無限大に発散する数列をあたえるものは除外してみよう．すなわち，c の集合

$$\{c \in \mathbb{C} : |C_n(c)| \to \infty\ (n \to \infty)\}$$

を H_∞ で表し，それを複素平面から除いたもの

$$\mathbb{M}\ :=\ \mathbb{C} - H_\infty$$

を考える．これが**マンデルブロー集合** (the Mandelbrot set) と呼ばれる集合である．

マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ の定義はいたって単純だが，これを複素平面上に描いてみると，意外なほど複雑な形をしている．簡単な漸化式の計算でも，回数が増えると人力では手に負えないから，コンピュータでプログラムを組み描かせてみよう.（描き方については，あとで理論的側面から詳しく述べる.）たとえば，図 1.1 のようになる．灰色の部分が $\mathbb{M}$ の内部，黒い部分は $\mathbb{M}$ と H_∞ の境界点で，これも $\mathbb{M}$ に含まれている．

$\mathbb{M}$ の形に，なにか規則性を見出せるだろうか？たしかに，何か規則性を感じさせる要素はある．その一方で，規則性をうけつけないような，乱雑な印象もある．はたして，$C_{n+1} = C_n^2 + c$ のというルールの何がどう働いて，このような形が作り出されるのか？[1]

図 1.2 はマンデルブロー集合の一部を次々に拡大していった図である．$C_n(c)$ のような極めて単純なルールで生成される数列が，かくも複雑な図形を生み出すのである．しかもその複雑さには，際限がないようにもみえる.（実際，$\mathbb{M}$ 自身のコピーが繰り返し現れる.）いやむしろ，細部に迫るほど，複雑さは増しているのではないだろうか？

物理学は物質の本性を探るうちに，分子，原子からクォークにまで至った．そこには，物質には最小単位があるだろうという人間の素朴な期待がある．マンデルブロー集合は，われわれのそうした期待に強烈なアンチテーゼをあたえている．マンデルブロー集合を分解していっても，決して終わりは来ないのである．

[1] しかし，コンピューターによる絵をそのまま信じてはいけない.「うちの 4 歳になる息子に描かせたんです」程度に考えておくのがちょうどよい．あとで説明するように，完全に正確な絵を描くことは，原理的に不可能だからである．ともあれ，ここでは理論的な限界には目をつぶって，コンピューターというシステムが描く絵画を純粋に楽しんでみよう．

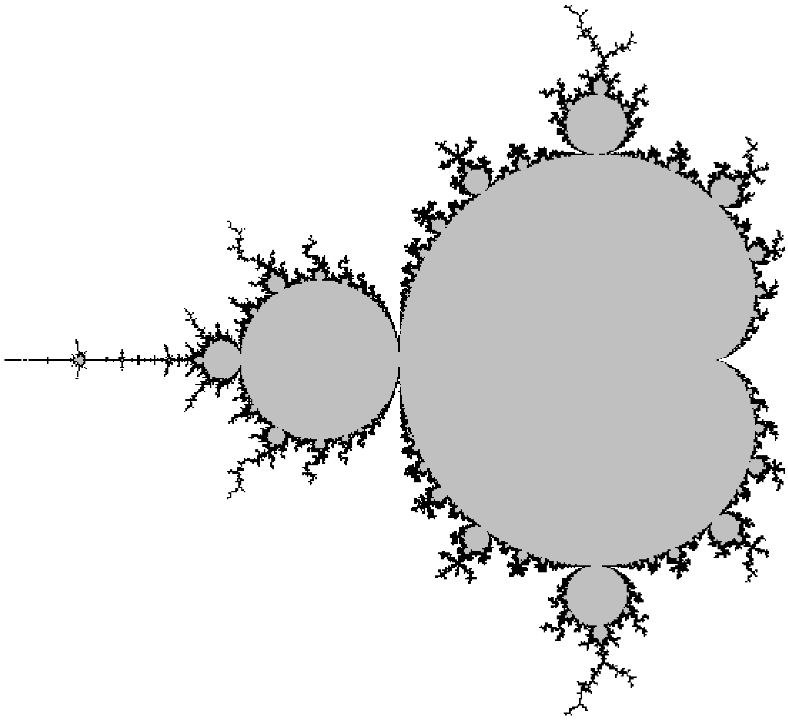


図 1.1: マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$.

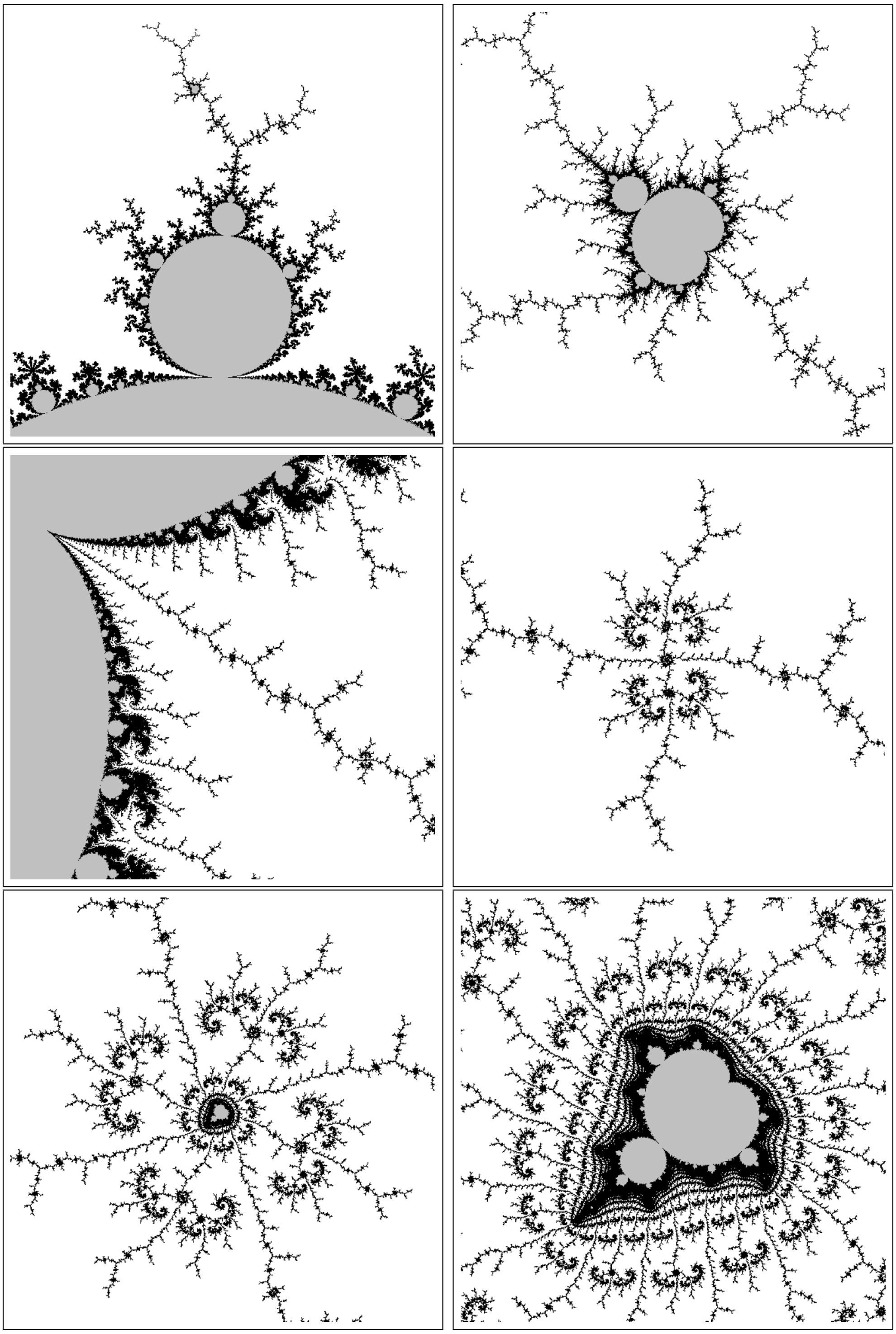


図 1.2: 𝕄 を拡大していった図．左上から右下へ進む．それぞれどの部分が拡大されているか，わかるだろうか？

1980 年ごろ，B. マンデルブロー（Benois Mandelbrot）がはじめて $\mathbb{M}$ の詳細な絵を世に問うた．以来，この集合に引き寄せられた数学者は数知れない．[2] ある者はそこに留まり，ある者はただ通り過ぎていったけども．

$\mathbb{M}$ が引き寄せたのは，数学者だけではない．アーティスト，コンピュータマニア．なんとなく，新しいもの好きの人々．そして $\mathbb{M}$ は，フラクタルアートにおけるアイコンとなった．

しかし 21 世紀となった今，$\mathbb{M}$ は昔ほど多くの数学者を引き付けなくなったように感じられる．集合としての $\mathbb{M}$ は，何も変わってない．冒頭のペンローズの言葉を借りれば，$\mathbb{M}$ はただ「そこに」存在し続けている．それを取り巻く数学的環境が，すっかり変わってしまったのである．

むかし，$\mathbb{M}$ は穏やかな海に浮かぶ未開の島のようなものであった．深い霧で覆われてはいたが，船で簡単に上陸できたから，数学者は $\mathbb{M}$ を記述するための言葉を少しずつ整備した．その発見からほぼ 30 年が過ぎた現在．関連するたくさんの定理が生まれ，$\mathbb{M}$ を覆う霧はほとんど晴れ渡った．しかし，新しい数学的知識は $\mathbb{M}$ の回りを歩きづらい砂地のごとく取り囲む．そして，これ見よがしに散らばる，非凡なる数学者たちの足跡．平凡かつ健全な数学者は，このような場所を嫌うのである．

このノートは，初学者が少しでも早く $\mathbb{M}$ に到達できるよう，その砂地をならす試みである．ただマンデルブロー集合やフラクタルに興味があるという人も，数学者の通る道を雰囲気だけ味わえるかもしれない．眺めるだけでも，けっこう面白い集合である．多くはもとめず，ノートを読み終えたあと，$\mathbb{M}$ について何かわかったような気になれることを目指そう．

1.2 マンデルブロー集合を描く

ここではまず，マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ をコンピューターに描かせるアルゴリズムを紹介し，できる範囲でアルゴリズムの理論的正当化をしておく．われわれが見ている $\mathbb{M}$ の絵が一体何なのかを，その信頼性も含めてはっきりさせたいからである．書店や図書室でプログラミングやコンピューター・グラフィクスの入門書をいくつかめくってみれば，すぐにマンデルブロー集合を描くプログラムがみつかるだろう．具体的なプログラムについては，そのような文献を参照していただきたい．

1.2.1 描画アルゴリズム

マンデルブロー集合を描くもっとも標準的なアルゴリズムを紹介しよう．まず準備段階として，以下のように複素平面とコンピュータの画面上の点を対応付ける：

1. 複素数 $c = a + bi$ を平面上の点 (a, b) と同一視する．

[2] すでに多くの文献で指摘されているが，コンピュータを用いて初めて $\mathbb{M}$ （の内部に相当するであろう部分）を描いたのはブルックス（Brooks）とマテルスキー (Matelski) であり，その絵は 1981 年には出版されている．しかし彼らの絵は不明瞭で，その微細な構造まではあきらかにならなかった．

2. マンデルブロー集合は $-2 \le a, b \le 2$ の範囲[3] に含まれる（命題 1.1 参照）ので，対応するコンピュータの描画領域を指定する．たとえば縦 N ピクセル，横 N ピクセルの正方形領域を $-2 \le a, b \le 2$ の範囲と考える．(N が大きいほどきめ細かい絵が描けるが，計算時間は増大する．)

3. 正方形の左上端のピクセルを $[0,0]$-ピクセルと呼び，そこから右に P ピクセル，下に Q ピクセル進んで得られる点を $[P,Q]$-ピクセルとよぼう．定義より $0 \le P,\ Q \le N-1$ であり，$[P,Q]$-ピクセルは不等式

$$\begin{aligned} -2+\frac{4}{N}\cdot P \ &\le\ a\ \le\ -2+\frac{4}{N}\cdot(P+1) \\ 2-\frac{4}{N}\cdot Q \ &\le\ b\ \le\ 2-\frac{4}{N}\cdot(Q+1) \end{aligned}$$

で定まる複素数の領域に対応する．

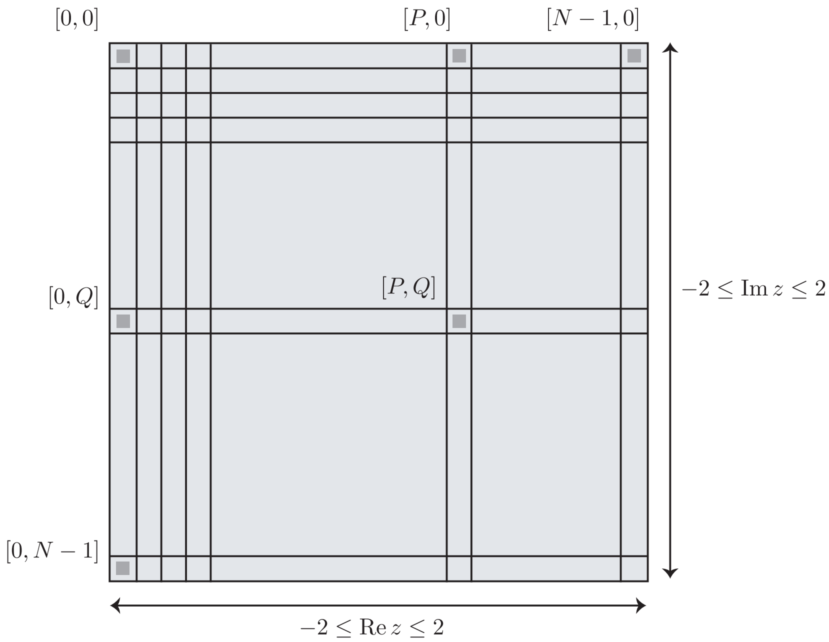


図 1.3: 画面上のピクセルと複素平面上の正方形の対応

この設定のもと，$[P,Q]$-ピクセル内にマンデルブロー集合の点が含まれていれば，そのピクセルを黒く塗る，というアルゴリズムをマンデルブロー集合の定義に基づいて考えてみよう．

ここで,「無限」にまつわる困難が少なくともふたつ生じる．ひとつめの困難は，各 $[P,Q]$-ピクセル内のすべての複素数（無限個存在する！）について数列 $C_n(c)$ を計算することは不可能，ということである．妥協案として，ピクセルの代表点として左上

[3] これは $a, b \in [-2,2]$ を意味する慣用的な書き方である．$-2 \le a$ かつ $b \le 2$ という意味ではない．

端の点

$$c = c[P,Q] := \left(-2 + \frac{4}{N}\cdot P\right) + \left(2 - \frac{4}{N}\cdot Q\right)i$$

の数列 $C_n(c)$ を計算し，c がマンデルブロー集合に入っていると判定されればピクセル $[P,Q]$-ピクセルは黒く塗ることにする．

ふたつめの困難は，c がマンデルブロー集合に入っていると判定する基準である．数列 $|C_n(c)|$ が無限大に発散しなければ，c はマンデルブロー集合上の点である．これは定義であり明解な判定基準だが，数列を実際に無限に計算して，$C_n(c)$ の行く末を見届けることはできない.（無限に時間がかかってしまう.）すなわちアルゴリズムとしては，数列 $C_n(c)$ の計算を有限回で停止させ，発散するかどうか決断しなければならない．ここでの妥協案は，次のようにする：数列 $C_n(c)$ を漸化式 (C) に従い $n=0$ から順に計算して，その絶対値がある一定値 R （たとえば 1000 など）を越えた時点でこの数列は発散する，とみなす.（じつは $R=2$ で十分である．このあとすぐ，理論的正当化をしておく.）また，漸化式の計算回数には上限 L をもうけ（たとえば 100 など），$C_1(c)$ から $C_L(c)$ まで計算していずれも絶対値が R を越えなかった場合は c はマンデルブロー集合上の点だとみなすことにする．

以上をまとめると，次のようなアルゴリズムになる：

マンデルブロー集合を描く標準的アルゴリズム

(i) P,Q がそれぞれ 0 から $N-1$ まで動くようループを作成.

(ii) ループの各ステップ内に，さらに $c=c[P,Q]$ の数列 $C_0(c), C_1(c), C_2(c), \ldots, C_L(c)$ を漸化式に従って計算するループを作成.

(iii) 各 $k=0,1,2,\ldots,L$ にたいし絶対値 $|C_k(c)|$ を計算し，もし $|C_k(c)|>R$ となる k が見つかればその点はマンデルブロー集合の点でない，と判定．数列の計算はストップさせる．この場合 $[P,Q]$-ピクセル全体がマンデルブロー集合に属さないとみなし，$[P,Q]$-ピクセルは色を塗らない.（もしくは k に応じた色を塗る．[4]）

(iv) $k=L$ に到達したらその点はマンデルブロー集合の点に入っている（もしくは $[P,Q]$-ピクセルはマンデルブロー集合の点に近い）とみなし，黒く塗る.

以上がアルゴリズムの概要である.

では実際に，このアルゴリズムにしたがって描画した $\mathbb{M}$ をみてみよう．図 1.4 は，$N=200$，$L=20$ および $N=400$，$L=500$ として得られる画像である.（ともに $R=2$.）描画時間としては，$N^2\cdot L$ に比例する時間を覚悟しなければならないが，例のような数値であれば最近のパソコンだとあっという間である．ちなみにこの例では，ステップ (iii) においてマンデルブロー集合上にないと判定された $[P,Q]$-ピクセルに，$|C_k(c)|>R$ となった k に応じて濃さの違うグレーで塗られている．ここでの彩色をコントロールすることで，巷にあふれる「美しい」（もしくはサイケデリックな）マン

デルブロー集合の絵が得られる．[5]

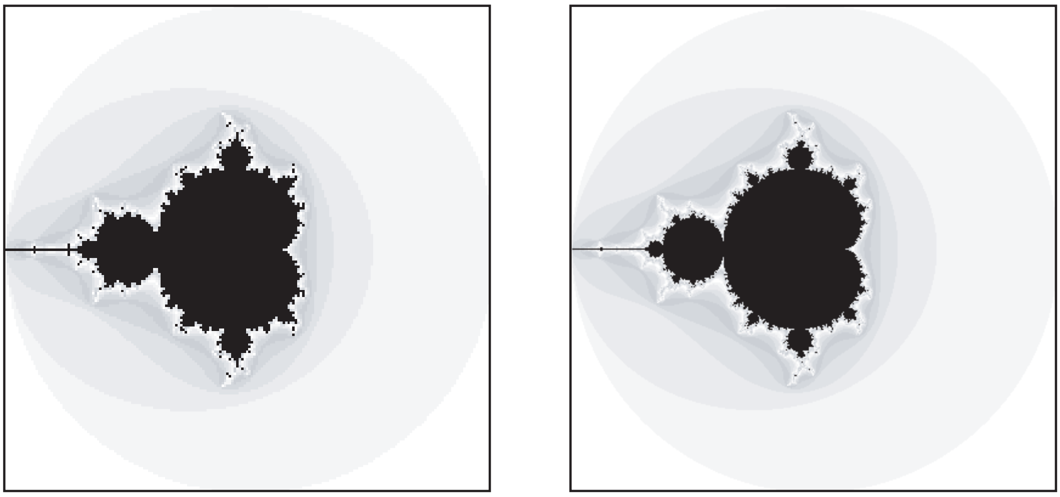


図 1.4: マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ の描画例．精度が上がっていることがわかるように，同サイズになるよう調整してある．

しかしアルゴリズムをみればわかるように，重要なファクターである計算誤差[6]を考慮しないとしても，

- われわれは $\mathbb{M}$ をピクセル単位でしか把握できない
- 有限回の計算で $\mathbb{M}$ の点かどうか判定しなければならない

という意味で,「正確な絵」を描くことはむずかしい．あとでみるように，われわれが黒く塗りつぶした１ピクセルには，恐ろしく複雑な形状が隠されているのだから．[7]

1.2.2 アルゴリズムの正当化

さてアルゴリズムのステップ (iii) の中で,「もし $|C_k(c)| > R$ であればその点はマンデルブロー集合の点でないと判定」したが，これで本当に発散する数列を判定できるのだろうか？また，どのくらい大きく R をとれば本当に発散する数列とみなせるのだろうか？

その答が，次の命題である．意外にも，$R = 2$ という小さな値で発散が判定できる：

[5]したがって，実際にどの色を使うかは数学的な意味がない．マンデルブロー集合の何が「美しい」のか，考えてみるのは面白い問題である．

[6]コンピューターは実数全体を浮動小数点数とよばれる有限個の有理数により近似する．この近似によって生じる計算上の誤差は「丸め誤差」と呼ばれる．計算量が増えると丸め誤差も蓄積され，ときには無視できないほどになる．

[7]付録では，もう少し信頼性の高い絵を描く方法として，DEM と呼ばれるアルゴリズムを紹介する．(図 1.1 はこの方法で描画したものである.）$\mathbb{M}$ を描く際の論理的限界については，次の文献が平易でわかりやすい：John Ewing. Can We See the Mandelbrot Set? *The College Mathematics Journal*, **26**(1995), no. 2, pp. 90-99.

命題 1.1 ある $c \in \mathbb{C}$ にたいし，$|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k があれば数列 $C_n(c)$ の絶対値は無限大に発散する．すなわち，c はマンデルブロー集合上にはない．逆に，c がマンデルブロー集合上になければ，$|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k がかならず存在する．

$\mathbb{M}$ はどこにあるのか？ 命題 1.1 を証明する前に，先ほどあたえた描画アルゴリズムで，$|\mathrm{Re}\, c| \leq 2$ かつ $|\mathrm{Im}\, c| \leq 2$ となる正方形を $\mathbb{M}$ の描画域として選んだことを正当化しておこう．図ではこの描画域に収まっているようにみえるが，左端はギリギリで心許ないし，この領域外の遠いどこかで，$\mathbb{M}$ の一部が島のよう点在している可能性は否定できないからである．しかし，命題 1.1 から次のことがわかる：

系 1.2 マンデルブロー集合は絶対値 2 以下の範囲に含まれる．すなわち，

$$\mathbb{M} \ \subset \ \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}.$$

ちなみに「2 以下」の「2」という数字は，これ以上小さくはできない．実際，$c = -2$ とすると数列 $C_n(-2)$ は

$$0, \ -2, \ 2, \ 2, \ 2, \ \ldots$$

となり，$|C_n(-2)| \to \infty$ とはならない．すなわち，$-2 \in \mathbb{M}$ であるから，半径が 2 よりも小さい原点中心の円板は $\mathbb{M}$ 全体を含むことができない．この意味で，$R = 2$ は最良の値だといえる．

では命題 1.1 を証明しよう．その前に，解析学でもっとも基本的かつもっとも重要な**三角不等式** (triangule inequality) を確認しておこう．とにかく，この不等式を知らないと何も始まらないのである：

三角不等式． 任意の複素数 z と w にたいし，常に

$$|z| - |w| \ \leq \ |z + w| \ \leq \ |z| + |w|$$

が成立する．[8]

図 1.5 をぢっと眺めれば，その意味が読めてくる．証明はよい練習問題である．(実部と虚部の関係式に直すことで，シュワルツの不等式に帰着される．)

証明（命題 1.1） まず，前半の主張を証明する．$|C_k(c)| > 2$ となるような k にたいし，ある $\mu_k > 1$ が存在して

$$|C_{k+1}(c)| \ \geq \ \mu_k |C_k(c)| \tag{1}$$

が成り立つことをしめそう．数列 $\{C_n(c)\}_{n\geq 0}$ がみたす漸化式 (C) に三角不等式の左側を適用して，

$$|C_{k+1}(c)| \ = \ |C_k(c)^2 + c| \ \geq \ |C_k(c)|^2 - |c|$$

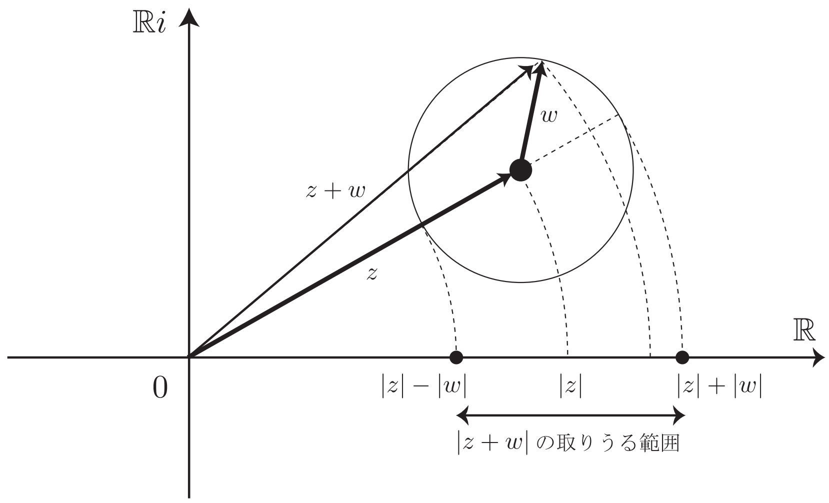


図 1.5: 三角不等式の図形的解釈．z は固定されていて，w が変化すると考える．その際，$z+w$ は z 中心半径 $|w|$ の円上にある．

をえる．もし $|c| \leq 2$ であれば，$|c| \leq 2 < |C_k(c)|$ より不等式

$$|C_{k+1}(c)| \ \geq \ |C_k(c)|^2 - |c| \ \geq_* \ |C_k(c)|^2 - |C_k(c)| \ = \ (|C_k(c)| - 1)|C_k(c)|$$

をえる．また，もし $|c| > 2$ であれば，$c = C_1(c)$ より $k = 1$ ととれば上と同じ不等式（ただし $\geq_*$ は等号）をえる．よって $|C_k(c)| > 2$ より，$\mu_k := |C_k(c)| - 1$ とおけば (1) をえる．

さて (1) より

$$|C_{k+1}(c)| \ \geq \ \mu_k|C_k(c)| \ > \ |C_k(c)| \ > \ 2$$

が成立するから，まったく同じ議論により

$$|C_{k+2}(c)| \ \geq \ \mu_{k+1}|C_{k+1}(c)| \ > \ |C_{k+1}(c)| \ > \ 2$$

も成立する．とくに，

$$\mu_{k+1} \ = \ |C_{k+1}| - 1 \ > \ |C_k(c)| - 1 \ = \ \mu_k$$

であるから，

$$|C_{k+2}(c)| \ \geq \ \mu_{k+1}\mu_k|C_k(c)| \ > \ \mu_k^2|C_k(c)|$$

をえる．この議論を繰り返すと，自然数 $n \geq 2$ にたいし

$$|C_{k+n}(c)| \ \geq \ \mu_{k+n-1}\mu_{k+n-2}\cdots\mu_k|C_k(c)| \ > \ \mu_k^n|C_k(c)|$$

が成り立つことがわかる．いま $\mu_k > 1$ かつ $|C_k(c)| > 2$ であったから，$n \to \infty$ のとき $|C_{k+n}(c)| \to \infty$ である．

後半の主張はほとんど $\mathbb{M}$ （もしくは H_∞ ）の定義に含まれている．実際，c が $\mathbb{M}$ に入っていないとき，$|C_n(c)|$ は発散するので $|C_k(c)| > 2$ となる k が存在することはあきらか． ■

ここでは等比数列 μ_k^n で発散のスピードを評価したが，これはあくまで下限にすぎない．しばらくあとでチェックするように，実際の発散のスピードは著しく速いのである．

最後に系を証明して，アルゴリズムの理論的正当化をしめくくろう．

証明（系 1.2）． 命題 1.1 より，$|c| > 2$ ならば $|C_1(c)| > 2$ となり，$c \notin \mathbb{M}$. ■

1.2.3 数列の有界性とマンデルブロー集合の定義の書き換え（残す？）

1. 命題 1.1 から，マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ は

$$\mathbb{M} \ = \ \{c \in \mathbb{C} : |C_n(c)| \le 2 \ (n = 0, 1, 2 \ldots)\}$$

   をみたす．したがって，右辺を $\mathbb{M}$ の定義だと思ってもかまわない．[9] ここで,「$\mathbb{M} \supset$ 右辺の集合」はあきらかであるが，命題 1.1 を証明して始めて「$\mathbb{M} \subset$ 右辺の集合」が正当化されたことに注意しておこう．

2. 一般に，複素数列 $\{c_n\}_{n\ge 0}$ が原点からある半径 $R > 0$ の範囲に収まっているとき，すなわち $|c_n| \le R \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ をみたすとき，**有界** (bounded) な数列とよぶ．このような R の値はふつう数列 c_n に依存する．しかし，マンデルブロー集合に関わる数列 $\{c_n(c)\}_{n\ge 0}$ $(c \in \mathbb{M})$ はすべて $R = 2$ とできて，有界なのである．

3. こうした事実も，最初にあたえた $\mathbb{M}$ の定義からすんなりとわかることではなく，やはり命題 1.1 を経由して初めて明らかになった性質である．

   ちなみに,「$|C_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ とならない」（最初の $\mathbb{M}$ 定義）からといって，C_n が有界とは限らないことにも注意しよう．たとえば，C_n が

$$0,\ 1,\ 0,\ 10,\ 0,\ 100,\ 0,\ 1000,\ 0,\ 10000,\ \ldots,\ 0,\ 10^n,\ 0,\ 10^{n+1},\ \ldots$$

   といった振る舞いをする数列は，有界ではないが $|C_n| \to \infty$ ともならない．だが，このような可能性もすでに排除されたわけである．

1.3 平面集合としての $\mathbb{M}$

われわれが理解したいのは，$\mathbb{M}$ のあの複雑な形状と，それが生成されるしくみであった．しかし，絵を信用しない，という数学的に厳密な立場に立てば，$\mathbb{M}$ はその定義と

[9] しかしこの定義はあまり良い定義とはいえない．「2」という数字の意味が明解でないからである．ノートを読み進めれば，最初の定義のほうがより定性的で普遍性があることが納得されるだろう．

大まかな場所（「絶対値 2 以下の範囲」）がわかっただけで，その「かたち」については何もわかったとはいえないことになる．このさき $\mathbb{M}$ に関する知識を数学的に厳密なまま拡げていくためには，$\mathbb{M}$ の平面集合としての形状を記述する言葉自体も厳密でなくてはならない．すなわち，$\mathbb{M}$ を形容する言葉にもいちいち定義が必要だということである．しかし，われわれはまだ $\mathbb{M}$ の数学を始めたばかりだし，こういうことであまり窮屈な思いをしたくないので，必要以上に厳格にはならないようにしよう．多少数学的にあいまいな表現でも，イメージをふくらませるためにあえて使うことがある．

集合にまつわる用語． 命題 1.1 から，$\mathbb{M}$ のもうひとつ重要な性質が得られる．それを述べるために，平面集合に関する用語を軽く復習しておこう．[10]平面上の集合には，**開集合**，**閉集合**と呼ばれる族があった（図 1.6）．集合 $A \subset \mathbb{C}$ が**開集合**であるとは，すべての $z \in A$ にたいし，

> $(*)$ z 中心で十分小さな半径の円板をとれば，それがすっぽりと A に収まってしまう

ときをいう．[11]

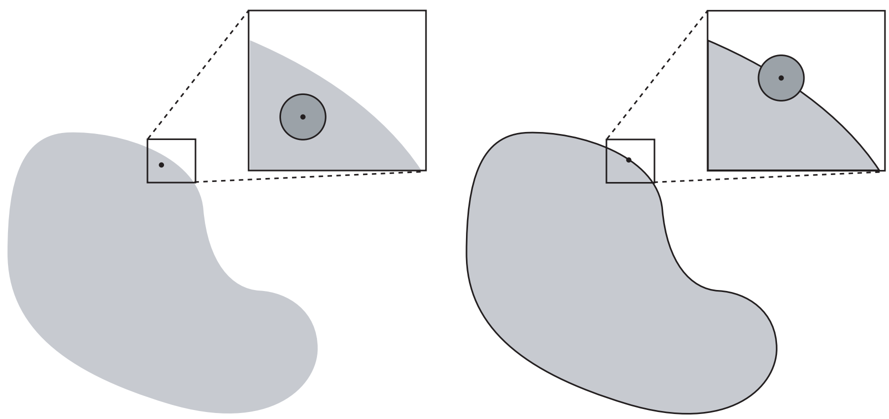


図 1.6: 開集合（左）と閉集合（右）．開集合でない集合，たとえば閉集合には，どんなに小さな円板をとっても集合からはみ出してしまうような点が存在する．

たとえば，開円板

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

は開集合である．これを**単位円板** (unit disk) という．また，集合 $A \subset \mathbb{C}$ が**閉集合**であるとは，補集合 $\mathbb{C} - A$ が開集合となるときをいう．たとえば，**閉単位円板** (closed unit disk)

$$\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

[10]参考文献：アールフォルス「複素解析」，松坂「集合・位相入門」？

[11]**円板** (disk) という言葉は，ある $\mathbb{C}$ 上の円で囲まれた内側の部分，という意味である．囲んでいる円そのものは含んでいる（閉円板）かもしれないし，含まれていない（開円板）かもしれない．

は $\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}$ が開集合となるので，閉集合である．

マンデルブロー集合は，開か閉か？ さて $\mathbb{M}$ は開集合であろうか，閉集合であろうか．それとも，どちらでもないのか？答えは：

系 1.3 マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ の**閉**集合である．

証明（系 1.3）． 補集合 $H_\infty = \mathbb{C}-\mathbb{M}$ が開集合であることをしめせば OK．いま $c \in H_\infty$ とすると，ある十分大きな k が存在して $|C_k(c)| > 2$ をみたす．（さもなくば，$|C_n(c)|$ が無限大へ発散できない！）関数 $c \mapsto |C_k(c)|$ は c の多項式の絶対値という形をしているから，連続である．すなわち，c' が十分 c に近ければ，$|C_k(c')|$ の値も $|C_k(c)|$ に十分近い（図 1.7）．したがって，ものすごく小さな半径をもつ c 中心の円板をとれば，その中にある c' はやはり $|C_k(c')| > 2$ をみたす．よって命題 1.1 より，その小さな円板全体が H_∞ に含まれることになる．これは H_∞ が開集合であることをしめす．■

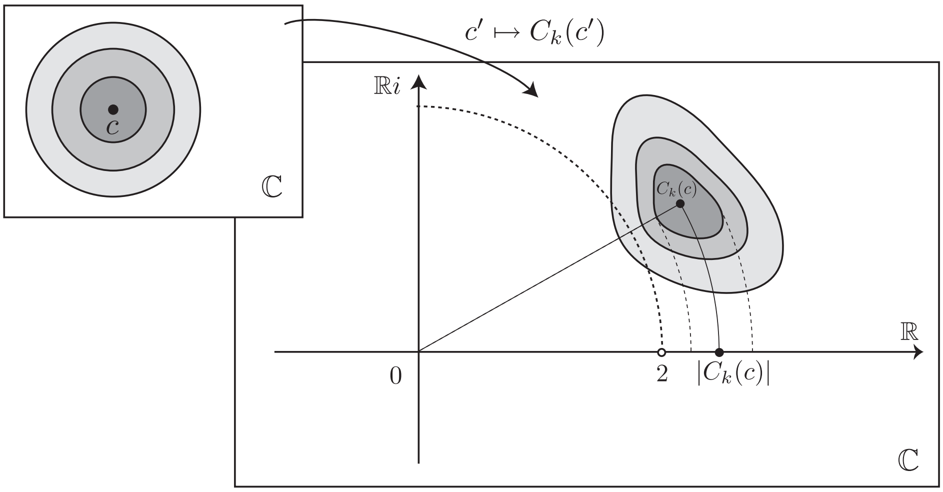


図 1.7: 多項式 $c' \mapsto C_k(c')$ は連続であり，c の近くにある点を $C_k(c)$ の近くに写す．

さらなる用語の復習． これから扱うのはおもに平面上の集合であるから，もう少しだけ用語の復習をしておこう．（図 1.8 参照）いずれ大量の具体例に接することになるから，少しずつ慣れていけばよい．

- 一般に，集合 $A \subset \mathbb{C}$ を考える．$z \in A$ が上の $(*)$ をみたすとき，A の**内点** (interior point) とよぶ．A の内点全体の集合を A° で表し，これを A の**内部** (interior) とよぶ．（例：$\mathbb{D} = \mathbb{D}^\circ$．）

- 一方，$z \in \mathbb{C}$ で，z 中心の円板（どんなに小さくてもよい）の中にかならず A の点と $\mathbb{C}-A$ の点が両方含まれるとき，z を A の**境界点** (boundary point) とよぶ．（$z \in A$ とは限らない！）A の境界点全体の集合は ∂A で表し，これを A の**境界** (boundary) とよぶ．（例：$\partial\mathbb{D}$ は単位円周.）

- ∂A と A° は互いに交わらないが，その和集合 $\overline{A} := A^\circ \cup \partial A$ は A を含む閉集合のなかで，もっとも効率がよい．これを A の**閉包** (closure) とよぶ.（例：$\overline{\mathbb{D}}$ は $\mathbb{D}$ と単位円周の和集合.））

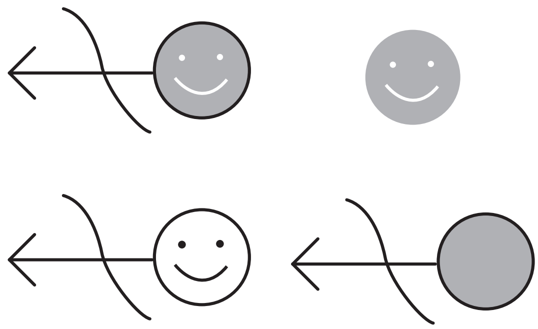


図 1.8: 内点・境界・閉包のイメージ図．左上を $A \subset \mathbb{C}$（グレーの部分は含むが，白い 2 点と弧は含まれない）とすると，右上が内部 A°，左下が境界 ∂A，右下が閉包 $\overline{A}$.

- A が原点中心の，ある十分大きな半径の円板にすっぽりと含まれるとき，A を**有界** (bounded) な集合とよぶ．ようするに,「無限に広がっていない」集合のことである．とくに，有界かつ閉集合であることを，A は**コンパクト** (compact) である，と表現する．例えば，単位円板 $\mathbb{D}$ は原点中心半径 1.5 の円板にすっぽりと収まるので，有界である．しかし閉集合ではないので，コンパクトではない．一方，実軸は閉集合だが，どんな円板にも収まりきれないので，有界ではない．したがって，コンパクトではない．[12]

さてこれらの用語を用いれば,「マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ は原点中心半径 2 の閉円板に含まれるコンパクト集合である」と記述できる（系 1.2 ＋系 1.3）．しかし現時点では，$\mathbb{M}$ が内点を持つかどうかすらわからない（証明されていない）.

一方で図 1.1 や図 1.2，図 1.4 のような絵を眺めていると，$\mathbb{M}$ は内点をたっぷり含んでるようにみえるし，$\mathbb{M}$ 全体の形状についてもいろいろと詳しいことがいえそうである.「絵は信用しない」という立場は貫きたいのだが，とりあえず信じ込まないように注意しつつ，予想を立ててみよう：

(M1) $\mathbb{M}$ は実軸に関して対称であろう.

(M2) $\mathbb{M}$ は $\mathbb{C}$ に浮かぶ「ひとつながり」の陸地であろう．すなわち，島（飛び地）はない.

(M3) $\mathbb{M}$ の中に，H_∞ の飛び地はないであろう．すなわち，$\mathbb{M}$ に「穴」はないであろう.

[12] コンパクト性は当面必要ない言葉であるが，あとで大活躍する性質である.

(M4) $\mathbb{M}$ は原点を含む大きなハート型（カーディオイド）の部分があり，その境界には無数の閉円板が接しているであろう．

(M5) さらに，それらの閉円板にもさらに小さな閉円板が無数に接しているであろう．

(M6) $\mathbb{M}$ はそれ自身の「コピー」を無数に含むであろう．

この先，これらの予想を少しずつ検証していく．数学的にあいまいな言葉遣いは適宜補われて，$\mathbb{M}$ は次第に理論的枠組みに収まっていくようにみえるだろう．

練習問題． 最初の予想「(M1) $\mathbb{M}$ は実軸に関して対称であろう」は $\mathbb{M}$ の定義から簡単に証明できる「事実」である．ぜひ試みていただきたい．(Hint: 複素共役を用いる）

ちなみに $\mathbb{M}$ と実軸については，つぎのことが知られている：

命題 1.4 マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ と実軸 $\mathbb{R}$ との共通部分は区間 $[-2, 1/4]$ である．とくに，マンデルブロー集合は空集合ではない．

「空集合でない」など，いまさらという感じがするが，定義に含まれていない性質なので一応述べておく価値があるだろう．

証明．(命題 1.4) まず，$c \geq 0$ と仮定しよう．このとき，数列 $C_n = C_n(c)$ は単調増加（非減少）な実数列である．実際，$C_n \geq C_{n-1} \geq 0$ $(n \geq 1)$ を仮定すると，漸化式 $C_{n+1} = C_n^2 + c$ より

$$C_{n+1} - C_n \ = \ (C_n^2 + c) - (C_{n-1}^2 + c) \ = \ (C_n - C_{n-1})(C_n + C_{n-1}) \ \geq \ 0$$

が成り立つ（数学的帰納法）．したがって，もし $c \in \mathbb{M}$ であれば（すなわち数列 $C_n = C_n(c)$ が有界であれば），極限 $x = \lim C_n \geq 0$ が存在する．[13]C_n の漸化式より x は $x = x^2 + c$ をみたすが，この方程式が実数解をもつのは $c \leq 1/4$ のときに限る．よって，$c > 1/4$ のとき数列 C_n は発散し，系 1.2 とあわせて $\mathbb{M} \cap \mathbb{R} \subset [-2, 1/4]$ となることがわかった．

逆に $[-2, 1/4] \subset \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$ をしめそう．$c \in [-2, 1/4]$ とする．$C_0 = 0 \geq -2$ および

$$C_{n+1} \ = \ C_n^2 + c \ \geq \ c \ \geq \ -2$$

より，$C_n \geq -2$ がすべての $n \geq 0$ でなりたつ．また，方程式 $x = x^2 + c$ の解のうち大きいほうを $\beta_c := (1 + \sqrt{1-4c})/2 > 0$ で表すと，$C_0 = 0 < \beta_c$ が成り立っている．いま $C_n \leq \beta_c$ $(n \geq 0)$ と仮定すれば

$$C_{n+1} \ = \ C_n^2 + c \ \leq \ \beta_c^2 + c \ = \ \beta_c$$

が成り立ち，すべての $n \geq 0$ で $C_n \leq \beta_c$ となる．よって $|C_n|$ は無限大に発散しない．すなわち $c \in \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$ である．以上で $[-2, 1/4] = \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$ がしめされた．■

[13]単調増加（非減少）かつ有界な実数列は収束する．これは**実数の連続性の公理**と呼ばれる性質であった．

それにしても，$\mathbb{M}$ のような集合を考える必要に迫られた，きっかけは何だったのだろうか？漸化式 (C) や数列 $C_n(c)$ には，一体どんな意味があるのだろうか？

もちろん，マンデルブロー集合がポツリと単独で数学史に登場したわけではない．その源流をたどって 19 世紀あたりまでさかのぼることは可能だが，このノートではあえてそうしない．じわじわと数学的な視野を広げながら $\mathbb{M}$ をさまざまな角度から眺め，最終的に歴史を俯瞰できる立場を目指そう．

1.4 充填ジュリア集合

じつは，マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ そのものに単独で意味を見出すことは難しい．$\mathbb{M}$ は**充填ジュリア集合**とよばれる平面集合たちと表裏一体の関係にある．すこし先走って標語的にまとめてしまうと，マンデルブロー集合とはこれら充填ジュリア集合たちの「カタログ」である．$\mathbb{M}$ の性質は充填ジュリア集合に反映し，充填ジュリア集合たちの性質もまた $\mathbb{M}$ に反映する．

この章では充填ジュリア集合とは何か定義し，$\mathbb{M}$ と同様に描画方法などを確認する．カタログだけ眺めていても，その価値を測ることはできないからである．

1.4.1 充填ジュリア集合

ある漸化式． やや天下り的[14]だが，数列 $C_n(c)$ を特殊な場合として含む「数列の族」を構成しよう．複素数 c をひとつ選び，固定する．[15]さらにもうひとつの複素数 z にたいして，次の漸化式 (Z) で定まる数列数列を考えてみる：

$$Z_0 = z; \quad Z_{n+1} = Z_n^2 + c \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{Z}$$

すなわち，

$$z,\ z^2 + c,\ (z^2 + c)^2 + c,\ \big((z^2 + c)^2 + c\big)^2 + c,\ \ldots$$

であたえられる数列 $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ である．この数列は c のみならず初項 z にも依存するので，各項を $Z_n(c, z)$ のように表現するべきであろう．ただし今回は c をより強く固定して考えたいので，単に $Z_n(z)$ と書く方法も並行して用いることにする．あらためて

[14]「天下り的」というのは数学特有の言葉遣いかもしれない．「唐突ではあるけども，あとでその意味がわかる」様子を神託（神様のお告げ，“oracle”）に喩えている．「官僚の天下り」とは関係がない．

[15]「（数を）固定する」という言葉遣いも数学特有であろう．「本来は変化しうる数であるが，ここではいったん特定の値に定めて，定数としてあつかう」という意思表示である．

書きなおすと

$$\begin{aligned}
Z_0(z) &:= Z_0(c,z) = z \\
Z_1(z) &:= Z_1(c,z) = z^2+c \\
Z_2(z) &:= Z_2(c,z) = (z^2+c)^2+c \\
Z_3(z) &:= Z_3(c,z) = ((z^2+c)^2+c)^2+c \\
Z_4(z) &:= Z_4(c,z) = (((z^2+c)^2+c)^2+c)^2+c \\
&\cdots
\end{aligned}$$

となる．

さて漸化式 (C) と漸化式 (Z) 比較すれば，$z=0$ のときあきらかに

$$C_n(c) = Z_n(0) = Z_n(c,0) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

が成立している．この意味で，数列 $Z_n(c,0)$ は数列 $C_n(c)$ を特殊な場合として含むわけである．

c の固定． いま，複素数 c を完全に固定する．前章までは c が変数として動き回り，$\mathbb{M}$ の中にあるかどうかの判定を問題としていた．ここではあえて c を定数だと思うことにする．今，重要な対象の転換が起きているのだが，その意味するところは追々あきらかにされていくだろう．

さて定数となった c と新しい複素変数 z にたいし，上のようにあたえられる数列 $Z_n(z)$ が複素平面上でどのように振舞うか観察してみよう．たとえば $c=-1$ と固定し（この値に特別な意味はない），$z=0$ とすれば $\{Z_n(0)\}_{n\geq 0}$ は

$$0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ldots$$

となり，2 つの同じ値を交互にとる．また，$z=\sqrt{2}$ とすれば $\left\{Z_n(\sqrt{2})\right\}_{n\geq 0}$ は

$$\sqrt{2},\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \ldots$$

となる．一旦 0 という値をとると，漸化式よりあとは上の数列と同じ挙動をしめすことになる．また，$z=2$ とすれば $\{Z_n(2)\}_{n\geq 0}$ は

$$2,\ 3,\ 8,\ 63,\ 4095,\ 16769024,\ \ldots$$

となり，ものすごい勢いで正の無限大に発散する．

ここでも数列に複雑な（＝面白い）振る舞いを期待して，上でいうと $z=2$ のような，絶対値が無限大に発散する数列をあたえるものは除外してみよう．再び一般の定数 c に戻り，z の集合

$$\{z\in\mathbb{C} : |Z_n(z)| = |Z_n(c,z)| \to \infty\ (n\to\infty)\}$$

を B_c で表し，それを複素平面から除いたもの

$$K_c \;:=\; \mathbb{C} - B_c$$

を c に関する**充填ジュリア集合** (filled Julia set) とよぶ．

$\mathbb{M}$ の定義になんとなく似ているが，重要な違いがある．つぎでみるように，集合 K_c が c という定数をパラメーターに見立てることで変化しうるのにたいし（これは直線が「傾き」という定数を変えることで変化するのと同じ），$\mathbb{M}$ にはそのように変化する要素がない．

充填ジュリア集合の例． さて $\mathbb{M}$ と同様，K_c をコンピュータに描かせるのは簡単である．まずは K_c の典型的な例をいくつかおみせしよう．図 1.9〜図 1.12 をざっと眺めていただきたい．縮尺はそれぞれ異なるが，すべて原点を中心に描かれている.（これらの絵は次であたえる描画アルゴリズムを改良した，DEM (Distance Estimator Method) というものを用いている．付録を参照.）$\mathbb{M}$ と同様に，シンプルな定義からスタートした割には，かなり複雑な形状が生成されることがわかるだろう．一方で，$\mathbb{M}$ と異なり，個々の充填ジュリア集合には全体から細部にいきわたる規則性が感じられる．しかし c の値と K_c の形状について，何らかの関係を見出すことは難しい.（サンプルが少ないのも原因だが.）

では，個々の例についてもう少し詳しくみていこう．

バジリカとデンドライト． まず簡単な値として $c = -1$ と $c = i$ の充填ジュリア集合を描いたものが図 1.9 である．左が K_{-1} で，灰色の部分はその内部，B_c との境界部分は黒で薄く塗られている．なんとも形容しがたいが，無数の「こぶ」のようなものが，ある種の規則に従って配置されてできた集合だと考えられる．その形から，**バジリカ** (basillica，キリスト教教会の建築様式のひとつ) と呼ばれる．右側は K_i である．内点をもたず，葉っぱを失った樹木のような形状は**デンドライト** (dendrite，樹状突起，樹枝状結晶の意) と呼ばれるタイプの集合である．このように，一般に K_c は内部 K_c° をもつこともあれば，もたないこともある．

ウサギとカリフラワー． 次の図 1.10 は，バジリカ K_{-1} にある意味よく似た構造をもつ $c = -0.122561 + 0.744862i$ の充填ジュリア集合と，円板を内側からつまんでできたような構造をもつ $c = 1/4$ の充填ジュリア集合である．それぞれ，その形状から**ウサギ** (rabbit)，**カリフラワー** (cauliflower) と呼ばれる．K_c の内部は，バジリカやウサギのように多数の連結成分[16] をもつこともあれば，カリフラワーのようにひとつの連結成分からなる場合もある．

飛行機． 次の図 1.11 は，$c = -1.75488$ の充填ジュリア集合である．この K_c の愛称は**飛行機** (airplain) である.（プロペラ機を真正面から見た感じか.）飛行機は，これまでみた K_c のどれとも違った特徴を持っている．内部は無数の連結成分からなる，と

[16]**連結成分** (connected component) とは，直感的には「つながっている部分」のことである．厳密な定義は後述するが，たとえば，$[0, 1]$ 区間から $1/2$ を除くとふたつの連結成分に分かれる，といった具合である．

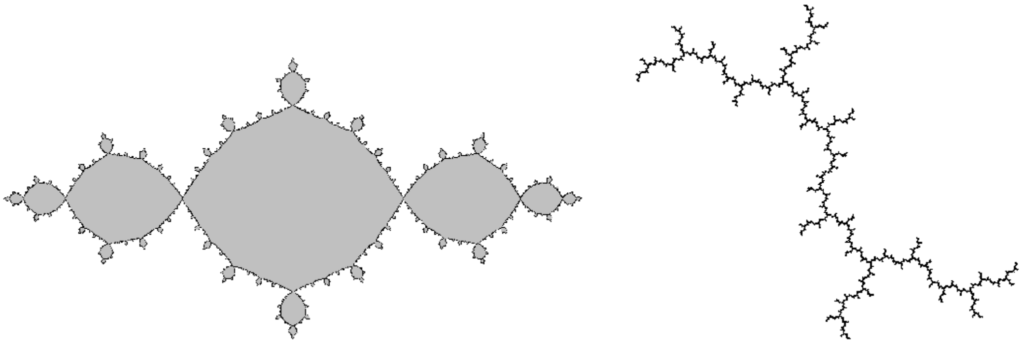


図 1.9: $c = -1$ （左）との $c = i$ （右）の充填ジュリア集合.

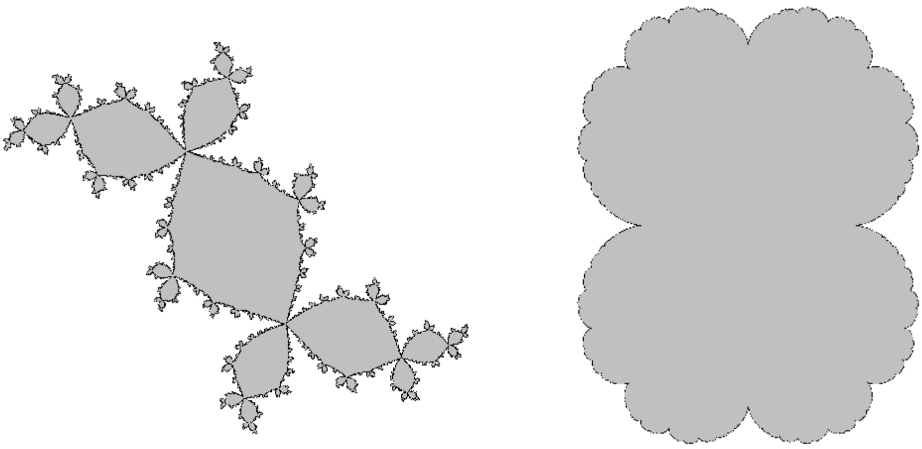


図 1.10: $c = -0.122561 + 0.744862i$（左）と $c = 1/4$ （右）の充填ジュリア集合.

いう意味ではバジリカやウサギと同じだが，各成分の境界同士は接していないからである．

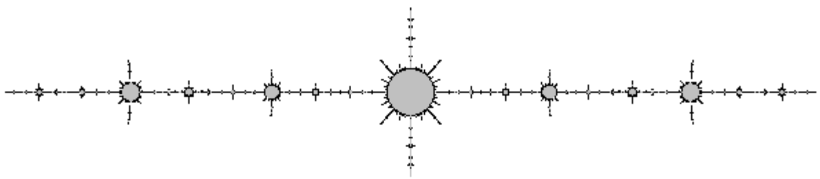


図 1.11: $c = -1.75488$ の充填ジュリア集合 $K_{-1.75488}$.

ファトウの塵． 最後の例は，充填ジュリア集合自体がばらばらに砕けてしまった例である．図 1.12 はそれぞれ $c = -0.7688 + 0.1632i$ および $c = -0.1123 + 1.056i$ の充填ジュリア集合である．図から想像されるように，これらに内点は存在しない．しかも，これらの K_c にはひとつも繋がった部分がなく，点がバラバラに寄せ集まって構成されている．これは**カントール集合** (Cantor set) と呼ばれるタイプの集合である．[17]

ちなみに，何となく図 1.9 に似た部分も感じられないだろうか．実際，c の値はさほど離れていない．

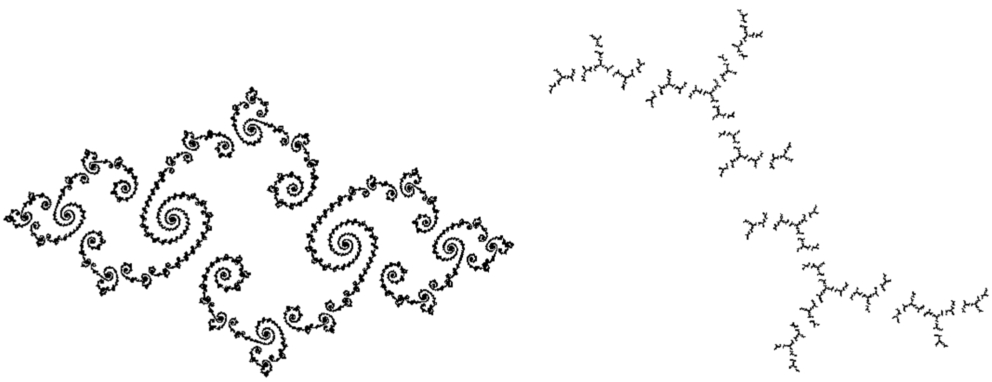


図 1.12: $c = -0.7688 + 0.1632i$ （左）および $c = -0.1123 + 1.056i$ （右）の充填ジュリア集合．内点を失い，粉々になっている．いわゆるカントール集合である．

マンデルブロー集合と充填ジュリア集合の関係（トル？）． ここで，ひとつ面白い絵を

[17]**ファトウの塵** (Fatou's dust) と呼ばれることもある．これは，20 世紀初頭の P.Fatou の論文に由来すると思われる．

みておこう．[18]図 1.13 の上の画像は，次のようにして得られたものである．まず，マンデルブロー集合を描き，それを正方形によって分割する．そのような各正方形 S の中心を $c = c_S$ とし，それぞれに対応する充填ジュリア集合 K_c を S 内に描く．ただし，S は原点中心，一辺 4 の正方形領域とみなしている．K_c が c に応じて，どのように変化するかみて取れるだろうか．とりあえず，バジリカ，カリフラワー，ウサギたちがだいたいどのあたりにあるか，探してみるとよい．

同様の方法で，上の画像の中にあるふたつの長方形領域について充填ジュリア集合を書き加えたものが下のふたつの画像である．それぞれウサギとバジリカをあたえる c の周りを拡大したものである．

1.4.2 描画アルゴリズムと正当化

描画アルゴリズム． では，充填ジュリア集合をコンピューターに描かせるアルゴリズムを紹介しよう．基本的にはマンデルブロー集合の描画アルゴリズムを少し変更するだけでよい．ここではアルゴリズムを単純化するため，$|c| \le 2$ を仮定しておく．まずは準備段階として，以下のように複素平面とコンピュータの描画画面を対応付ける：

1. 複素数 $z = x + yi$ を平面上の点 (x, y) と同一視する．

2. $|c| \le 2$ のとき，充填ジュリア集合 K_c は $-2 \le x, y \le 2$ の範囲に含まれる（命題 1.5 参照）ので，対応するコンピュータの描画領域を図 1.3 と同様に指定する．

3. とくに，$[P, Q]$-ピクセルは複素数の領域

$$\begin{aligned} -2 + \frac{4}{N} \cdot P \ &\le\ x\ \le\ -2 + \frac{4}{N} \cdot (P+1) \\ 2 - \frac{4}{N} \cdot Q \ &\le\ y\ \le\ 2 - \frac{4}{N} \cdot (Q+1) \end{aligned}$$

   に対応する．

この設定のもと，$[P, Q]$-ピクセル内に充填ジュリア集合の点が含まれていれば，そのピクセルを黒く塗る，というアルゴリズムをあたえる．ここでも，各 $[P, Q]$-ピクセル内の代表点として左上端の点

$$z \ =\ z[P, Q] \ :=\ \left(-2 + \frac{4}{N} \cdot P\right) + \left(2 - \frac{4}{N} \cdot Q\right) i$$

について数列 $Z_n(z) = Z_n(c, z)$ を計算する．$z = z[P, Q]$ が充填ジュリア集合 K_c に入っている（すなわち，$|Z_n(z)|$ が無限大に発散しない）と判定されれば，$[P, Q]$-ピクセルは黒く塗ることにする．発散の判定は $\mathbb{M}$ の描画方法に順ずる：

(i) P, Q がそれぞれ 0 から $N - 1$ まで動くようループを作成．

[18] この絵の描き方は，WikiPedia にある画像を参考にした．

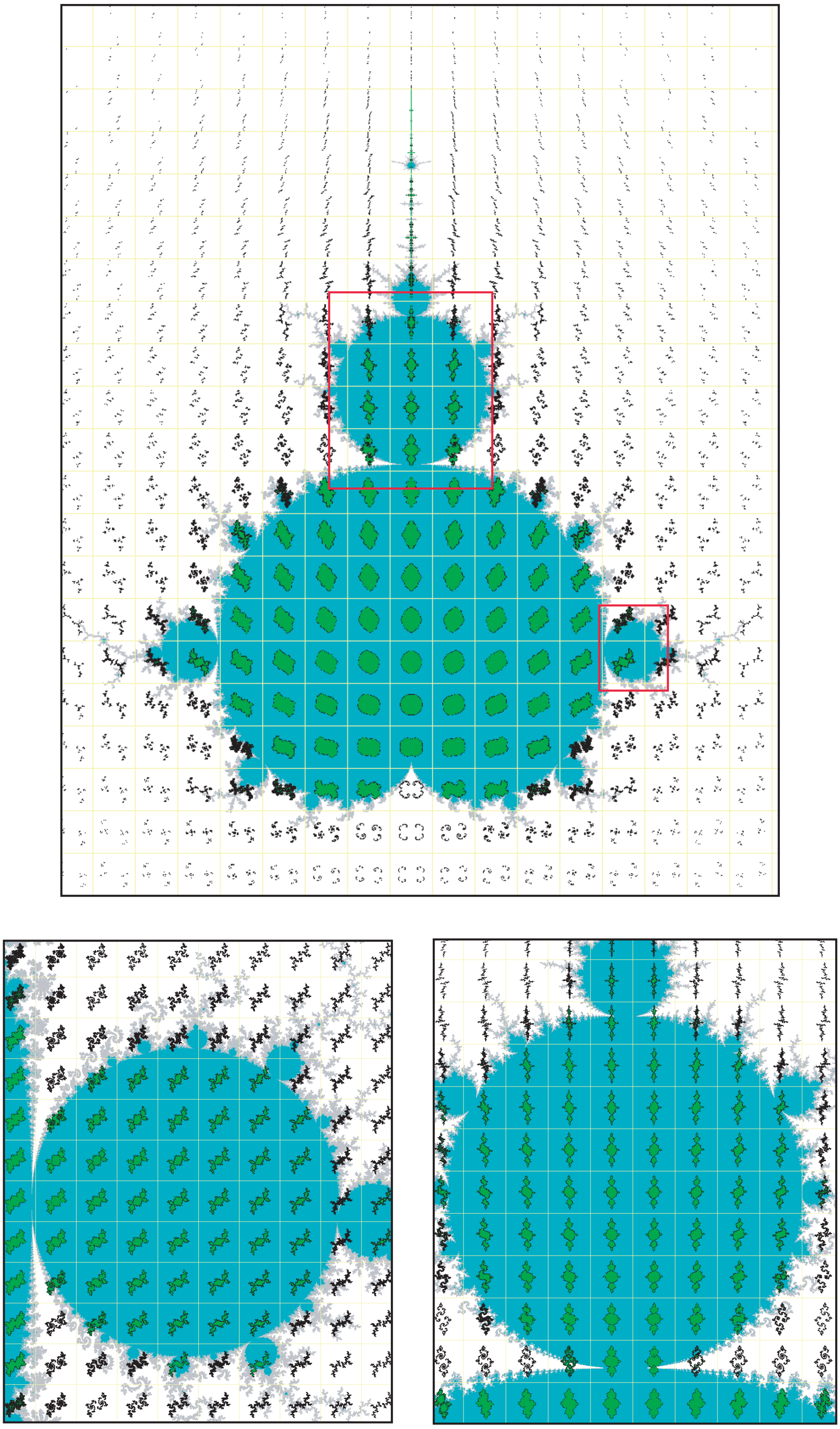


図 1.13: マンデルブロー集合と充填ジュリア集合たち.（サイズの都合で右に90 度回転してある.）

(ii) ループの各ステップ内に，さらに $z = z[P, Q]$ の数列 $Z_0(z), Z_1(z), Z_2(z), \ldots, Z_L(z)$ を漸化式に従って計算するループを作成.

(iii) 各 $Z_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, L)$ にたいしその絶対値 $|Z_k(z)|$ を計算する．事前に決めた半径 $R > 0$ について，もし $|Z_k(z)| > R$ であればその点は K_c の点でないと判定し，数列の計算をストップさせる．この場合 $[P, Q]$-ピクセル 全体が K_c に属さないとみなし，$[P, Q]$-ピクセルは色を塗らない，もしくは k に応じた色を塗る.

(iv) $k = L$ に到達したらその点は K_c に入っている（もしくは $[P, Q]$-ピクセルは K_c の点に近い）とみなし，黒く塗る.

このアルゴリズムも $\mathbb{M}$ の描画アルゴリズムと同様に，無限にまつわる問題点があることはあきらかであろう．したがって，上のような絵は参考程度に考えるのが「数学的」である.

正当化． このアルゴリズムについても，(iii) の部分を正当化しておこう．じつは， $R = \max\{2, |c|\}$ と取ればよい：

> **命題 1.5** あたえられた $z \in \mathbb{C}$ が K_c 上に<u>ない</u>ことの必要十分条件は，$|Z_k(z, c)| > \max\{2, |c|\}$ となる（z に依存する）自然数 k が存在することである．すなわち：
>
> (1) $|c| \leq 2$ の場合：$|Z_k(z, c)| > 2$ となる自然数 k がある.
>
> (2) $|c| > 2$ の場合：$|Z_k(z, c)| > |c|$ となる自然数 k がある.

証明（命題 1.5） まず $z \notin K_c$ とすると，$z \in B_c$，すなわち $|Z_n(z, c)| \to \infty$ $(n \to \infty)$ であるから，$|Z_k(z, c)| > \max\{2, |c|\}$ となる自然数 k が存在する.

逆に，そのような k が存在したと仮定しよう．一般に $Z_n(z) = Z_n(z, c)$ のみたす漸化式と三角不等式より

$$|Z_{k+1}(z)| \;=\; \left|Z_{k+1}(z)^2 + c\right| \;\geq\; |Z_k(z)|^2 - |c|$$

がなりたつ．仮定より（ $|c| \leq 2$ か $|c| > 2$ によらず） $|Z_k(z)| \geq |c|$ が常に成立するから，

$$|Z_{k+1}(z)| \;\geq\; |Z_k(z)|^2 - |c| \;\geq\; |Z_k(z)|^2 - |Z_k(z)| \;=\; |Z_k(z)| \cdot (|Z_k(z)| - 1).$$

再び仮定より，（やはり $|c| \leq 2$，$|c| > 2$ によらず） $|Z_k(z)| > 2$ であるから，$\lambda := |Z_k(z)| - 1 > 1$ をみたす．すなわち，

$$|Z_{k+1}(z)| \;\geq\; \lambda |Z_k(z)| \;>\; |Z_k(z)|$$

をえる．同じ議論を繰り返せば，$|Z_{k+n}(z)|$ $(n \geq 0)$ は n について真に単調増加であり，$C_k(c)$ のときと同様の考え方で

$$\begin{aligned}
|Z_{k+n}(z)| \;&\geq\; (|Z_{k+n-1}(z)| - 1) \cdots (|Z_{k+1}(z)| - 1)(|Z_k(z)| - 1) \cdot |Z_k(z)| \\
&\geq\; \lambda^n |Z_k(z)| \\
&\geq\; \lambda^n \max\{2, |c|\}
\end{aligned}$$

をえる．すなわち，$n \to \infty$ のとき $|Z_{k+n}(z)|$ は無限大に発散することがわかる．よって $z \notin K_c$ である． ■

したがってアルゴリズムでは $|c| \leq 2$ を仮定したが，(iii) の判定条件を「$|Z_k(z)|$ を計算し，もし $|Z_k(z)| > \max\{2, |c|\}$ であればその点は K_c の点でないと判定」と変更することで一般の c についても K_c の描画が可能である．ただし，$|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leq 2$ の範囲には収まらない可能性がある．実際，命題 1.5 から K_c の大きさに関して次のことがわかる．：

系 1.6 任意の c にたいし，充填ジュリア集合 K_c は原点中心半径 $\max\{2, |c|\}$ の閉円板に含まれる．すなわち，

$$K_c \ \subset \ \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \max\{2, |c|\}\}.$$

また，K_c は閉集合，とくにコンパクト集合である．

証明はほとんど系 1.2，系 1.3 と同じであるから，読者の練習問題として残しておこう．ここではさらに精密な評価をあたえる：

命題 1.7 任意の c にたいし，充填ジュリア集合 K_c は原点中心半径 $\dfrac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2}$ の閉円板に含まれる．

証明（命題 1.7）． 命題 1.5 より，任意の $z \in K_c$ および $n \geq 0$ について，$|Z_n(z)| < \max\{2, |c|\}$ である．したがって，$s(z) = \sup_{n \geq 0} |Z_n(z)| \geq 0$ が存在する．[19]いま $Z_{n+1}(z) = Z_n(z)^2 + c$ であったから，

$$|Z_n(z)|^2 \ = \ |Z_{n+1}(z) - c| \ \leq \ |Z_{n+1}(z)| + |c| \ \leq \ s(z) + |c|$$

をみたす．この不等式はすべての n でなりたつので，左端の項で sup をとった不等式

$$s(z)^2 \ \leq \ s(z) + |c|$$

もなりたつ．[20] この 2 次不等式を解いて，$0 \leq s(z) \leq \frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2}$ となる．$z \in K_c$ は任意だったから，$|z| = |Z_0(z)| \leq s(z)$ より主張をえる． ■

練習問題． 系 1.6 を証明せよ．

練習問題． 命題 1.7 と同様の手法で，系 1.2 の別証明をあたえよ．

[19]実数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ にたいし，全ての $n \geq 0$ について $a_n \leq M$ となる最小の M を $\sup_{n \geq 0} a_n$ で表すのであった．

[20]この不等式を論理的に納得するには，それなりの「慣れ」が必要かもしれない．もし $s(z)+|c| < s(z)^2$ だと仮定しよう．一般に $|Z_n(z)| \leq s(z)$ だが，$s(z)$ の定義より $s(z)$ にいくらでも近い $|Z_n(z)|$ が存在するので，$s(z) + |c| < |Z_n(z)|^2 \leq s(z)^2$ とできてしまう．これは直前の不等式に矛盾している．

練習問題（命題 1.7 の最良性）． 命題 1.7 において，まず $\frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2} \le \max\{2, |c|\}$ を証明せよ．また，実際に $|z| = \frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2}$ となる $z \in K_c$ および c が存在するかどうかを考察し，$|c|$ の関数としてはこの半径 $\frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2}$ が最良であることをしめせ.

充填ジュリア集合の「かたち」． さて充填ジュリア集合の具体例をみる限り,

(K1) K_c は常に原点対称である.

(K2) K_c は「ひとつながり」なこともあれば（図 1.9〜図 1.11），無限個のピースに分かれていることもある（図 1.12）.

(K3) K_c は内部（内点）をもつこともあれば（$c = -1$, $c = 1/4$ など），もたないこともある（$c = i$，図 1.12 など）.

(K4) K_c で囲まれた B_c の飛び地はないであろう．とくに，K_c が内部をもつとき，穴は開いていないであろう.

(K5) K_c は，いわゆる「フラクタル性」をもつ集合であろう．[21]

ということがわかる．これらの性質はあとで数学的に正当化されるであろう.

練習問題． 任意の $c \in \mathbb{C}$ にたいし，K_c は原点対称であることをしめせ.（Hint. $f_c(z) = f_c(-z)$）

練習問題． $c \in \mathbb{C}$ にたいし，K_c の実軸に関する鏡像 $K'_c := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in K_c\}$ を考える．このとき，$K_{\bar{c}} = K'_c$ をしめせ．ただし $\bar{c}$ は c の複素共役である.

練習問題． $c \in \mathbb{C}$ にたいし，$Z_1(z) = Z_0(z)$ となる z が少なくともひとつ存在することをしめせ．このことから，K_c は空集合でないことを確認せよ.

とりあえずここまでの議論で，マンデルブロー集合や充填ジュリア集合の描画アルゴリズムを理論的に（その限界も含めて）説明できたことになる．しかしまだ，$\mathbb{M}$ のような集合や，数列 $Z_n(z)$，集合 K_c を考える数学的背景は説明されていない.（もちろん，これらの集合の描画だけに興味がある人ならば，すでに十分過ぎるぐらいの理解を得たことになるであろう.）

次節では，これまでに考えてきた数列たちをさらにもう一歩後ろから眺めてみよう．そこには，彼らが棲息する力学系という名の沃野が広がっている.

---

[21] フラクタル (fractal) 性は，しばし標語的に「いかなる小さな部分も全体に似る性質」と表現される．数学的に厳密な定義にはいくつか流儀があるが，厳密さゆえにいずれも万能性を欠く．また，自己相似性 (self-similarity) とも呼ばれる.

よく知られているように,「フラクタル」という言葉はマンデルブローによる造語である．このような性質をもつ集合自体は，19 世紀後半から長く数学の研究対象とされていたが，自然界におけるある種の造形（海岸線，樹木，etc）との類似を見出し,「フラクタル幾何学」というあいまいだが包括的なアイディアを，このキャッチーな言葉とともに提唱したのがマンデルブローだったのである.（詳しくはマンデルブローの同名の著作を参照されたい.）

1.5 漸化式から力学系へ

社会学という学問がある．個々の人間の行動を研究するのではなく，個人の集合体，いわゆる社会の行動を研究する分野である．個人は人間同士のネットワークが生み出した，社会という巨大な潮流のなかにある．多くの場合，個人はその流れに身を任せるひとつの水分子にすぎないのである．

前節までは数列という「個人」に目を向けてきたが，じつのところ，その挙動は「社会」のような大きなシステムの中で規定されている．この節の課題は，数列全体が織り成すシステム（「系」）を定式化するための言葉を用意し，$\mathbb{M}$ や K_c により深い意味づけをあたえることである．

1.5.1 力学系とはなにか

複素数 c を固定し，数列 $Z_n(z)$ のみたす漸化式

$$Z_0(z) = z; \quad Z_{n+1}(z) = Z_n(z)^2 + c \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

をよく眺めてみよう．この式は $Z_n(z)$ という数を用いて，次のステップで $Z_n(z)^2 + c$ という数を生成せよ，という手続きを指定している．より一般に，Z という複素数にたいし $Z^2 + c$ を生成する仕組みは関数（写像）

$$\begin{aligned} f = f_c :\ & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & Z \longmapsto Z^2 + c \end{aligned}$$

によってあたえられるから，漸化式は

$$Z_0(z) \ = \ z; \quad Z_{n+1}(z) \ = \ f(Z_n(z)) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

という形で記述できる．あらためて書きなおすと，

$$\begin{aligned} Z_0(z) &:= z \\ Z_1(z) &:= f(z) \ = \ z^2 + c \\ Z_2(z) &:= f(f(z)) \ = \ (z^2 + c)^2 + c \\ Z_3(z) &:= f(f(f(z))) \ = \ ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \\ Z_4(z) &:= f(f(f(f(z)))) \ = \ (((z^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c \\ &\cdots \end{aligned}$$

となる．すなわち $Z_n(z)$ は，複素数 z に f を n 回繰り返し合成して得られた複素数である．このように，同じ関数（写像）を繰り返し合成することを**反復合成** (iteration) とよぶ．

ここで，記号を簡単にするため，帰納的に

$$f^0(z) \ := \ z; \qquad f^{n+1}(z) \ := \ f(f^n(z)) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と定義しよう．こうすれば，

$$f(f(f(f(z)))) \;=\; f^4(z)$$

などと書けてすっきりする．[22]とくに

$$Z_n(z) \;=\; f^n(z) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

である．

今のところ単に数列の見栄えが変わっただけで，とくに何も新しいことは起きていないように思われるかもしれない．ところが実際は，大きな違いがある．写像という概念が表に出ることで，われわれは個々の数列から開放されて，複素平面全体のおおきな流れへと視点を移すことができるからである．

力学系． いま，写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は文字通り，$\mathbb{C}$ 上の点を一斉に，ふたたび $\mathbb{C}$ の中に写す（移す）作用がある．これを反復合成してみよう：

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \cdots$$

このとき，ある 1 点 $z \in \mathbb{C}$ がどのように写像されて行くかに着目すると，

$$z \overset{f}{\longmapsto} f(z) \overset{f}{\longmapsto} f^2(z) \overset{f}{\longmapsto} f^3(z) \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

すなわち数列

$$Z_0(z) \overset{f}{\longmapsto} Z_1(z) \overset{f}{\longmapsto} Z_2(z) \overset{f}{\longmapsto} Z_3(z) \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

が得られる．関数 $f^n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が一定時間が経過した後の「社会」全体の動向を規定している．一方，$f^n : z \mapsto f^n(z)$ であたえられる複素数 $f^n(z)$ は，それに流される「個人」の動向をあらわしている，と考えることはできないだろうか．

「世界」のモデル． 今度は物理学的なレトリックで表現してみよう．この世界を構成する要素として,「空間」「時間」そして「運動法則」（物理法則）が考えられる．その単純なモデルとして，

「空間」＝　複素平面 $\mathbb{C}$
「時間」＝　$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$（秒）
「運動法則」＝　「点 z は 1 秒後に $f(z)$ に写る」

という「世界」を考えよう．すなわち,「空間」は実 2 次元であり,「時間」はパラパラ漫画のように離散的に進む.「時間」の単位には便宜的に「秒」を用いたが，別に「ミリ秒」でも「1/24 秒」でも,「分」でも「年」でもかまわない.「時間」が実数のように連続的でないが，ビデオやアニメーションの世界は時間が離散的であることを思えば，さほど違和感がなくなる．運動法則は完全に決定論的であるが，モデルの単純化という意味では納得できる．

[22] $f^4(z)$ は $f^{\circ 4}(z)$ と書かれることもある．

このような設定のもと，反復合成

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \cdots$$

はまさに「世界」の時間発展を表現していると考えられる．これを $\mathbb{C}$ 上の写像 f による**力学系** (dynamcal system) とよぶ．[23]力学系は本質的に「空間」と「運動法則」のペアによって決定される.（「時間」はある意味「運動法則」の中に織り込まれているので.）そこで力学系を表す記号として $(\mathbb{C}, f)$ や $f \curvearrowright \mathbb{C}$ を用いる．

また，個々の点 z の挙動

$$z \xmapsto{f} f(z) \xmapsto{f} f^2(z) \xmapsto{f} f^3(z) \xmapsto{f} \cdots$$

は**初期値** (initial value) z の**軌道** (orbit) と呼ばれる．したがって，充填ジュリア集合をあたえる数列 $Z_n(z,c)$ や，マンデルブロー集合をあたえる数列 $C_n(c) = Z_n(0,c)$ は力学系 $f = f_c \curvearrowright \mathbb{C}$ の中にある軌道のひとつに過ぎない，ということになる．

1.5.2 力学系理論の目標

上のような設定で力学系が与えられたとき，次のような「目標」を立てるのは自然であろう：

力学系理論の目標１．軌道をすべて分類すること．

軌道には，時間の経過に伴い無限大に発散するものや，ある場所に留まるもの，どこかに収束するものなどさまざまな可能性が考えられる．そのすべての可能性を適度なカテゴリーのもとで分類しよう，というのである．ひとつ具体例をみてみよう．

具体例． 2 次多項式による力学系でももっとも簡単なのは，$f_0(z) = z^2$ による力学系である．この場合，$z = z_0$ を初期値にとると，軌道は

$$z \xmapsto{f_0} z^2 \xmapsto{f_0} z^4 \xmapsto{f_0} z^8 \xmapsto{f_0} \cdots$$

となる．すなわち，$f_0^n(z) = z^{2^n}$ と書き下すことができる．次に，軌道の振る舞いを調べてみよう．$z = re^{2\pi i\theta}$ と極表示すれば，ド・モアブルの定理より

$$f_0^n(z) \;=\; z^{2^n} \;=\; r^{2^n}(\cos 2^n\theta + i \sin 2^n\theta)$$

をえる．とくに，$|f_0^n(z)| = r^{2^n}$ であるから，$n \to \infty$ のとき，軌道の振る舞いは大きく分けて次の 3 通りが考えられる：

ア．$0 \le r < 1$ のとき：$|f_0^n(z)| \to 0$ すなわち軌道は 0 に収束．

[23]一般に集合 X とその上の写像 $f : X \to X$ があれば，力学系は定義できる．とくに，X として複素多様体，f として正則写像があたえられた場合を**複素力学系** (complex dynamics) とよぶ．また，離散時間を用いる力学系は**離散力学系** (discrete dynamical systems) とも呼ばれる．

イ. $r > 1$ のとき：$|f_0^n(z)| \to \infty$ すなわち軌道は絶対値が ∞ に発散.

ウ. $r = 1$ のとき：$|f_0^n(z)| = 1$ すなわち軌道は単位円周 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ から出ない.

アに対応する z の全体は，ちょうど単位円板 $\mathbb{D}$ である．以下記号として，イ，ウに対応する複素平面の部分集合を

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \\ \mathbb{J} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \end{aligned}$$

と定義しておく．これらの集合はこのあともしばしば登場して，重要な役まわりを演じるであろう.

さてこの 3 分類が正しいことを確認するための，数値的なシミュレーションを実行したいとしよう．たとえば，適当に単位円周 $\mathbb{J}$ 上の点 z を固定し，軌道を小数点以下 20 桁の精度で数値計算してみる．もし $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = (\sqrt{3} + i)/2$ だとすると，無理数が含まれるので

$$Z = 0.86602540378443864676 + 0.50000000000000000000i$$

のような値（実部・虚部ともに有理数！）で近似してから $f(Z) = Z^2$ の計算を行うことになるであろう．そして，この値が $f(z) = z^2$ の良い近似値をあたえていると期待される．果たしてウのように，$|f(z)| = 1$，すなわち $f(z) \in \mathbb{J}$ と結論することができるであろうか？

コンピュータでなく手計算で，真の値 $f(Z) = Z^2$ をもとめたとしよう．この場合，得られる結果はたいへん微妙である：Z と z は虚部が同じで，実部のみがわずかに異なる．単位円周の絵を思い浮かべれば，$Z \notin \mathbb{J}$ となることがわかる．したがって $f(Z)$ の真の値も $\mathbb{J}$ 上には存在しえない．すなわち，かならず $f(Z) \in \mathbb{D}$ もしくは $f(Z) \in \mathbb{B}$ となるのである.

もちろん，$|f(Z)|$ の値は極めて 1 に近い．その意味で $f(Z) \in \mathbb{J}$ と結論するならば誤差はわずかであろう．しかし，さらなる軌道上の点はどうだろうか？残念ながら，n が大きくなればなるほど，n 秒後 $f^n(Z)$ の値をもとに $f^n(z) \in \mathbb{J}$ を結論できる根拠は薄くなる．[24] しかもこのあいまいな状況は，実部の近似精度を上げることによって克服できるものではない.

一方で，最初から $z \in \mathbb{D}$ とした場合はどうだろう？単位円板 $\mathbb{D}$ は開集合であるから，z の十分近くから近似値 Z を選べばかならず $Z \in \mathbb{D}$ とできる．このとき，$f^N(Z)$ の真の値は常に $\mathbb{D}$ 内にあり，$f^N(Z) \to 0$ $(n \to \infty)$ をみたす．結果としてはアと同じ結論をえるから，その意味で近似による「行く末」の変化はみられない．最初から $z \in \mathbb{B}$ とした場合も同様である.

[24]たとえば宇宙開闢以来の時間，約 137 億年＝ 4.3×10^{17} 秒後はどうか．これよりもっと大きな n も考えるのが数学という学問である.

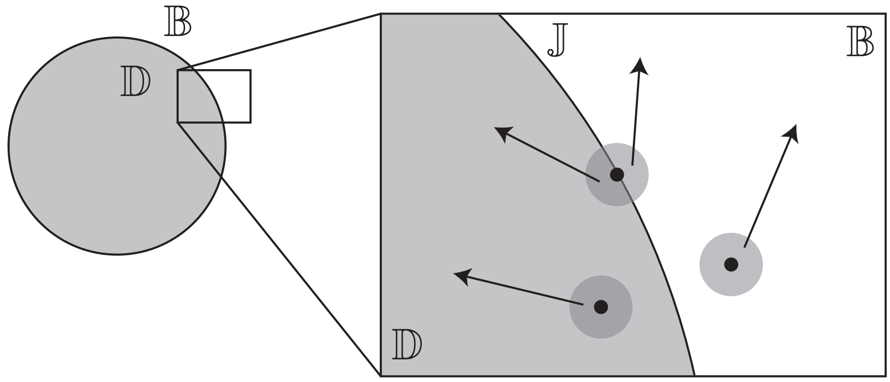


図 1.14: 誤差による「行く末」の変化．$\mathbb{J}$ 上でのみ，著しい変化がおきうる．

この例にみられるように，近似や誤差に対する安定性・不安定性は，近似方法の良し悪しではなく，力学系に内在する本質的な性質だと考えられる．すなわち，次の目標として

力学系理論の目標２． 軌道の安定性を調べること．

が挙げられる．先ほどの例のように初期値 z_0 をわずかに変化させ $z_\epsilon = z_0 + \epsilon$ としたとき，その軌道はどの程度変化するのか？誤差 $|\epsilon|$ が十分に小さければ,「行く末」は同じだと結論できるのか？もしそうでなければ，そのような z_0 全体は特定できるのだろうか？

再び，$f_0(z) = z^2$ による力学系を考えてみよう．この場合 $f_0^n(z)$ は z^{2^n} となるが，このように反復合成がはっきりと書き下せる写像はきわめて稀である．一般に $f(z) = z^2 + c$ によって力学系の運動法則があたえられる場合，それを反復合成した式は非常に複雑な 2^n 次多項式となる．たとえば，$n = 4$ のときですら

$$\begin{aligned} f^4(z) \;=\; & \left(c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c\right) + 8\left(c^7 + 3c^6 + 3c^5 + 2c^4 + c^3\right) z^2 \\ & + \left(28c^6 + 60c^5 + 36c^4 + 16c^3 + 4c^2\right) z^4 + \left(56c^5 + 80c^4 + 24c^3 + 8c^2\right) z^6 \\ & + \left(70c^4 + 60c^3 + 6c^2 + 2c\right) z^8 + \left(56c^3 + 24c^2\right) z^{10} \\ & + \left(28c^2 + 4c\right) z^{12} + 8cz^{14} + z^{16} \end{aligned}$$

となり，もはや常人の代数的直感（因数分解可能性など）を受けつけない．$n = 10$ の場合では，$f^{10}(z)$ は 1024 次式にもなる．軌道（＝数列 $\{f^n(z)\}_{n\geq 0}$ ）の振る舞いを考えるということは，かくも恐るべき多項式の無限列を考えることに他ならないのである．

それ比べると，先ほどの $f_0(z) = z^2$ による力学系は際立って簡単であることがわかる．だからといって，係数の近い $f(z) = z^2 + 0.00001$ の力学系がどのようなものか，想像がつくだろうか？驚くべきことに，現代の複素力学系理論はこの問いに明解な答えをあたえることができるのである．それは，一般に力学系理論が次のような問題意識をふまえて発展してきたからである：

力学系理論の目標 3． 力学系を分類すること．
力学系理論の目標 4． 力学系そのものの安定性を調べること．

力学系とは世界を，宇宙を単純化したモデルである．このモデルとして，どのような種類がありうるのか？たとえば，写像 $\{f_c : z \mapsto z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$ のような 2 次多項式の範囲で，どのようなタイプの力学系が生じうるか？何らかの指標を用いて，これらを分類することはできるか？また，c と c' が近いとき，力学系 $f_c \curvearrowright \mathbb{C}$ と力学系 $f_{c'} \curvearrowright \mathbb{C}$ は力学系としてどの程度近いといえるのか？ $z \in \mathbb{C}$ を固定したとき，軌道 $\{f_c^n(z)\}_{n\geq 0}$ の「行く末」は軌道 $\{f_{c'}^n(z)\}_{n\geq 0}$ の「行く末」によって近似できるのか？

以上，目標 1 から 4 のような問題意識が，複素力学系理論の根底に流れている．

次の章では，力学系という動的な世界観を踏まえて，充填ジュリア集合とマンデルブロー集合の定義をもう一度見返してみよう．じつは，充填ジュリア集合とは，「目標 1・2」と関連し，マンデルブロー集合は「目標 3・4」に強く関連しているのである．

1.6 力学系の中の充填ジュリア集合

それでは，充填ジュリア集合とマンデルブロー集合を，力学系という観点から再解釈してみよう．これらは一体，何者なのだろうか？

約束． このさき複素平面 $\mathbb{C}$ 上の力学系を考えるが，$\mathbb{C}$ における長さ 1 とは，われわれの世界における長さ 1km だと勝手に決めてしまおう．数学をやる上で実害はないし，こうしたほうが K_c や $\mathbb{M}$ がナスカの地上絵のようにイメージされて，なんとも楽しい．

1.6.1 無限の鉢と充填ジュリア集合

いま，複素数 c は固定された定数だとする．たとえば，物理定数（万有引力定数など）のようなものだと考えればよい．これによって定まる写像 $f_c(z) = f(z) = z^2 + c$ が力学系の「運動法則」をあたえることになる．[25]

f_0 との比較． まずは，$f(z) = z^2 + c$ のパラメーター c に依存しない性質をひとつ確認しておこう．$f(z) = z^2 + c$ と $f_0(z) = z^2$ を比べてみよう．そのまま差をとると，z に依存せずに

$$|f(z) - z^2| \;=\; |c|$$

という絶対誤差（比較したいもの同士の単純な差）が得られる．z がどこに行っても，この差は縮まらない．そこで，比

$$\frac{f(z)}{z^2} \;=\; 1 + \frac{c}{z^2}$$

[25] 写像 f は元来パラメーター c に依存している．c は固定されてはいるが，あえて c への依存性を強調したい場合は添え字をつけて f_c とも表すことにする．他の記号も同様である．

を考えてみよう．c は定数だと考えているので，$|z|$ が非常に大きいと c/z^2 は無視してよいぐらいに小さいと考えられる．すなわち，この式の右辺は 1 に近い．[26]

もうすこし具体的に，たとえば $|c| \leq 10$ とし，$|z| \geq 1000$ と仮定しよう．このとき，$|c/z^2| \leq 1/10^5$ となる．ということは，$1 + c/z^2$ という数は，複素平面上の 1 という数からわずか半径 10 万分の 1 程度の範囲に収まっている．これは，1km にたいして 1cm の誤差である．0.001 %以下の相対誤差だといってもよい．いま，

$$f(z) \ = \ z^2 \cdot \left(1 + \frac{c}{z^2}\right)$$

であるから，$f(z)$ は $f_0(z) = z^2$ によって 0.001 %以下の相対誤差で近似されていると考えられる．力学系の挙動も，非常に近いことが期待される．

このような性質は c の値によらず，十分大きな $|z|$ をとりさえすれば成立する．このとき，f_0 による z の軌道は絶対値が無限に発散するから，f による軌道も同様であろうと推察できる．

無限の鉢と充填ジュリア集合． このような考察から，力学系 $f = f_c \curvearrowright \mathbb{C}$ において，その軌道の絶対値が発散するような初期値全体は c によらない似通った性質をもつと期待される．そこで，そのような集合を**無限の鉢** (basin at infinity) と呼び，記号 $B = B_c$ と表す．[27]すなわち，

$$B \ := \ \{z \in \mathbb{C} : |f^n(z)| \to \infty \ (n \to \infty)\}$$

とする．一方で，絶対値が無限大に発散しない（＝その軌道が一様に有界である：命題 1.5）ような初期値全体を $f = f_c$ の**充填ジュリア集合** (filled Julia set) とよび，$K = K_c$ で表す．すなわち，

$$K \ := \ \mathbb{C} - B$$

である．とくに，B は開集合，K は閉集合であったことを思い出しておこう．

具体例． すでに充填ジュリア集合の絵はいくつかみてきたが，ここでは最も簡単な 2 次多項式の力学系である $f_0(z) = z^2$ について $B = B_0$ と $K = K_0$ を特定しておこう．先ほどと同様に，$f_0^n(z) = z^{2^n}$ を用いれば，

$$|z| \ > \ 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |f_0^n(z)| \ \to \ \infty \ \ (n \to \infty)$$

となることがわかる．すなわち，

$$B_0 \ = \ \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \ = \ \mathbb{B}$$

である．また，充填ジュリア集合 $K_0 \ = \ \mathbb{C} - B_0$ は

$$K_0 \ = \ \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \ = \ \overline{\mathbb{D}} \ = \ \mathbb{D} \cup \mathbb{J}$$

となる．これは閉単位円板である．

[26]数 $A, B \neq 0$ の B に関する相対誤差とは比 $|A - B|/|B| = |A/B - 1|$ のことをいう．この式は，$A = f_c(z)$ と $B = f_0(z)$ の相対誤差が非常に小さいことを意味する．

[27]あとでリーマン球面と無限遠点を導入し，この言葉の意味を明解にする．

1.6.2 充填ジュリア集合の完全不変性とジュリア集合

完全不変集合性. 一般に，写像 $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と集合 $Y \subset \mathbb{C}$ にたいし，$\phi(x) \in Y$ となるような x 全体を $\phi^{-1}(Y)$ と書き，これを Y の ϕ による**逆像** (inverse image) とよぶのであった．

さて力学系 $f_0 \curvearrowright \mathbb{C}$ において，B_0 と K_0 は

$$f_0(B_0) \;=\; B_0 \;=\; f_0^{-1}(B_0) \tag{1.1}$$
$$f_0(K_0) \;=\; K_0 \;=\; f_0^{-1}(K_0) \tag{1.2}$$

という性質を持っている．$|z| > 1 \iff |z^2| > 1$ および $|z| \leq 1 \iff |z^2| \leq 1$ が成り立つからである．

このように，像と逆像がもとの集合に一致する集合を力学系における**完全不変集合** (fully invariant set) とよぶ．[28]

練習問題． $f(z) = z^2 + c$ による力学系 $f \curvearrowright \mathbb{C}$ が 1 点からなる集合 $\{a\}$ を完全不変集合に持つならば，$c = a = 0$ であることをしめせ．また，$f \curvearrowright \mathbb{C}$ がちょうど 2 点からなる完全不変集合をもつことはあるだろうか？

一般に $f = f_c$ について，次が成り立つ：

命題 1.8 (完全不変性) B と K は f の力学系における完全不変集合である．すなわち，

$$f(B) \;=\; B \;=\; f^{-1}(B) \tag{1.3}$$
$$f(K) \;=\; K \;=\; f^{-1}(K) \tag{1.4}$$

したがって，任意の自然数 n について

$$f^n(B) \;=\; B \;=\; f^{-n}(B) \tag{1.5}$$
$$f^n(K) \;=\; K \;=\; f^{-n}(K) \tag{1.6}$$

等が成立することに注意しよう．(ただし，$f^{-n} = (f^n)^{-1}$ と置いた．）これは f の力学系において，B の点と K の点が過去・現在・未来の全てにおいて一切交わらないことを意味している．別の言い方をすれば，力学系 $(\mathbb{C}, f)$ は 2 つの独立した力学系 (B, f) と (K, f) に分解可能なのである．

証明 (命題 1.8)． 適当に $z \in \mathbb{C}$ をとり，さらに z の逆像 w をひとつ選ぶ．[29] このとき，軌道

$$w \xmapsto{f} z \xmapsto{f} f(z) \xmapsto{f} f^2(z) \xmapsto{f} f^3(z) \xmapsto{f} \cdots$$

[28] $f(X) = X$ のときを**不変集合** (invariant set) と呼び，$f^{-1}(X) = X$ のときを完全不変集合とよぶ．完全不変であれば不変となることは，$f(f^{-1}(X)) = X$ よりわかる．

[29] $f(w) = z$ となる w は 2 次方程式 $w^2 + c = z$ の解であるから，すくなくともひとつ存在している．

を考えよう．いま，$z \in B$ すなわち $|f^n(z)| \to \infty$ $(n \to \infty)$ と仮定しよう．これは $|f^{n+1}(w)| \to \infty$ および $|f^{n-1}(f(z))| \to \infty$ を意味するから，$w \in B$ および $f(z) \in B$ をえる．したがって $f^{-1}(B) \subset B$ かつ $f(B) \subset B$ である．

いま，$B \subset f^{-1}(f(B))$ に注意すると，$f(B) \subset B$ に f^{-1} をほどこすことで[30]

$$f^{-1}(f(B)) \subset f^{-1}(B) \implies B \subset f^{-1}(B)$$

をえる．したがって $f^{-1}(B) = B$．さらにこの両辺に f をほどこして，$B = f(B)$ をえる．以上で (1.3) が示された．(1.4) の証明も同様である．■

練習問題． 上の証明は記号の操作ばかりで，ほとんど頭を使う必要がなかった．そこで，命題の意味を具体的にイメージし，これが正しいことを直感で納得せよ．

安定・不安定軌道とジュリア集合． いま，$z \in B$ を固定してみる．B は開集合であったから（系 1.6），z のまわりに十分小さな円板をとれば，それがすっぽりと B に入っている．この円板内の点を初期値とする軌道はすべて絶対値が無限大に発散するから，「行く末」を共有している．その意味で初期値の誤差に関して安定だといってよい．[31]

一方，$f \curvearrowright B$ と $f \curvearrowright K$ は独立した力学系とみなせるが，実際には同じ複素平面上で接しあっている．これらの境界部分は，軌道が有界に留まるか留まらないか，その瀬戸際の部分である．このような場所には，数学的に面白い構造が期待できるものである．そこで，$f = f_c$ による力学系の**ジュリア集合** (Julia set) $J = J_c$ を

$$J \ := \ \partial K \ = \ \partial B$$

により定義する．ジュリア集合上の点 z を固定しよう．境界の定義から，z のまわりにどんなに小さな円板を取っても，B の点と K の点が両方含まれている．これは，初期値を微小量だけ変化させたとき，それが B に入るか K に入るかに応じて，軌道が大きく変化しうることを意味している．すなわち，ジュリア集合は誤差や近似を許さない，不安定な初期値の集合だと考えられる．[32]

では，力学系の残りの部分，K の内部

$$K^\circ \ = \ \mathbb{C} - B \cup J$$

の軌道は安定といえるだろうか? この部分は空集合になることも多いが（K_c が樹上突起 z^2+i やカントール集合になる場合を思い出そう），結論を先取りしておくと，もし空集合でなければ軌道は誤差や近似にたいし「安定」となる．ただ，これがどう「安定」なのか，K° の力学系を数学的に明解に記述することも，次章以降の課題である．

---

[30]集合の基本性質：写像 $f : X \to Y$ があるとき，$P \subset Q \subset X$ ならば $f(P) \subset f(Q) \subset Y$．また，$P \subset Q \subset Y$ ならば $f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q) \subset X$．

[31]そろそろ,「行く末」,「安定」といったあいまいな言葉遣いに違和感を覚え始めた人もあるかもしれない．これらに数学的厳密さを与えるには，どのように定義すればよいだろうか？とりあえずは今後の課題ということにして,「軌道の絶対値が無限大に発散する」という性質が共有されているという，その状況に限定してこれらの言葉を使うことにしよう．

[32]歴史的にみれば，充填ジュリア集合はジュリア集合から派生したものだと考えられる．本来はジュリア集合こそが力学系的に面白い数学的対象であり，われわれの視点も少しずつジュリア集合のほうにシフトしていくことになるであろう．

練習問題． $\mathbb{C} = X \sqcup Y$ すなわち $X = \mathbb{C} - Y$ とする．このとき，$\partial X = \partial Y$ となることをしめせ．

練習問題． J も力学系 $f \curvearrowright \mathbb{C}$ の完全不変集合であることをしめせ．

1.6.3 マンデルブロー集合の力学系的定式化

次に，マンデルブロー集合の定義を見返してみよう．いま,「物理定数」c を変化させ，力学系の「運動法則」$f = f_c$ そのものを変化させることを考えてみよう．複素数 c は力学系 $f \curvearrowright \mathbb{C}$ にバラエティーをあたえる唯一の要素であり，これを**パラメーター** (parameter) とよぶことにする．

さてパラメーター c が自由に変化できる状況では，無限に広い $\mathbb{C}$ 上で力学系がどのように変化するのか，観測することはむずかしい．[33]そこで，次のような方法をとる：どんな社会にもキーパーソンと呼ばれる人がいて，その人の行動が社会全体の動向を決定したり，また社会全体の動向を反映していたりするものである．すなわち，おのおのの力学系 $f \curvearrowright \mathbb{C}$ においてキーパーソンたる一点を定め，その軌道の c に応じた変化を調べるのである．実際，複素力学系にはかならずそのようなキーパーソン的な点がひとつ，もしくは複数個存在していて，これらの軌道が力学系のバラエティーや安定性の指標となることが分かっている．

さてわれわれの 2 次多項式 $f(z) = z^2 + c$ の場合は，どの点をキーパーソンとして選ぶべきだろうか？ここで，マンデルブロー集合を定義する数列 $C_n(c)$ を思い出そう．これまでの考察により，

$$f^n(0) \ = \ Z_n(0, c) \ = \ C_n(c)$$

であったから，数列 $C_n(c)$ は $z = 0$ の軌道

$$0 \ \stackrel{f}{\longmapsto} \ f(0) = c \ \stackrel{f}{\longmapsto} \ f^2(0) \ \stackrel{f}{\longmapsto} \ \cdots$$

そのものである．すなわち，われわれは複素平面上の 1 点，$z = 0$ をキーパーソンと見立て，力学系の変化をとらえようとしていたのである．[34]

ここで一旦，マンデルブロー集合の定義を $z = 0$ の軌道によって読み替えよう．まず，$z = 0$ の軌道の絶対値が無限大に発散するようなパラメーター c 全体を H_∞ で表す．すなわち，

$$\begin{aligned} H_\infty \ &:= \ \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \to \infty \ (n \to \infty)\} \\ &= \ \{c \in \mathbb{C} : 0 \in B_c\} \end{aligned}$$

[33]実際，力学系の舞台である「空間」もパラメーターが棲む場所も複素平面であるから，トータル実 4 次元分もの自由度がある．このようなトータルな世界を**相空間** (phase space) は呼ばれる．

[34]もうすこし具体的にたとえれば，c が円・ドルの為替レート，$f_c \curvearrowright \mathbb{C}$ が日本経済全体として，$z = 0$ の軌道は日銀総裁の行動といったところか．$\mathbb{M}$ への理解が深まると，このような「たとえ」も，結構本質を突いているように思われてくるだろう．

とする．また，その軌道が有界であるようなパラメーター全体を**マンデルブロー集合** (the Mandelbrot set) とよび，$\mathbb{M}$ で表すのである．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathbb{M} \ := \ \mathbb{C} - H_\infty \ &= \ \{c \in \mathbb{C} \ : \ |f_c^n(0)| \nrightarrow \infty \ (n \to \infty)\} \\ &= \ \{c \in \mathbb{C} \ : \ 0 \in K_c\}\end{aligned}$$

である．とくに，H_∞ は開集合であり，$\mathbb{M}$ は閉集合であったことを思い出しておこう．

いま $c \in H_\infty$ を固定してみる．H_∞ は開集合であるから， c のまわりに十分小さな円板をとれば，H_∞ のなかにすっぽりと収まってしまう．この円板内のパラメーター c においては，キーパーソン $z = 0$ の軌道の絶対値がいずれも無限大に発散する．この意味で,「社会」$f_c \curvearrowright \mathbb{C}$ 自体も何らかの意味で安定していることが期待される．[35]

さていま重要な問題は，なぜ $z = 0$ という点が力学系の性質を代表するキーパーソンとして選ばれたのか，ということであろう．たとえば $z = 1$ や $z = i$ の軌道ではダメなのだろうか？

じつは，ダメなのである．[36]あとでみるように，写像 $f = f_c$ が $z = 0$ を c に写す際の複素解析的性質が，充填ジュリア集合や力学系そのものの構造を決定するうえで極端に重要な意味をもっている．まさにキーパーソンなのである．

加えて，マンデルブロー集合の定義，充填ジュリア集合の定義，および命題 1.8 より，

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{マンデルブロー} & & \text{充填ジュリア} & & \\ c \notin H_\infty & \Longleftrightarrow & c \in \mathbb{M} & \Longleftrightarrow & c \in K_c & \Longleftrightarrow & c \notin B_c \\ c \in H_\infty & \Longleftrightarrow & c \notin \mathbb{M} & \Longleftrightarrow & c \notin K_c & \Longleftrightarrow & c \in B_c \end{array}$$

という関係が性質していることは着目すべきであろう．この関係には，20 世紀初頭ファトウ (P.Fatou) とジュリア (G.Julia) によって証明された定理（このノートでは定理 3.14）によって，より深遠な意味づけがなされる．それを理解するためには，数列や漸化式といった枠組みを忘れ，複素力学系という視点に切り替えなくてはならない．

ここからが，本番である．

[35]この議論，無限の鉢 B に関する議論に似ていると思われないだろうか？同様に考えると，$\partial\mathbb{M}$ にはジュリア集合 J に対応する特別な意味がありそうだし，$\mathbb{M}^\circ$ にも K° に対応するなにかを期待してしまう．実際その発想は正しくて，(B, J, K) と $(H_\infty, \partial\mathbb{M}, \mathbb{M}^\circ)$ のトリオたちは「正規族」という概念によって統一的に記述することができるようになる.（あくまで記述だけで，実体はやはり異なる.）

[36]ときどき，$z = 0$ 以外の点の軌道を用いた「マンデルブロー集合モドキ」の絵をみかけるが，おそらく数学からは離れた趣味的な絵であろう.

第2章　2次多項式の複素解析

2.1　アファイン写像と力学系の共役

この章では，われわれがなぜ z^2+c という形の特殊な2次多項式の力学系を考えるのか，という問題に便宜的な解答をあたえる．また，複素平面上の力学系を解釈する際のひとつのスタンスとして,「白紙上の力学系」という考え方を解説する．これは，力学系により深いリアリティーをあたえるための感覚的技法である．同時に，力学系の**（アファイン）共役**という重要な概念を導入する．この概念は,「白紙上の力学系」のうえに，かなり自由に（そして恣意的に）座標系を設定できる，という事実から自然と生じるものである．数学上の見かけにとらわれず，その意味するところを玩味してほしい．

2.1.1　アファイン写像

複素平面上の力学系を考えよう．このとき,「運動法則」のもっとも簡単なものとして複素係数の多項式写像を考えるのは自然であろう．たとえば，$a \neq 0$ として

$$
\begin{aligned}
f(z) &= az+b \\
f(z) &= az^2+bz+c \\
f(z) &= az^3+bz^2+cz+d \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

といったものを考えればよい．

ではなぜ，われわれは $f(z)=z^2+c$ という形をとくに選んで，その力学系を考えたのか？その理由は，次の3点に要約される：

1. 1次多項式 $f(z)=az+b$ による力学系は簡単に理解できる．
2. 2次多項式 $f(z)=az^2+bz+c$ による力学系は，すべて $f(z)=z^2+c$ による力学系と思うことができる．
3. 3次以上の多項式による力学系は（2次多項式に比べ）難しすぎる．

この章では，(a) と (b) についてその根拠を述べる．(c) については，ノートの後半で一般的な複素力学系理論として概説する予定である．

1 次多項式の力学系． では,「簡単すぎる」1 次多項式 $f(z) = az + b$ $(a \in \mathbb{C} - \{0\})$ による力学系について調べてみよう．このような 1 次式は**複素アファイン写像** (complex affine map) と呼ばれる．このノートでは,「アファイン写像」と言ったら複素アファイン写像のことだと約束しておく．[1]

さてまずは，アファイン写像の性質の中で力学系の解析に欠かせないものをいくつか列挙しておく．最初にあげるのは，式の形から明らかな性質である：

> **アファイン写像の性質その１．** アファイン写像 $f(z) = az + b$ は二つの単純なアファイン写像，拡大回転 $z \mapsto az$ と平行移動 $z' \mapsto z' + b$ の合成である．

したがって,

> **アファイン写像の性質その２．** アファイン写像は $\mathbb{C}$ 上の集合を相似な集合に写す．

また，次のような視点も重要である：

> **アファイン写像の性質その３．** アファイン写像 f は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への同相写像である．

ここで $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が**同相写像** (homeomorphism, topological map) であるとは，次のように理解すればよい：$\mathbb{C}$ 全体を平面に敷かれた透明なゴム膜だと思い，それを伸び縮みさせたあと，再び平面全体へ，しわにならないよう，重ならないようにずらして置く．[2]このようなゴム膜上の点の移動を表すものが一般の同相写像である．[3]

同相写像に関して注目すべきことは，$f : z \mapsto w$ のとき，逆の対応を考えて $g = f^{-1} : w \mapsto z$ という写像が構成できることである．実際,

$$f(z) = w \iff az + b = w \iff z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a} =: g(w)$$

と表現できる．したがって，次の性質が得られる：

> **アファイン写像の性質その４．** アファイン写像 f の逆写像 $g = f^{-1}$ もアファイン写像である．

---

[1]一般に平面のアファイン写像とは $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (ただし $ad - bc \neq 0$, 係数はすべて実数) となるものをいう．複素アファイン写像はこの行列部分にある種の制約をつけたものだと解釈できる．この制約が何なのかは，次章のなかで暗にしめされるだろう．ちなみに「アファイン (affine)」という言葉には，適当な訳語がみつからないようである．仏語の affiner という動詞には「精製する」,「洗練する」といった意味があるが，これがその語感の手がかりになるかもしれない．

[2]ちなみに，ゴム膜は全体をそっくり裏返して置いても構わないが，アファイン変換はそのような手間のかかることはしない．また，伸び・縮みの具合も一様である．

[3]集合・位相論の言葉を用いれば「f は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への全単射であり，かつ f とその逆写像 f^{-1} がともに連続である」と表現される．

さらに，同相写像に同相写像を合成しても，やはり同相写像である．とくにアファイン写像の場合，次が成り立つ：

> **アファイン写像の性質その５．** アファイン写像 f と g の合成 $f \circ g$ もまた，アファイン写像である．

証明は難しくないので，読者にまかせよう．

2.1.2 力学系の共役

さてアファイン写像による力学系をみてみよう．天下り的だが，次のように場合わけする．

- $a = 1$ のとき．
- $a \neq 1$ のとき．

$a = 1$ のとき，平行移動． アファイン写像は $f(z) = z + b$ $(b \in \mathbb{C} - \{0\})$ の形である．すなわち，複素平面全体が $+b$ 分ずらされる作用である．初期値 z_0 にたいし，軌道は

$$z_0 \overset{f}{\longmapsto} z_0 + b \overset{f}{\longmapsto} z_0 + 2b \overset{f}{\longmapsto} z_0 + 3b \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

となり，等差数列で表現できる．とくに，n 秒後の点 $z_n = f^n(z_0)$ は $z_0 + nb$ と書けるから，未来が完全に予測できる．

もうひとつ重要な性質は，平行移動は $\mathbb{C}$ 上に**固定点** (fixed point) を持たない，ということである．すなわち，$f(\alpha) = \alpha$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在せず，すべての点は b という複素数が指ししめす方向へひたすら移動する．したがって，力学系に現れる軌道はすべて $|z_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ を満たすことになり，いずれも「行く末」を共有する．この意味で，軌道はすべて安定している．

$a \neq 1$ のとき，ある点を中心とする回転＋拡大． 先ほど固定点に着目したが，この場合方程式 $f(z) = z$ は解をもち，固定点 α が存在する．実際，

$$az + b \ = \ z \iff z = \frac{b}{1-a} \ =: \ \alpha$$

であり，α は唯一の固定点である．この α を用いて $f(z)$ を変形すると，

$$f(z) \ = \ az + b \iff f(z) - \alpha \ = \ (az + b) - (a\alpha + b) \ = \ a(z - \alpha)$$

となる．初期値 z_0 と n 秒後の点 $z_n = f^n(z_0)$ にたいし右の式を用いると，

$$\begin{aligned} z_n - \alpha \ &= \ a(z_{n-1} - \alpha) \\ &= \ a^2(z_{n-2} - \alpha) \\ &= \ \cdots \\ &= \ a^n(z_0 - \alpha) \end{aligned}$$

すなわち $z_n = a^n(z_0 - \alpha) + \alpha$ をえる．これも，n 秒後の点の位置があらかじめ特定できるという意味で「簡単」である．($f(z) = z^2 + c$ の場合，実際に n 回 f を反復計算してみないと，n 秒後の位置は特定できない．)

座標変換という考え方． すでに気づかれた方も多いだろうが，上記の議論は典型的な 2 項間漸化式の解法に従っている．しかし，$a \neq 1$ の場合，一般項は得られたものの，点たちがどのように移動しているのか，やや分かりづらいかもしれない．そこで,「座標変換」もしくは「共役」という考え方を導入して．上の議論を見直してみよう．

いま，$f(z) = az + b$ と同値な式 $f(z) - \alpha = a(z - \alpha)$ を次のように解釈してみる：

$$(\alpha \text{ から見た } f(z) \text{ の位置}) \ = \ a \times (\alpha \text{ から見た } z \text{ の位置})$$

同様に考えると，元の式は $f(z) - 0 = a(z - 0) + b$ すなわち

$$(0 \text{ から見た } f(z) \text{ の位置}) \ = \ a \times (0 \text{ から見た } z \text{ の位置}) + b$$

と考えられるが，あきらかに前者の方が意味が解釈しやすい．このように，視点を替える操作が以下で述べる「座標変換」の操作である．

白紙上の力学系． 複素平面とは，元来は白紙の平面だったものに，実軸と虚軸を描いた透明なシート (transparency，OHP シートのようなもの) をかぶせたものだ，とも考えられる．このシートにより，白紙上の各点に複素数の名前 z が一斉につけられる．これが**座標系** (coordinate system) である．とくにこのシートを「z シート」とよび，この座標系を「z 座標系」と呼ぶことにしよう．

いま，白紙の平面上の点全体が，ある規則にのっとり，一秒ごとに移動しているようである．これを便宜的に,「白紙上の力学系」と呼ぶことにしよう．

さてこの「白紙上の力学系」をさきほどかぶせた z シートで観測したところ,「運動法則」は幸運にもアファイン写像 $f(z) = az + b$ によって表現されることがわかった．こうして得られたのが，われわれの力学系だった，と考えてみる．

しかしこのような力学系の表現 $z \mapsto az + b$ は，現象を原点 $z = 0$ を基準として見ているからそうなるのである．上でみたように，$z = \alpha$ 基準の式解釈によれば，その作用はもっとわかりやすい．そこで，z シートのコピー「w シート」を準備しその上に完全に重ね，つぎに z シートにおける α が表す点と w シートにおける原点た一致するように，w シート全体を平行移動させる．

この w シートが定めるあたらしい座標系（w 座標系）のもとでは，運動法則は

$$w \ \mapsto \ aw \ \mapsto \ a^2 w \ \mapsto \ a^3 w \ \mapsto \ \cdots$$

と表されるはずである．すなわち，等比数列が生成される．

この状況は，図 2.1 のように表現される．われわれは z 座標系上の $f : z \mapsto az + b$ による力学系からスタートしたが，これは本来，左端の「白紙上の力学系」を z シート越しに眺めていたのである．さらに，それを別の w シートによって眺めることで，拡大・回転のみによる単純な運動法則 $w \mapsto aw$ をえる．そしてあきらかに，こちらのほうが力学系として理解しやすい．

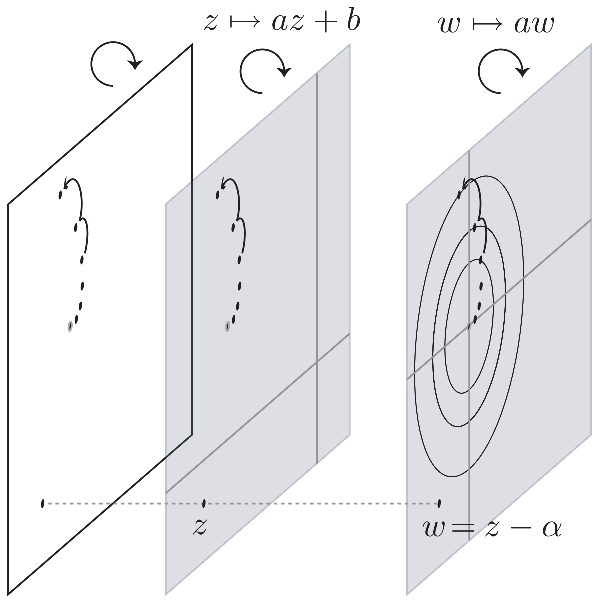


図 2.1: 「白紙上の力学系」の運動法則は z 座標と w 座標でそれぞれ異なる形で表現される．

w シート全体はもとの z シートと重なり合った位置から．$+\alpha$ 平行移動されている．したがって，元来 z シート（z 座標系）上で複素数 z と名づけられた白紙上の点は，w シート（w 座標系）によって複素数 $w = z - \alpha$ と名づけられる．すなわち，白紙上の点全体が，$w = \phi(z) := z - \alpha$ というルールに基づき一斉に名前を変更されたことになる．このように，一斉に白紙上の点の名前を変える行為を**座標変換** (coordinate change) とよぶ．とくに ϕ のように，名前の変換ルールがアファイン写像の形（この場合は平行移動）であたえらている場合を**アファイン変換** (affine transformation) とよぶ．

図 2.1 を眺めると，写像 $f : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_z$ (z 座標系でみた白紙の平面) と $g : \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}_w$ (w 座標系でみた白紙の平面) の関係は

$$g(w) \;=\; \phi \circ f \circ \phi^{-1}(w)$$

で表されることがわかる．すなわち，w 座標系から $z = \phi^{-1}(w)$ によって一旦 z 座標系の名前に直し，f を作用させる．さらに，その結果を ϕ により再び w 座標系に戻すのである．

力学系 $f \curvearrowright \mathbb{C}_z$ と $g \curvearrowright \mathbb{C}_w$ の間の関係は，次のような図式で表現される：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{C}_z & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_z & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}_z & \xrightarrow{f} & \cdots \\
{\scriptstyle \text{名前の変更}}\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow \\
\mathbb{C}_w & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}_w & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}_w & \xrightarrow{g} & \cdots
\end{array}$$

写像の共役． 一般にこのような名前の一斉変換ルール $w = \phi(z)$ は自由に選ぶことができるのであって，その意味で，われわれが別の力学系だとおもっていたふたつの力学

系 $f \curvearrowright \mathbb{C}$ と $g \curvearrowright \mathbb{C}$ が，じつは互いに座標変換で写りあう，おなじ「白紙上の力学系」の異なる表現であった，ということも考えられる．この状況を数学的に定式化しよう：

定義．（アファインとは限らない）二つの写像 $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ にたいし，ある同相写像 $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在して $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ をみたすとき，f と g は**共役** (conjugate) であるという．[4]とくに ϕ としてアファイン写像が取れるとき，f と g は**アファイン共役** (affine conjugate) であるという．また，これらで生成される力学系 $f \curvearrowright \mathbb{C}$ と $g \curvearrowright \mathbb{C}$ も互いに（アファイン）共役であるとよぶ.

たとえば上の $f(z) = az + b$ と $g(w) = aw$ は，アファイン変換 $w = \phi(z) = z - \alpha$ によってアファイン共役となる．ただし，ここでいうアファイン写像は，$\phi : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$ という異なる複素平面のコピー間のアファイン写像だとみなすべきであろう

練習問題． $f \curvearrowright \mathbb{C}$ と $g \curvearrowright \mathbb{C}$ による力学系が写像 $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ により互いに共役であると仮定する．このとき，f の固定点 α の像 $\phi(\alpha)$ は g の固定点であることをしめせ.(共役の意味を考えればあたりまえのことであるが，それを納得した上で，式による証明をせよ.）

力学系の正規化． われわれが物事を観測するとき，望遠鏡や顕微鏡といった「レンズ越し」に行うことが普通である．観測したいものが視野に入るように，必要に応じて回転・拡大，平行移動も行うであろう．アファイン共役をとり力学系の異なる表現をえることは，観測したいものが都合よく視野に入るように調節する行為に対応する．

このように，力学系を共役により簡明な形で表現しなおす行為を，**正規化する** (normalize) とよぶ．たとえば，

命題 2.1 恒等写像でないアファイン写像 $f(z) = az + b$ $(a \neq 0)$ による力学系は，適当なアファイン変換 $w = \phi(z)$ により次の 2 通りの写像による力学系に正規化できる：

- $a = 1$ のとき，平行移動 $w \mapsto w + 1$.
- $a \neq 1$ のとき，拡大・回転 $w \mapsto aw$.

証明． $a \neq 1$ の場合はすでに考察したから，平行移動 $f(z) = z + b$ $(b \neq 0)$ の場合だけ考えれば十分であろう．この場合，アファイン変換（座標変換）として $w = \phi(z) = z/b$ とすればよい. ■

軌道の安定性． 上の命題で与えれらる正規化によって，アファイン写像の力学系から生じる軌道は完全に予測できる．まず $a = 1$ の場合，軌道は平行移動によってすべて絶対値が無限大に発散する．$a \neq 1$ の場合，力学系としては次の 3 通りが考えられる：

1. $|a| < 1$ のとき，すべての軌道は原点 $w = 0$ に収束する．
2. $|a| > 1$ のとき，すべての軌道は $w = 0$ を除き，絶対値が無限大に発散する．

3. $|a| = e^{2\pi i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ のとき，すべての軌道は $w = 0$ を中心に角度 θ の回転を続ける．

これらをもとの z 座標によるアファイン写像 $f(z) = az + b$ による軌道と見る場合は，たんに固定点 $w = 0$ を固定点 $z = b/(1-a)$ と読みかえればよい．

2.1.3　2次多項式による力学系の正規化

複素数 $A \neq 0,\ B,\ C$ にたいし，2次多項式

$$f(z) = Az^2 + Bz + C$$

による力学系があたえられたと仮定しよう．これまでの文脈にそっていえば，ある「白紙上の力学系」があって，それに z シート（座標系）をのせて計測したところ，その「運動法則」が（たまたま？）2次多項式 $z \mapsto Az^2 + Bz + C$ であった，ということになる．

今 f には複素数の係数が3つあり，複素3次元=実6次元分の自由度（種類）があるようにみえる．しかし，次の命題がしめすように，これらは本質的に複素係数1つ分の自由度しかないのである：

命題 2.2 (2次多項式の正規化) 2次多項式 $f(z) = Az^2 + Bz + C$ $(A \neq 0)$ による力学系は，2次多項式 $g(w) = w^2 + c$ とアファイン共役である．ただし，$c = -B^2/4 + B/2 + AC \in \mathbb{C}$ である．

すなわち，おなじ「白紙上の力学系」でも，別の w シート（座標系）をうまく作って計測すれば,「運動法則」は $w \mapsto w^2 + c$ で表すことができるのである．とくにこの座標変換は，アファイン写像というよ簡単な1次式で書けてしまう．

証明． 天下り的だが，$f(z)$ の式の両辺に A を掛けて，

$$\begin{aligned} Af(z) &= A^2z^2 + ABz + Ac \\ &= \left(Az + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + AC \\ \iff \quad Af(z) + \frac{B}{2} &= \left(Az + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + \frac{B}{2} + AC. \end{aligned}$$

したがって $T(z) = Az + \dfrac{B}{2}$ とおくと，これはアファイン写像であり，

$$T(f(z)) = \{T(z)\}^2 - \frac{B^2}{4} + \frac{B}{2} + AC$$

となる．さらに $c = -\dfrac{B^2}{4} + \dfrac{B}{2} + AC$ とおくと，これは次のようにまとめることができる．

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{T} & T(z) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow \\ f(z) & \xrightarrow{T} & \{T(z)\}^2 + c \end{array}$$

したがって，T というレンズで見れば，f による力学系は $T(z)$ を $\{T(z)\}^2 + c$ に移す力学系とみなすことができる．よって $w = T(z)$ とおくと，f による力学系は

$$g(w) = w^2 + c$$

と同じものであることがわかる．とくに，$g = T \circ f \circ T^{-1}$ をみたす．すなわち，f と g はアファイン共役である． ■結局，f による力学系も g による力学系も，もとは同じ「白紙上の力学系」であり，観測結果を記録する際に異なる座標系で表現しているに過ぎない．

さらに，この正規化は次の意味で効率が良い：

命題 2.3 (もっとも無駄のない正規化) $c \neq c'$ のとき，$f_c(z) = z^2 + c$ と $f_{c'}(z) = z^2 + c'$ は互いにアファイン共役にはなり得ない．

証明. 互いにアファイン共役だと仮定しよう．いま，ある $w = \phi(z) = pz + q$ が存在して，$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w^2 + c'$ すなわち $\phi \circ f(z) = \phi(z)^2 + c'$ となるはずである．両辺の係数を比較すると，$p = 1, q = 0, c = c'$ 以外ありえない． ■

したがって，2 次多項式の力学系は過不足なく，ちょうど $c \in \mathbb{C}$ 分の自由度があることがわかる．以上のことから，今後「2 次多項式の力学系」と言ったら，$f(z) = z^2 + c$ の形の力学系を考えればよいことが正当化された．

次の章では，$f(z) = z^2 + c$ の写像としての作用を，大局・局所の両方の視点から詳しく調べていく．その過程でアファイン写像がたいへん重要な意味をもつことが理解されるであろう．

練習問題（別の正規化）． 任意の 2 次多項式は $f(z) = \lambda z + z^2$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ の形の 2 次多項式とアファイン共役であることをしめせ．この正規化は一意的でない．$f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ と $f_{\lambda'}(z) = \lambda' z + z^2$ がアファイン共役であるとき，λ と λ' の関係式をもとめよ．

練習問題（「別の正規化」の正規化）． 2 次多項式 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ について，集合 K^λ および $\mathbb{MM}$ を

$$\begin{aligned} K^\lambda &:= \{z \in \mathbb{C} : |f_\lambda^n(z)| \not\to \infty \ \ (n \to \infty)\} \\ \mathbb{MM} &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : |f_\lambda^n(-\lambda/2)| \not\to \infty \ \ (n \to \infty)\} \end{aligned}$$

と定義する．(図 2.2)

1. f_λ を $g(w)=w^2+c$ の形に正規化したとき，関数 $c=c(\lambda)$（λ の関数）をもとめよ．また，f_λ から g_λ への共役写像 T_λ（すなわち，$T_\lambda \circ f_\lambda = g_\lambda \circ T_\lambda$ をみたすアファイン写像）をもとめよ．
2. $\mathbb{MM}=\{\lambda\in\mathbb{C} : c(\lambda)\in\mathbb{M}\}$ をしめせ．
3. $K^\lambda = T_\lambda(K_{c(\lambda)})$ をしめせ．ただし，$K_{c(\lambda)}$ は g_λ の充填ジュリア集合である．

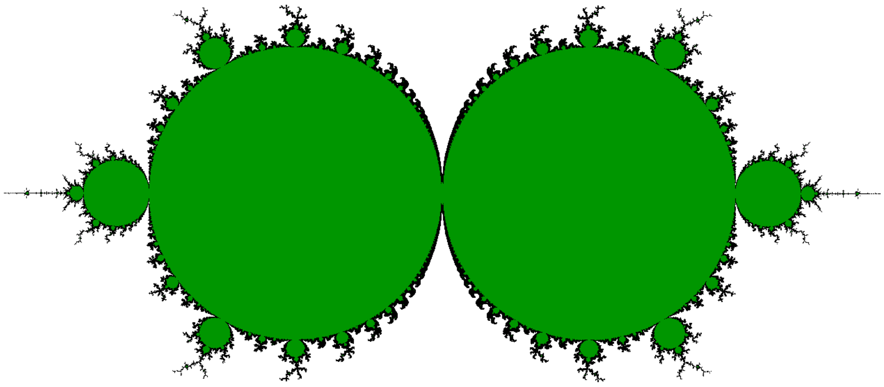


図 2.2: $\mathbb{MM}$ を $\mathbb{M}$ と同様のアルゴリズムで描いたもの．通称「ダブルマンデルブロー集合.」ふたつの大きな円板は中心が $\lambda=0$ および 2，半径はともに 1 である．

2.2 z^2+c の大局的・局所的作用

さてここからまた，$f(z)=z^2+c$ の力学系について見ていくことにしよう．[5] この章では，まず「運動法則」である写像 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ の作用を大局的に観察し，次に各点ごとに局所的な点の写り方を調べることにする．その過程で，われわれが力学系の「キーパーソン」として採用した $z=0$ が，**分岐点**という特殊な性質をもつ（$\mathbb{C}$ 上唯一の）点であることが明らかなる．

2.2.1 力学系の大局的な動き

2 次多項式 $f=f_c : z\mapsto z^2+c$ を考えよう．写像 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は

$$z \xmapsto{2\,\text{乗}} z^2 \xmapsto{\text{平行移動}} z^2+c \;=\; f(z)$$

と分解されるので，まずはそれぞれの作用を観察してみることにする．

[5]前章での議論によれば，われわれがこの形の力学系を考えるのはある程度納得されたことであろう．しかし，本質はあくまで「白紙上の力学系」であって，この z 座標系による正規化は「運動法則」を記述するための便宜的な表現であることを心にとめておこう

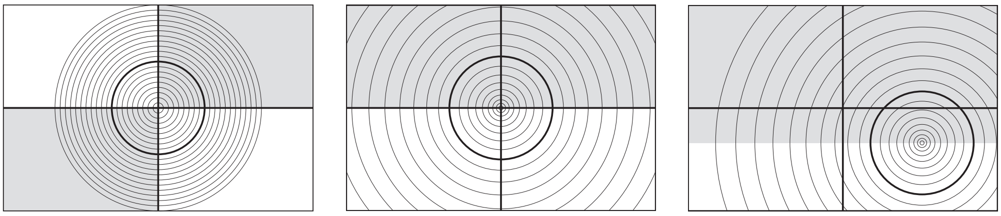


図 2.3: $f(z)=z^2+c$ の作用．左から，$z\mapsto z^2$，さらに $z^2\mapsto z^2+c$．太い円は単位円の像を表す．右端の枠内の円の中心がパラメーター c である．

まず，2 乗の作用をみておこう．基本に帰って $z=re^{i\theta}$ と極座標表示してみると，$w=z^2=r^2e^{2i\theta}$，すなわち絶対値は $r\mapsto r^2$ となり，偏角は $\theta\mapsto 2\theta$ となる．ここで想像力を働かせて，絶対値 $r>0$ を固定し，偏角を $\theta=0$ から $\theta=2\pi$ まで増加させて得られる複素数 $r^2e^{2i\theta}$ の軌跡 を考えてみよう．これは z 平面において原点中心半径 r の円を左回りに一周する動きである．さてこのとき，対応する w 平面には $w=z^2$ に対応する点の動きが表示される．w は絶対値が r^2 で固定されているから，z 同様に原点中心の円上を動く．しかし，偏角が 2θ だから，回転速度（角速度）は 2 倍である．すなわち，偏角 0 からスタートして，円上を 2 周して偏角 4π のところで静止する．

図 2.3 における左枠内の同心円は，このような z の軌跡を $r=0.2$ から $r=2.0$ まで 0.1 刻みで描いたものである．対応する w の軌跡は中央の枠のようになる．影のついた部分がどのように対応しているか，じっくり考えてほしい．z 平面は w 平面を 2 重に覆うのである．

次に平行移動であるが，これは全平面に $+c$ すればよい．結果として，$z=0$ の近傍は $w=f(0)=c$ の近傍に「2 乗されて」写ることになる.（図 2.3 の中央から右端.）また全体でみても，複素平面は自分自身を 2 重に覆っているわけであるから，平均すればずいぶん引き伸ばされているといってよいであろう．

以上が，写像 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ の大局的様相である．

ここで再び，力学系の世界に戻ろう．$f_c=f:z\mapsto z^2$ による力学系は，任意の点 z_0 を 1 秒後，$f(z_0)=z_1$ に写すのであった．これを平面全体で観測すれば，上の図 2.3 のような作用になる．まず複素平面を原点を「軸」に 2 重に覆い，さらに $+c$ 平行移動させる．この 2 ステップの動作にちょうど 1 秒かかるとすると，この 2 ステップを永遠に繰り返すのが $\mathbb{C}$ 上の力学系の実態だといえる．

最初にみていた数列 $Z_n(c,z)$ は，この動的な平面の中のひとつの軌道に過ぎなかったのである．そう考えると，無限の鉢 B_c や充填ジュリア集合 K_c が 命題 1.8 のような性質を持つのは，少し不思議にすらみえてくる．ボウルの中に卵を割り入れて，箸を突き刺し大きく「の」の字を書く．同じ「の」の字を無限に書き続けたとき，果たして黄身と白身が交わらずに，分離していられるだろうか？しかし B_c と K_c は，どんなに f_c で掻き回されても，混ざりあうことがないのである！

練習問題． $f(z)=z^2+c$ の作用を参考にして，写像 $g(z)=z^d+c \quad (d\geq 3)$ が平面を

平面にどのように写すか考察せよ.

2.2.2 力学系の局所的な動き

力学系を解析するにあたって，運動法則である写像の局所的な性質を調べるということは，たとえば実関数のグラフを描くとき，微分係数を計算し接線をもとめることで，グラフ全体の大局的形状を調べることに似ている．接線自体はグラフをごく一部を近似するにすぎないが，うまく計算すれば極値のような重要な情報が揃い，グラフ全体の形状がほとんど分かってしまう．同様に，力学系の局所的情報も数がある程度揃えば，大局的様相を復元できる可能性がある.

まずは力学系の「キーパーソン」である $z=0$ が，局所的にどのような性質をもっているか見ていこう.

分岐点． 図 2.3 の左端と右端を比較すれば，$z=0$ は f で $z=c$ に写されるとき，近くの点をぎゅっと引き寄せ，しかも 2 重に絡ませていることがわかる．これは，$z=0$ 以外にはない特殊な性質である.

いま，$z\in\mathbb{C}$ にたいして逆像 $f^{-1}(\{z\})$ を考えてみよう．この集合は方程式 $Z^2+c=z$ を解くことで得られる．この方程式の解は $Z=\pm\sqrt{z-c}$ と書けるから，ほとんどの場合で集合 $f^{-1}(\{z\})$ は互いに原点対称な 2 点からなり，$z=c$ の場合に限り $Z=0$ という重解になってしまう．今，z が複素平面上を動き回って，たまたま $z=c$ を通りがかったとすると，集合 $f^{-1}(\{z\})$ の方はずっと 2 点だったものが，その瞬間だけ $\{0\}$ という 1 点につぶれ，すぐさま 2 点に分かれる．このような特殊性から，原点 $Z=0$ は写像 $f(z)=z^2+c$ の**分岐点** (branched point もしくは critical point)，その像 $z=c$ は**分岐値** (branched value もしくは critical value) とよばれる[6]

具体例． 具体例として，$f_c^4(0)=f_c^5(0)$，すなわち $\alpha=f_c^4(0)$ が固定点となるような複素数，$c\approx-0.1011+0.9563$ を選ぶ．図 2.4 は，分岐点 $z=0$ の回りに半径 0.4 の円板と半径 0.2 の円板を 4 等分して描き，それを $f=f_c$ で写したものが下の図である．写された円板は 分岐値 $z=c$ 中心であり，2 重に重なるので 2 等分されているようにみえる．半径は 2 乗されるので，それぞれ 0.16 および 0.04 しかない．とくに，小さいほうの円板は図からはたいへん分かりづらい．原点の周りにある点は，近ければ近いほど急激にひきつけられ，c のまわりに運ばれるのである.

くり返すが，この「2 重のまきつけ」と「急激な引き寄せ」は $\mathbb{C}$ 内で分岐点 $z=0$ のみがもつ特徴である．このあとすぐにみるように，それ以外の点での f の局所的作用は比較的おだやかであり，回転と拡大で（すなわちアファイン写像で）近似できてしまう．分岐点をもたないアファイン写像の力学系は，いたってシンプルだったことを思い起こしておこう．分岐点の存在は 2 次多項式の力学系を複雑にしているが，同時に豊かにもしてくれるのである.

[6]分岐点は特異点，分岐値は特異値とも呼ばれる．このノートでは分岐点という言葉で統一する．また，英語では ramified point/value という同義語もあるが，最近は critical point/value を用いるのが一般的である.

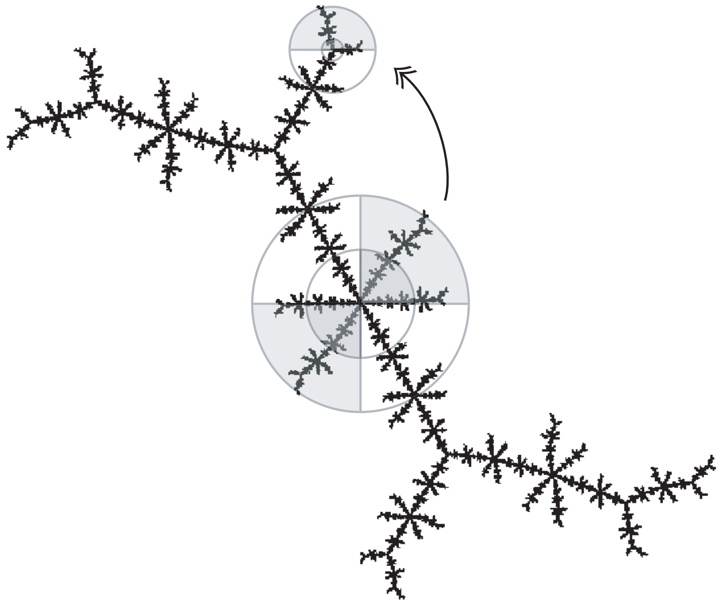


図 2.4: 分岐点まわりの力学系 $f:0\mapsto c$ の様子．この場合，原点中心の円は $z=c$ 中心の円に写る．

分岐点でない点の局所的性質． $z=\alpha\in\mathbb{C}$ を適当に固定し，その周りで 2 次多項式 $f(z)=z^2+c$ がどのように作用しているか調べてみよう．やや強引ではあるが，$f(z)=z^2+c$ を変形すると

$$f(z) \;=\; f(\alpha)+2\alpha(z-\alpha)+(z-\alpha)^2$$

のように書ける．[7]すなわち

$$f(z)-f(\alpha) \;=\; 2\alpha(z-\alpha)+(z-\alpha)^2$$

を得る．これは

$$\begin{aligned}&(f(\alpha)\text{ からみた }f(z)\text{ の位置})\\ =\;& 2\alpha\cdot(\alpha\text{からみた }z\text{ の位置})+(\alpha\text{からみた }z\text{ の位置})^2\end{aligned}$$

と解釈できる．そのことを模式的に表したのが図 2.5 である．いま知りたいのは写像 f の，$\alpha\neq 0$ における局所的な振る舞いであるから，$z-\alpha$ は非常に小さいと考えてよい．したがって，2 次の項 $(z-\alpha)^2$ の部分は 1 次の項 $2\alpha(z-\alpha)$ に比べて相対的に小さい誤差項だと考えられる．とくに図 2.5 は α 中心の円板が f で写される様子を描いているが，その半径が小さくなるほど，像の境界もまた正円に近づくのである．

[7]この式は，f の α に関する Taylor 展開である．

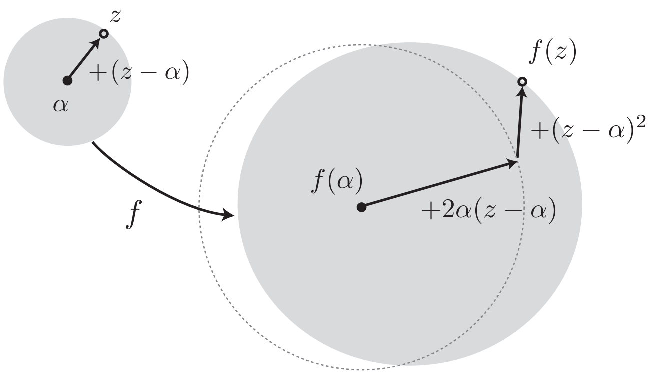


図 2.5: 2 次多項式の局所的な意味．実際に考えている状況では，$+(z-\alpha)^2$ の矢印はものすごく短い．

このことから，上の式解釈はほぼ

$$(f(\alpha)\text{ からみた }f(z)\text{ の位置})\ \approx\ 2\alpha\cdot(\alpha\text{からみた }z\text{ の位置})$$

だと考えてよい．再び式に直せば，$f(z)-f(\alpha)\approx 2\alpha(z-\alpha)$ すなわち

$$f(z)\ \approx\ f(\alpha)+2\alpha(z-\alpha)$$

であり，これは $f(z)$ の α における局所的な作用が，右辺のアファイン写像によって近似できる，ということを意味している．ただし $\alpha=0$（分岐点）では例外的に，右辺がアファイン写像とならないことに注意しておこう．

具体例（ドゥアディのウサギ）． たとえば，図 2.6 のような充填ジュリア集合をもつ $f(z)=z^2+c$ を考えよう．パラメータ c は $f^3(0)=0$ を満たし，虚部が正になるようにとってある．値としては，だいたい $-0.122561+0.744862i$ である．この $f=f_c$ もしくは $K=K_c$ を**ドゥアディのウサギ** (Douady's rabbit) とよぶ．[8]

いま，図 2.6 の左下は，だいたい $\alpha=0.770-0.347i$ に対応する点が f でどのように写るかを表現している．関係式

$$f(z)\ =\ f(\alpha)+2\alpha(z-\alpha)+(z-\alpha)^2$$

を思い出すと，f の作用は α の近くでほぼアファイン写像

$$F_\alpha(z)\ =\ f(\alpha)+2\alpha(z-\alpha)$$

によって近似される．係数 2α の値はだいたい $1.67e^{-0.42i}$（極表示）である．-0.42 ラジアンは約 -24 度であるから，$\alpha=0.770-0.347i$ の周辺はだいたい拡大率 1.67 で拡大，角度マイナス 24 度の回転を施されて $f(\alpha)\approx 0.3450+0.2105i$ の周辺へ写ること

[8]『プレイボーイ』誌のウサギのマークから連想されたものらしい．

になる．4 等分された円はこの近似された写像 F_α の作用を表現しているもので，f の作用は若干のずれが生じる.「ずれ具合」は上の関係式から $(z-\alpha)^2$ だとわかる．

さて図 2.6 の左下は，方程式 $f(z)=z$ すなわち $z^2+c=z$ の解のひとつ（固定点！）で，$z=\beta\approx 1.276-0.480i$ である．このとき，f の作用は

$$F_\beta(z) \;=\; f(\beta)+2\beta(z-\beta) \quad\Longleftrightarrow\quad F_\beta(z)-\beta \;=\; 2\beta(z-\beta)$$

によって近似される．したがって β を中心にみると，2β をかけた分（だいたい拡大率 2.76，回転角マイナス 20.6 度）の変化となる．

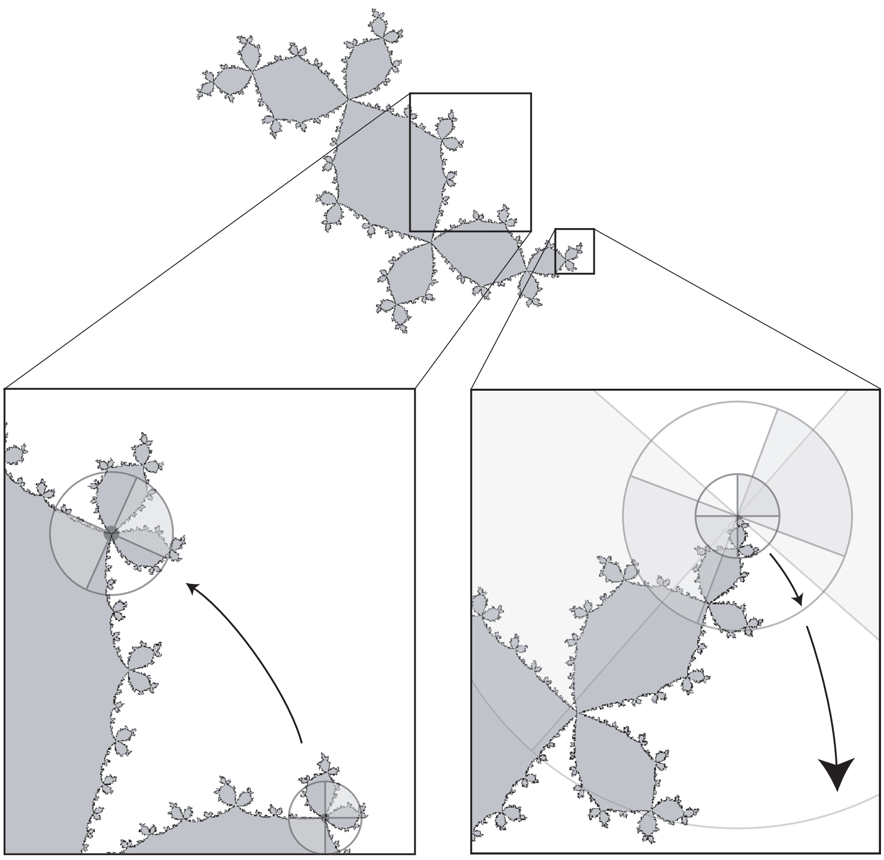


図 2.6: ドゥアディのウサギ

このように，$z\neq 0$ であれば $f:z\mapsto z^2+c$ の局所的作用はほとんどアファイン写像である．それにもかかわらず，大局的作用は「2 重の巻きつけ」＋「平行移動」という複雑なものになる．これはちょうど，実 2 次関数のグラフが，一部を拡大すればほとんど直線（接線）にみえるのに，わずかな曲がりが蓄積して放物線を描く状況に似ている．実際，これらはまったく同じ現象なのである．[9]

[9] このノートでは複素関数の微分積分をあまり表面に出さないようにしているが，そのような知識があればこれらが同じだと理解するのはたやすい．

2.3 正則写像と等角写像

2 次多項式 $f(z) = z^2 + c$ の力学系における，1 秒ごとの点の動きはかなりわかった．一方，f を n 回反復合成した f^n は 2^n 次多項式である．力学系では，n 秒周期で面白い現象がおきるといった状況も生じるので，一般次数の多項式もふくめた広い視野で写像の性質を理解しておく必要があるだろう．

ここでは，多項式による写像をより一般化して，複素平面上の**正則写像**（正則関数）とよばれる写像たちについて解説する．[10]とくに，2 次多項式の「局所的な作用がアファイン写像で近似できる」という性質を一般化する形で，写像の**正則性**や**等角性**といった概念が導入されることを理解していこう．

本章からすこしずつ数学的な負荷がかかり始めるが，まずは適当に流しながら読み進めるとよい．

2.3.1 正則性 vs. 解析性

2 次多項式 $f(z) = z^2 + c$ は，すべての $z = \alpha \neq 0$ において局所的に

$$f(z) \;=\; \underline{f(\alpha) + 2\alpha(z-\alpha)}_{\text{アファイン写像}} + \underline{(z-\alpha)^2}_{\text{誤差}}$$

と書けるのであった．この状況を $\alpha = 0$ の場合を含む形で一般化してみよう．

関数の微分． 以下，開集合 $D \subset \mathbb{C}$ 上で定義された関数 $g : D \to \mathbb{C}$ を考える．

> **定義（微分可能性）．** 関数 g が $\alpha \in D$ 上で**微分可能** (differenciable) であるとは，ある複素数 $A \in \mathbb{C}$ が存在して，$z \to \alpha$ のとき
>
> $$g(z) \;=\; \underline{g(\alpha) + A(z-\alpha)}_{1\text{ 次近似}} + o(z-\alpha)_{\text{誤差}}$$
>
> と書けるときをいう．

ここで $o(z-\alpha)$ はランダウ記号で，下線の 1 次近似（1 次式近似）部分からの誤差項である．（$A = 0$ となる可能性もあるので，「アファイン写像」とは呼ばないよばないでおく．）念のため記号の意味を思い出しておこう．この部分の実体は関数 $e(z) := g(z) - g(\alpha) - A(z-\alpha)$ であるが，z が α へ近づくとき（右から，左から，振動しながら，とにかく $|z-\alpha| \to 0$ ならばなんでもよい），

$$\frac{|e(z)|}{|z-\alpha|} \;\to\; 0$$

[10]ちなみに「複素力学系」とは，一般に「複素多様体上の正則写像による力学系」をさす用語である．「複素多様体」とは，簡単にいえば「正則写像が定義できる空間」のことである．すなわち，正則写像という概念があって初めて力学系を複素力学系たらしめることができるのである．

となることを，$e(z) = o(|z-\alpha|)$ と書くのであった．[11] たとえば冒頭の 2 次式多項式 $f(z)$ は，下線を引いた誤差の部分 $(z-\alpha)^2$ がこの性質を満たしている．

実関数の微分可能性は，そのグラフが局所的に接線という 1 次以下の関数のグラフで近似できることだと幾何学的に解釈されるが，複素関数の場合も同様で，局所的に 1 次以下の関数で近似できる場合を微分可能とよぶわけである．

もうすこし，実関数の微分可能性との関連をみておこう．微分可能性の式を変形すると

$$\frac{g(z)-g(\alpha)}{z-\alpha} \;=\; A + \frac{e(z)}{z-\alpha} \;\to\; A \quad (z \to \alpha)$$

であるから，微分可能性とは $z = \alpha$ においていわゆる**微分係数** (differential coefficient)

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{g(z)-g(\alpha)}{z-\alpha} \;=\; A$$

が定まることをいっている．結局は，実関数の微分可能性を自然に一般化したものになっているわけである．しかし，このような実体のよくわからない極限の存在よりは，上の「1 次近似可能性」のほうが微分可能性の本質をとらえているといえるだろう．

さて微分係数 A は g と α に依存して決まるから，実関数の場合にならってこれを $A = g'(\alpha)$ と関数の形で表す．これが複素関数 g の**導関数** (derivative) である．

もし $A \neq 0$ であれば，g の $z = \alpha$ における局所的作用は

$$g(z) \;\approx\; g(\alpha) + A(z-\alpha)$$

とアファイン写像により近似される．このアファイン写像の回転・拡大量を決定するのが微分係数 $A = g'(\alpha)$ というわけである．

たとえば2次多項式 $f(z) = z^2 + c$ の場合，すべての複素数 $z = \alpha$ において $f'(\alpha) = 2\alpha$ が成り立つ.（もちろん，関数として $f'(z) = 2z$ と書いてもかまわない.）

正則写像（関数）． では，写像（関数）の正則性を定義しよう：

> **定義（正則性）．** g が D 上で**正則** (holomorphic) であるとは，すべての $\alpha \in D$ において，g が微分可能となることをいう．

すなわち，D 上各点での微分可能性（1 次近似可能性）が正則性だ，というわけである．正則写像の性質をすべて書き上げるのは大変なので，ここでは，今後の考察に必要な性質だけを（証明ぬきで）挙げておこう：

> **正則関数の性質 1（連続性）．** g が D 上で正則ならば，連続でもある．すなわち，D 内で $z \to \alpha$ であれば，$g(z) \to g(\alpha)$ である．[12]

[11] いま $|z-\alpha|$ というのがわれわれの見ているスケールであって，それに比べると $e(z)$ は比率が 0 に近い，したがって誤差だ．と考えるのである．

これまで，g に連続性は仮定していなかったことに注意しておこう．局所的に 1 次式で近似できるという性質が，連続性ももたらすのである．証明に必要なのは三角不等式だけであるから，トライしてみるとよいだろう．

さて正則性には,「解析性」という重要なシノニムが存在する：

正則関数の性質 2（解析性）． g が D 上で正則であることと，g は D 上で解析的であることは同値である．

ここで「解析的」とは，次のように定義される：

定義（解析性） g が D 上で**正則** (analytic) であるとは，任意の $\alpha \in D$ について，D に含まれる十分小さな円板 $B(\alpha, r)$ 上で複素定数 $a_1, a_2, \ldots$ が定まり，

$$g(z) \;=\; g(\alpha) + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + a_3(z-\alpha)^3 + \cdots$$

という（収束する）冪級数展開をもつときをいう．

ここで，円板の半径 $r > 0$ （の最大値）および 定数 $a_1, a_2, \ldots$ は g と α のみに依存する．[13] 微分可能性の式と比較すれば, $a_1 = g'(\alpha)$ となることがわかる．したがって,

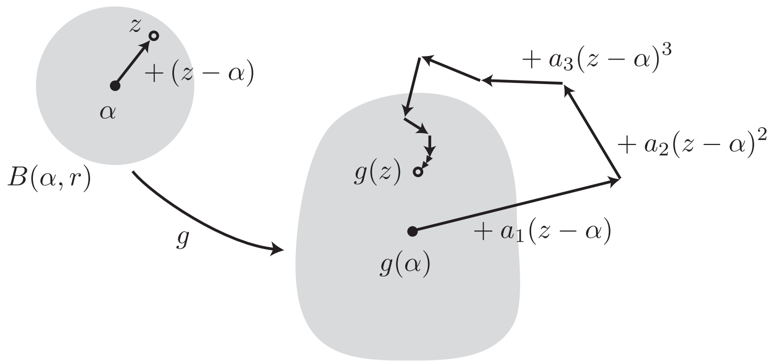


図 2.7: 正則関数は収束する無限級数の形で書ける．

解析的であれば正則である．この逆，すなわち「正則であれば解析的」が成立することは，正則性からの「驚くべき」帰着である．初学者にはどこをどう驚いたらよいのか，よくわからないかもしれないが，とりあえず，解析性のほうが正則性よりも多くの情報（収束半径 r，無限個の係数）を必要をすることは確かであろう．さらに解析性であれば，付録にあるように

- 解析的（＝正則）な関数の導関数はやはり解析的（＝正則）である．

[13] このような冪級数（べききゅうすう）は，今後も頻繁に登場する．とくにその収束性については，デリケートさが要求される．付録にその性質をまとめてあるので，不慣れな方はここで一旦，そちらにも目を通しておくと良いだろう．現時点で完全に理解しなくてもよいが，必要に応じ参照されるとよい．

- したがって，解析的（＝正則）な関数は何度でも微分できる．

ことがわかる．このように，少ない仮定から，予想以上に多くの物事が得られるのである．これらの性質については，複素関数論のオーソドックスな教科書であればかならず触れられている．ノートの最後につけた読書ガイドなども参考にするとよいだろう．

具体例． $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 上で定義された関数 $g(z) = 1/z$ が $\alpha = 1$ で正則であることをしめそう．z を $\alpha = 1$ 中心半径 1 の開円板内の点としよう．すなわち，$|z-1| < 1$ を仮定する．このとき，等比級数の要領で

$$g(z) \ = \ \frac{1}{1+(z-1)} \ = \ 1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots$$

と収束する冪級数の形で書けるから，解析的である．したがって，この円板内で正則である．

多項式の正則性． では，われわれの考えている 2 次多項式 $f(z) = z^2 + c$ が $\mathbb{C}$ 全体で正則であることをチェックしておこう．$\alpha \in \mathbb{C}$ を適当に固定すると，任意の $z \in \mathbb{C}$ にたいし

$$f(z) \ = \ f(\alpha) + 2\alpha(z-\alpha) + (z-\alpha)^2$$

と書けるのであった．あきらかに $(z-\alpha)^2 = o(|z-\alpha|)$ であるから，正則性の定義を満たしている．とくに，$f'(\alpha) = 2\alpha$ である．一方，$a_1 = 2\alpha$，$a_2 = 1$，$a_k = 0 \ (k \geq 3)$ とすれば，どんな半径の円板 $B(\alpha, r)$ においても上の「有限冪級数」が収束していると考えることができる．すなわち，$\mathbb{C}$ 全体で解析性も満たしている．

練習問題． 同様にして，アファイン写像 $f(z) = az + b \ \ (a \in \mathbb{C}^*)$ は，任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ において正則であることをしめせ．

実際，次のことを証明するのはさほど難しくない：

命題 2.4 定数関数，多項式関数はすべて，$\mathbb{C}$ 上で正則である．

したがって，2 次多項式 $f(z) = z^2 + c$ を反復した f^n も正則であり，局所的にはつねに 1 次近似でき，アファイン写像的な作用をしているのである．

練習問題． $f, g : D \to \mathbb{C}$ が $\alpha \in D$ で正則であれば次を満たすことを正則性の定義にもとづいて証明せよ．

- $h(z) = f(z) \pm g(z) \implies h'(\alpha) = f'(\alpha) \pm g'(\alpha)$
- $h(z) = f(z)g(z) \implies h'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)$
- $h(z) = 1/g(z),\ g(\alpha) \neq 0 \implies h'(\alpha) = -g'(\alpha)/g(\alpha)^2$
- $h(z) = f(g(z)) \neq 0 \implies h'(\alpha) \ = \ f'(g(\alpha))g'(\alpha)$

すなわち，実関数の場合と同じ公式が成り立つ．また，標語的に

「正則関数の和，積，商，合成関数はそれぞれ正則である」

といえる．これらの公式を用いれば，たとえば

$$g(z) \;=\; z^{100} + 2z^3 - 2iz + 5 \;\Longrightarrow\; g'(\alpha) \;=\; 100\alpha^{99} + 6\alpha^2 - 2i$$

といった公式が実関数の微分係数と同様に正当化される．

2.3.2 正則関数の局所的性質

ここでひとつ，定数関数でない正則関数の幾何学的な性質を述べておこう．ただし「標語的に」である：

正則関数の性質 4． 「無限小円を無限小円に写す」

ここで**無限小円** (infinitesimal circle) というものに正確な定義はしない．かわりに，「微小円」（半径がものすごく小さい円）を考えるのである．

まずは 2 次多項式 $f(z) = z^2 + c$ を具体例にして，性質 4 が云わんするところを理解しよう．$\alpha \neq 0$ のとき，1 次近似式

$$f(z) \;=\; \underline{f(\alpha) + 2\alpha(z-\alpha)} + (z-\alpha)^2$$

において $(z-\alpha)^2$ を誤差項とみなせば，f の局所的作用はほぼ下線のアファイン写像だと思ってよい．アファイン写像は平面図形をそれと相似な図形に写すことを思い出そう．α 中心の微小円は，下線のアファイン写像により $f(\alpha)$ 中心の微小円に写るのである．したがって f も，α 中心の微小円を $(z-\alpha)^2$ 程度の誤差で「ほぼ」微小円に写すことになる．

もう少し定量的に見てみよう．たとえば $|\alpha| = 10$，$\epsilon = 0.0001 = 10^{-4}$ とする．前の章で，複素平面での長さの単位は km（キロメートル）だと約束したから，円 $\{|z-\alpha| = \epsilon\}$ は半径 10cm の円に相当する．これは km 単位のスケールからすれば，微小円といっても良いだろう．この円を下線のアファイン写像 $z \mapsto f(\alpha) + 2\alpha(z-\alpha)$ で写すと，中心は $f(\alpha)$，半径は $2|\alpha|\epsilon = 2 \times 10 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-3}$km，すなち半径 2m の円となる．$f$ の作用もこれに近いが，その誤差は $|z-\alpha|^2 = \epsilon^2 = 10^{-8}$km，すなわち 10μm というわずかな量である．人間にはおそらく，アファイン写像からの誤差を感知できないだろう．

実際，円の半径が小さいほど誤差は相対的に小さくなり，上の 1 次近似式の精度が上がる.（図 2.8，図 2.5 も参照.）性質 4 とは，その円が限りなく小さくなった「極限」について語っているのである．

この性質は $\alpha = 0$ としても同様で，$|z-0| = |z| = \epsilon$ の場合は

$$|f(z) - f(0)| \;=\; |z-0|^2 \quad\Longleftrightarrow\quad |f(z) - c| \;=\; \epsilon^2$$

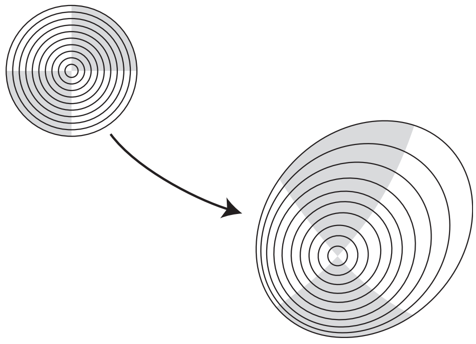


図 2.8: 「正則関数は微小円をほぼ微小円に写す」,「等角写像は局所的には
アファイン（回転・拡大＋平行移動)」のイメージ.

となり，無限小円でなくても本当に「円 $|z| = \epsilon$ は円 $|f(z) - c| = \epsilon^2$ に写る」ことがわかる．以上，どんな α をとっても，f は微小円を「ほぼ」微小円に写すのである（図 2.9 参照）.

一般の正則関数の場合． 同様の考察により，一般の正則関数 $g : D \to \mathbb{C}$ も「無限小円を無限小円に写す」ことがわかる．実際，微分可能性の式

$$g(z) \ = \ \underline{g(\alpha) + A(z - \alpha)} + o(z - \alpha)$$

によれば，$A = g'(\alpha) \neq 0$ のとき，下線部はアファイン写像による近似であり，α 中心の微小円はそれと相似な $g(\alpha)$ 中心の微小円へと「ほぼ」うつることがわかる．誤差は $o(z - \alpha)$ であるから，近似の精度は $|z - \alpha|$ が小さくなるほど良くなる．

$A = g'(\alpha) = 0$ の場合は，少し特殊である．一般に，正則写像 $g : D \to \mathbb{C}$ において $g'(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in D$ を**分岐点** (branch point) もしくは**特異点** (critical point) とよぶ．前の章で $f(z) = z^2 + c$ の $z = 0$ を分岐点と呼んだが，この定義はそれを含むより一般的な概念である．

いま，$\alpha \in D$ を正則写像 $g : D \to \mathbb{C}$ の分岐点としよう．このとき，正則関数の性質 2，すなわち解析性より，α の十分近くでは

$$g(z) \ = \ g(\alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + a_3(z - \alpha)^3 + \cdots$$

と表現される．このとき $a_2 = 0$，さらに $a_3 = 0$，…という可能性もあるから，一般的には $a_d \neq 0$ $(d \geq 2)$ として

$$g(z) \ = \ g(\alpha) + a_d(z - \alpha)^d + a_{d+1}(z - \alpha)^{d+1} + \cdots$$

と書くのが正しい．このような点 α をとくに，**次数** (degree) d の分岐点とよぶ．この g はランダウ記号を利用して

$$g(z) \ = \ \underline{g(\alpha) + a_d(z - \alpha)^d} + \underline{o(|z - \alpha|^d)}_{\text{誤差}}$$

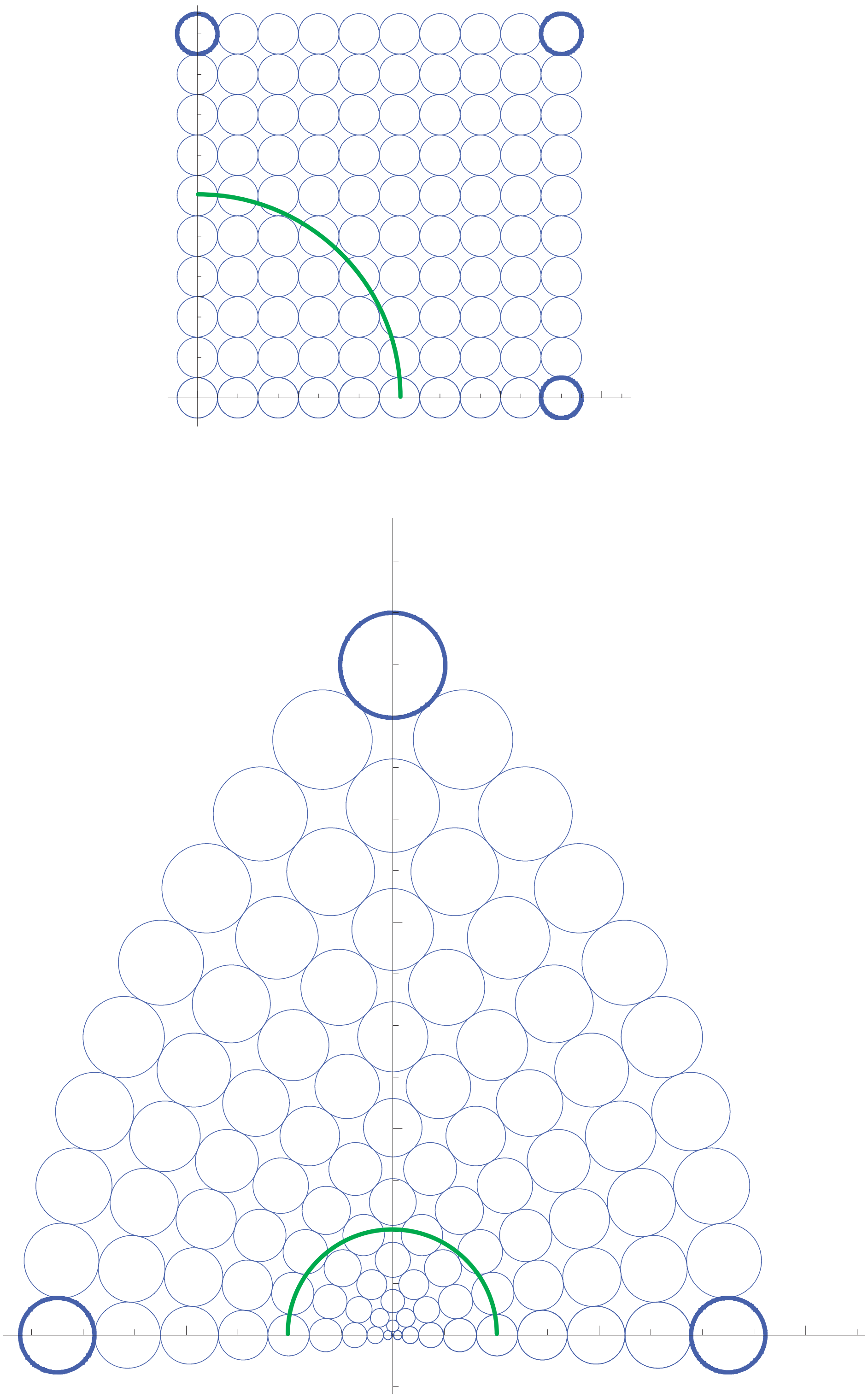


図 2.9: 上は半径 0.1 の円を $10 \times 10 = 100$ 個並べたもので，左隅の円の中心が原点である．また，1/4 円は単位円の一部をあらわす．下はそれを $f_0 : z \mapsto z^2$ で写したもの．われわれの視覚では円が円に写っているように見えるが，誤差の評価式によれば像の「円」たちは正円から絶対値で 0.01 程度ずれていることになる．この図はアファイン写像による局所的近似がすばらしいことを示しているが，一方で誤差を見抜けない人間の視覚のたよりなさや，図示の精度の限界も実感するべきであろう．

と書ける．すなわち，左の下線部の性質が写像の局所的性質を決定しているはずである．

さて左の下線部の作用は，

$$z-\alpha \quad \overset{d\,\text{乗}}{\longmapsto} \quad (z-\alpha)^d = w \quad \overset{\text{アファイン}}{\longmapsto} \quad g(\alpha)+a_d w$$

と分解できる．最初の d 乗は α を中心に行われるので，α 中心の微小円はやはり微小円に写る．それがさらに，アファイン写像 $w \mapsto g(\alpha)+a_d w$ によって写されるわけだから，最終的な像も結局は微小円である．したがって，g は分岐点 α 中心の微小円を，「ほぼ」微小円に写すことがわかった．

もう一度まとめておくと，定数関数でない正則関数 g は，定義域 D 上の任意の微小円を「ほぼ」微小円にうつす．しかも,「ほぼ」の部分に対応する誤差は，微小円の半径が小さいほど 0 に近づくのである．この意味で,「無限小円を無限小円に写す」のである．

2.3.3 等角性

等角写像． 正則関数の分岐点以外における局所的性質は，ほぼアファイン写像によって記述されている．これから導かれる**等角性**という性質も，複素関数論の世界では重要な役割を果たす．これについても解説しておこう．

> **定義．**正則写像（関数） $g : D \to \mathbb{C}$ が**等角写像** (conformal map) であるとは，任意の $\alpha \in D$ において $g'(\alpha) \neq 0$ となるときをいう．

この定義ではなぜ「等角＝角が等しい」と呼ばれるのかわからないだろう．じつは，等角写像は次の性質をもつ：

> **等角写像の性質．**「等角写像は角度をたもつ.」すなわち，等角写像 $g : D \to \mathbb{C}$ は，各 $\alpha \in D$ において角度 θ で交わる滑らかな 2 曲線を，$g(\alpha)$ において同じく角度 θ で交わる滑らかな曲線にうつす．

ここで「滑らかな曲線」とは，いたるところで接線をもつような曲線だと思えばよい．このとき，α において滑らかな 2 曲線が交われば，そこでの接線のなす角度が定まる．これが θ と定義するのである．

さてこれを等角写像で写してみよう．$g'(\alpha) \neq 0$ より，g の作用は局所的にはアファイン写像 $z \mapsto g(\alpha)+g'(\alpha)(z-\alpha)$ によって近似される．アファイン写像は平面図形を相似な図形に写すから，g は滑らかな 2 曲線は「ほぼ」滑らかな曲線へ写し，しかもそれらの接線のなす角度 θ は変えない．この意味で,「等角写像は（局所的な）角度をたもつ」のである.（図 2.8 も参照．直角で 4 等分された円板は，写った点の回りでもほぼ直角に 4 等分されている．これは角度が保たれている証拠である.）

等角でない写像の例１：分岐点． 念のために，等角でない複素平面上の写像の例も確認しておこう．まず，分岐点をもつような正則写像は，等角でない．たとえば，$f(z) = z^2$

は分岐点 $z=0$ をもつ．実軸と虚軸は $z=0$ において 90 度の角度で交わっているが，f による像はともに実軸なので，角度はない．一般に，分岐点の作用は「d 重に巻きつけ」であるから，分岐点における局所的な角度を d 倍させてしまう．

等角（正則）でない写像の例 2：実アファイン写像． xy 平面上の実アファイン写像

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を考えよう．これは $z = x + yi$ を $(2x+3)+(y+4)i$ に写す複素平面上の写像だともみなせる．このとき，平面は x 軸（実軸）方向に 2 倍されるから，あらゆる円は楕円に写り，あらゆる点で直線の交角も変わってしまう．すなわち等角でもなければ，正則でもない．

一方，すべての（複素）アファイン写像は等角である．アファイン写像は実部と虚部を分けることで実アファイン写像の形に書き下せるが，行列部分は回転と拡大しかゆるさないので，かなり限定的なのである．

正則写像の中でも「等角な同相写像」はとくに重要なクラスであり，その性質は非常に詳しく研究されてきた．後の章でみるように，複素力学系の理論においても，等角同相写像の理論は重要な役割を果たすことになる．

2.4 最大値原理：マンデルブロー集合に穴はない

さっそく，多項式が正則関数であることを応用しよう．ここでは，マンデルブロー集合のかたちに関する予想 (M3) と，充填ジュリア集合のかたちに関する予想 (K4) を正当化する．すなわち，$\mathbb{M}$ や K_c に「穴がない」ことを証明する．鍵となるのは，正則関数がもつ**最大値原理**とよばれる性質である．

2.4.1 最大値原理

正則関数は，ただの関数にはない特殊な性質をいくつか持っている．そのひとつが，つぎの**最大値原理** (maximum principle) である[14]：

定理 2.5 (最大値原理) 複素平面上のある有界閉集合 E 上で定義された定数でない連続関数 $g : E \to \mathbb{C}$ は，E の内部 E° で正則と仮定する．このとき，もしある $z_0 \in E$ が任意の $z \in E$ について $|g(z)| \le |g(z_0)|$ を満たせば，$z_0 \in \partial E$ でなくてはならない．[15]

もちろん $E^\circ = \emptyset$ ということもありうるが，その場合は $E = \partial E$ であるから定理はあたりまえである．大事なのは $E^\circ \neq \emptyset$ の場合である．有界領域において，正則写像の最大絶対値は境界部分でしか実現できないのである．

[14]**最大絶対値の原理** (maximum modulus principal) とも呼ばれる．

具体例． 正則関数 $f(z) = z^2 - 1$ を単位閉円板に制限し，$f : E = \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ を考えてみよう．まず三角不等式より

$$|f(z)| \;=\; |z^2 - 1| \;\le\; |z|^2 + 1 \;\le\; 2$$

をえる．左の不等号が等号となるには，z^2 と -1 が原点に関して同方向にあるときに限る．また，右の不等号が等号となるには，$|z| = 1$ でなくてはならない．したがって，$|f(z)|$ の最大値は $z = \pm i$ のとき，2 となる．確かに，$\pm i \in \partial\overline{\mathbb{D}}$ である．一方，これ

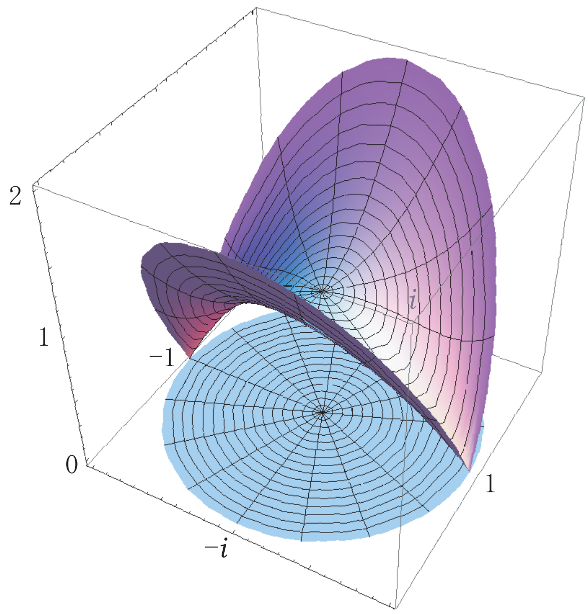


図 2.10: 単位閉円板上の $|f(z)|$ のグラフ．

を実関数に制限したものを考えてみよう．すなわち，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2 - 1$ で定義し，$E = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ での $|f(x)|$ を考える．その最大値は明らかに $x = 0$ のとき，$|f(0)| = 1$ であるが，E を実数 $\mathbb{R}$ の部分集合と見た場合，$x = 0$ は境界ではない．1 次元では，最大値原理は成立しないのである．[16]

最大値原理（定理 2.5）の証明． g は定数関数でないと仮定してよい．また，$E^\circ \ne \emptyset$ と仮定してよい．

　まず証明のスケッチを述べておこう．もし $z_0 \in E^\circ$ と仮定すると，z_0 中心の十分小さな円はやはり E° にすっぽり入っている．そのような円をひとつとり，g で写してみよう．正則写像は微小円を「ほぼ」微小円に写すから，像は $g(z_0)$ 中心の微小円に「ほぼ」写る．ということは，その像の上に，$g(z_0)$ よりも原点から遠い点が存在するはずである．これは，$|g(z_0)|$ が最大値であったことに矛盾する．

[16] もちろん $E = [-1, 1] \subset \mathbb{C}$ と考えた場合は，$E = \partial E$ となり最大値原理に矛盾しない．

では，正則写像の性質（解析性）を用いて，もう少し精密に議論をしてみよう．いま，円 $|z-z_0|=r$ は十分ちいさく，E° に含まれるとしてよい．さらに，ある自然数 d，定数 $a\neq 0$ が存在して

$$g(z) \ = \ g(z_0)+a(z-z_0)^d+O((z-z_0)^{d+1})$$

と書ける（付録参照.）すなわち，ある定数 $C>0$ が存在して

$$|g(z)-g(z_0)-a(z-z_0)^d| \ \leq \ C|z-z_0|^{d+1}$$

とできる．$L:=|a||z-z_0|^d=|a|r^d>0$ とおくとき，r がさらに十分ちいさいとすれば $C|z-z_0|^{d+1}<L/2$ とできる．

つぎに，原点から出て $g(z_0)$ を通る半直線上に $a(z-z_0)^d$ があるような $z=z_1$ を円 $|z-z_0|=r$ 上にとろう.（仮定より $g(z_0)=0$ ということはありえない．したがってこのような半直線は存在する.）このとき，$w_1:=g(z_0)+a(z_1-z_0)^d$ は $|w_1|=|g(z_0)|+L$ を満たす．一方，上の不等式から $g(z_1)$ は w_1 中心半径 $L/2$ の円板の中に含まれるから，結局 $|g(z_1)|\geq|w_1|-L/2=|g(z_0)|+L/2$ を得る．これは $|g(z_0)|$ が最大値であったことに矛盾する． ■

練習問題． 最大値原理の「証明のスケッチ」をヒントにして，次の命題を証明せよ：

命題 2.6 (正則関数は開写像) $D\subset\mathbb{C}$ を開集合とする．このとき，定数関数でない正則関数 $g:D\to\mathbb{C}$ は D 内の開集合を開集合に写す.

一般に，開集合を開集合に写す写像を**開写像** (open map) とよぶ．[17]

最大値原理の応用． さてこの原理をもちいると,「このような写像は正則写像だと実現できない」といったタイプの事実が導かれる．たとえば，次の練習問題を証明してみよう.（読者は一旦，自分で解答をこしらえてみてほしい.）

練習問題． 円環領域 $A:=\{z\in\mathbb{C}\ :\ 1/2<|z|<1\}$ にたいし，次をみたす多項式関数 $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は存在しないことをしめせ：

- $P(A) \ = \ \mathbb{D}$ （単位円板）
- $P(\mathbb{C}-A) \ = \ \mathbb{C}-\mathbb{D}$

解答． まず仮定より，P は定数関数ではないことに注意しておこう．P を $\overline{\mathbb{D}}$ の部分にだけ制限してかんがえてみる．多項式は正則関数であるから（命題 2.4），最大値原理より $P(z)$ の $z\in\overline{\mathbb{D}}$ における最大値はその境界，単位円上で実現される．とくに仮定より $|P(A)|<1$ であるから，多項式写像の連続性より単位円上 $|P(z)|\leq 1$ でなくてはならない．一方 $\mathbb{C}-A$ の原点を含む部分 $D_0:=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|\leq 1/2\}$ は $\mathbb{C}-\mathbb{D}$ の中に写るから，$|P(z)|\geq 1$ となる $z\in D_0\subset\mathbb{D}$ が存在する．これは矛盾である． ■

[17] じつは，最大値原理は開写像一般の性質である．したがって，正則写像に同相写像を合成させても，最大値原理は成立する．

もちろん，この練習問題の主張は $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を一般の正則写像に変えても成立する．問題のセッティングにまどわされず，解答の議論において本質的な部分に目をむければ,「正則写像は円板の中央だけを外に飛び出させるようなことはしない」という事実が感覚的に理解できるだろう．割った卵を正則写像でかき混ぜても，黄身だけ飛び出したりはしないのである．この感覚は，次の節で重要な役割をはたす．

2.4.2 穴がないことの証明

では最大値原理を用いて，次の定理を証明しよう：

定理 2.7 ($\mathbb{M}$ に穴なし) マンデルブロー集合の内部 $\mathbb{M}^\circ$ と補集合 $H_\infty=\mathbb{C}-\mathbb{M}$ について，次がなりたつ：

(1) H_∞ は連結である.（すなわち，$\mathbb{M}$ で囲まれた H_∞ の飛び地は存在しない.）

(2) 内部 M° は，すべて円板と同相な連結成分からなる．

証明では内部 M° が空集合でないことを用いる．現時点ではまだチェックしていないが，この事実の証明については後回しにしておこう．同様に，充填ジュリア集合について次の定理が成立する：

定理 2.8 (K_c に穴なし) 任意の $c\in\mathbb{C}$ にたいし，充填ジュリア集合の内部 $D_c:=K_c^\circ$ とその補集合 $B_c=\mathbb{C}-K_c$ について，次がなりたつ：

(1) B_c は連結である.（すなわち，K_c で囲まれた B_c の飛び地は存在しない.）

(2) 充填ジュリア集合の内部 K_c° は空集合でなければすべて円板と同相な連結成分からなる．

定理 2.7 の主張によれば，たとえば，図 2.11 のような絵はありえない．とくに，左側は (2) に反する絵である．証明においては，いままでに見てきた絵を忘れて，図 2.11 のような状況を含むあらゆる可能性を考慮しなければならない．

証明の前に,「連結」,「連結成分」ということばを厳密に定義しておこう．しかし集合・位相論のデリケートな部分でもあるから，一旦は流し読みだけにして,「連結＝ひとつながり」,「連結成分＝ひとつながりの部分」と視覚的に理解しておけばよいだろう：

定義（連結性）. 開集合 $D\subset\mathbb{C}$ が**連結** (connected) であるとは，D 上の任意の 2 点を結ぶ弧が D の内部に存在するときを言う．一方，閉集合 $E\subset\mathbb{C}$ が**連結でない**とは，次のような E の部分集合 E_1, E_2 が存在するときをいう：

1. E_1, E_2 は空集合でなく，互いに交わらない．

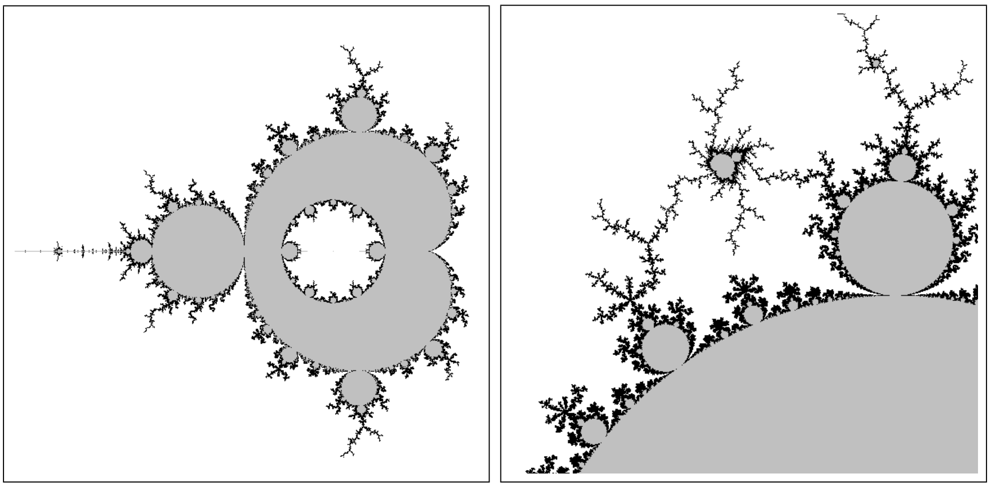


図 2.11: 最大値原理に反する，ウソのマンデルブロー集合.

2. 互いに交わらない開集合 D_1, D_2 が存在して，$E_1 \subset D_1$ かつ $E_2 \subset D_2$ とできる.

このような部分集合 E_1，E_2 が存在しないとき，閉集合 E は**連結**であるという.
また，$X \subset \mathbb{C}$ を連結とは限らない開集合または閉集合とするとき，ある点 $z \in X$ をふくむ X の連結な部分集合のなかで最大のものを，X の z をふくむ**連結成分** (connected component) とよぶ.

連結性の判定は視覚的には簡単に思われるが，このように数学的に厳密な判定基準はたいへん煩雑である．[18]

証明（定理 2.7）. まず (1) をしめそう．開集合 H_∞ の連結成分（「ひとつながりになっている部分」）U で，有界なもの（$\mathbb{M}$ に囲まれたもの）があったと仮定する（図 2.11）．この U もまた開集合であり，この閉包を $E = U \cup \partial U$ としよう．

いま，$\partial E = \partial U \subset \mathbb{M}$ であるから，任意の $c \in \partial E$ と $n \geq 0$ について $|C_n(c)| = |f_c^n(0)| \leq 2$ が成り立つ（命題 1.1）．一方，$E^\circ \neq \emptyset$ と仮定すると，$E^\circ \subset H_\infty$ よりある $c' \in E^\circ$ について $|C_n(c')| = |f_{c'}^n(0)| \to \infty$ $(n \to \infty)$ が成立する．すなわち，ある N が存在して $|C_N(c')| > 2$ をみたす．しかし，$c \mapsto C_N(c) = f_c^N(0)$ は多項式写像であり E° 上で正則であるから，これは最大値原理に矛盾する．結局 $E^\circ = \emptyset$ でなくてはならず，E が開集合 U を含むことに矛盾する．

(2) は (1) の系である．図 2.11 左のように，$\mathbb{M}^\circ$ の連結成分 D で，補集合 $\mathbb{C} - D$ がふたつ以上の連結成分をもつものが存在したとしよう．$\mathbb{M}$ の有界性より D も有界であるから，そのうち少なくともひとつは有界な閉集合であり，その中には $\mathbb{H}_\infty$ の一部が D で囲まれた状態で存在する．これは (1) に矛盾である．

[18] これでも定義を開集合または閉集合に限っている分，簡単になっているのである．とくに，開集合の連結性はいわゆる**弧状連結性** (pathwise connectedness) で代用している．平面集合を考えている範囲では，これで問題ない．

以上で $\mathbb{M}^\circ$ の連結成分 D の中に「穴」はないことがわかった．次に D が円板と同相であることを確認しよう．D ように「穴」をもたない集合は**単連結** (simply connected) と呼ばれる．[19] 連結（ひとつながり）かつ単連結な開集合は，次の定理により単位開円板 $\mathbb{D}$ と同相であることが知られているので，(1) をえる．

定理 2.9 (リーマンの写像定理) 任意の連結かつ単連結な開集合 $D \subset \mathbb{C}$ にたいし，等角な同相写像 $\phi : D \to \mathbb{D}$ で存在する．また，ひとつ $\alpha \in D$ を固定すると，$\phi(\alpha) = 0$, $\phi'(\alpha) > 0$ となる ϕ は一意的に定まる．[20]

■

証明の後半，リーマンの写像定理が出てくるのは，すこし唐突かもしれない．しかし，ある集合が円板と同相であることを示すには，実際に同相写像の存在を示すしかないのである．その点リーマンの写像定理は便利なもので，ダイレクトに同相写像の存在を伝えてくれる．ここでは定理の本来の形にそって，その同相写像が等角写像として選べること，一意性に関する主張も定理に含めたが，今回の証明では不要である．

練習問題． 定理 2.7 の議論を真似て，定理 2.8 を証明せよ．また，ウソの充填ジュリア集合の絵を想像せよ．

注意． 定理 2.8 より無限の鉢 B_c は常に連結であることがわかったが，図 1.12 のように，充填ジュリア集合 K_c はカントール集合となって無数の成分に分かれるということもありうる.（そのような例は後で詳細に調べる.）同様に，H_∞ が連結だからといって，$\mathbb{M}$ が連結とは限らないことに注意しておこう．最大値原理はそのような可能性を否定していないのである．もちろん，これまで見てきた $\mathbb{M}$ の絵は $\mathbb{M}$ が連結であることを示唆しているし（絵の描き方にもよる），事実そうであることを証明するが，現段階ではコンピュータが捕捉できないほど小さな亀裂が無数に入っていて，$\mathbb{M}$ が連結でない可能性も忘れてはならないのである．[21]

2.5 シュワルツの補題：準備として

最大値原理のもっともすばらしい応用例として,「シュワルツの補題」がある．この補題は，複素力学系理論の随所に現れて，さらりと重要な役割をこなしていく．多少の誇張を許すならば，複素力学系を複素力学系たらしめているのは，この補題があるからだ，と言ってもよいだろう．

[19] 平面集合 D が**単連結** (simply connected) であるとは，D の任意の点 α からスタートして α に戻る連続な曲線（自己交差も許す）は，連続的に変形して α に縮めることができるときをいう．たとえば遠く離れたふたつの円板の和集合も単連結になってしまうことに注意しておこう．参考文献：「トポロジー入門」など．

[21] マンデルブロー本人は当初，$\mathbb{M}$ が無数の島に分かれていると考えていたらしい．彼が最初に描いた絵が，そういう絵だったのである．

補題 2.10 (シュワルツの補題) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が正則かつ $f(0) = 0$ であれば，$|f(z)| \le |z|$ かつ $|f'(0)| \le 1$ を満たす．等号（を満たす $z \in \mathbb{D}$ が存在するのは）は，いずれも関数が $f(z) = e^{i\theta} z$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の形であるときに限る．

関数 f にたいする仮定が極めて少ないことに注意しよう．原点を固定する単位円板から単位円板への正則写像であれば，等角写像でも 100 次多項式でも何でもよいのである．にもかかわらず，たとえば原点の微分係数に関する厳しい条件 $|f'(0)| \le 1$ が導かれる．なぜ，$|f'(0)| > 1$ であってはいけないのだろう？と，思わず考えずにはいられない．

そして何よりも，この補題の証明自体がすばらしい．[22]

証明. 正則性より，原点で級数展開すると $f(z) = az + O(z^2)$ $(a = f'(0) \in \mathbb{C})$ の形となる．したがって，関数 $g(z) = f(z)/z = a + O(z)$ も正則関数である．いま $|z| \le r < 1$ とすると，最大値原理からある z_0 で $|z_0| = r$ となるものが存在して，$|g(z)| \le |g(z_0)| = |f(z_0)|/|z_0| \le 1/r$．$r < 1$ は任意であったから，1 に近づけた極限を取ることで任意の $z \in \mathbb{D}$ について $|g(z)| \le 1$ を得る．

次に等号成立に関する主張を示そう．もし $|f(z_0)| = |z_0|$ をみたす $z_0 \in \mathbb{D}$ が存在したとすると，$|g(z_0)| = 1$ が成立する．また，もし $|f'(0)| = 1$ であれば，$g(0) = f'(0)$ より，$|g(0)| = 1$ が成立することになる．いずれの場合も，最大値原理より $g(z)$ は定数関数である．とくに，その絶対値は 1 であるから，$g(z) = f(z)/z = e^{i\theta}$ の形となる．
■

まず最初の応用として，次の補題を挙げておこう：

補題 2.11 (微分の評価，その１) ある $r, s > 0$ にたいし，正則関数 $f : \mathbb{D}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ が

$$f(\mathbb{D}(z_0, r)) \subset \mathbb{D}(f(z_0), s)$$

を満たせば，$|f(z_0)| \le s/r$ が成り立つ．

証明. ふたつのアファイン写像 $T(z) = rz + z_0$, $S(z) = s^{-1}(z - f(z_0))$ を用いると，関数 $F(z) = S \circ f \circ T(z)$ はシュワルツの補題の仮定を満たす．したがって $|(S \circ f \circ T)'(0)| \le 1$．チェイン・ルールを用いれば，$|S'(f(z_0)) f'(z_0) T'(0)| \le 1$，すなわち $|f'(z_0)| \le r/s$ を得る． ■

2.5.1 シュワルツ・ピックの定理

シュワルツの補題をうまく変形すると，z と $f(z)$ について対称性のある次のような評価式を得る．シュワルツの補題が複素力学系理論に登場するときは，この形に「変装して」出てくることが多い：

[22] この補題をこの形で証明したのはカラテオドリである．シュワルツ自身は f に単射性を仮定していた．

定理 2.12 (シュワルツ・ピックの定理) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を正則関数とする．このとき，任意の $z, \zeta \in \mathbb{D}$ について次がなりたつ：

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}\right| \le \left|\frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\right|$$
$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}$$

等号成立は，ともに f が $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への等角な全単射となっている場合に限る．

もとのシュワルツの補題と比較すると，$f(0)=0$ という仮定がなくなって，さらに一般性を増している．一方で，分数式が出てきて複雑になってしまった感もあるだろう．証明は練習問題にして，ここではこの定理の重要な応用をいくつか展開しておこう．

まず，簡単な応用例として，上の補題 2.11 をすこし改良した次の定理を証明できる：

補題 2.13 (微分の評価，その２) ある $r, s > 0$ にたいし，正則関数 $f : \mathbb{D}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ の像がある半径 s の円板に含まれるならば，$|f(z_0)| \le s/r$ を満たす．

すなわち，像 $f(\mathbb{D}(z_0, r))$ が含まれる円板の中心は $f(z_0)$ でなくてもよいのである．

証明. 像の円を $\mathbb{D}(w_0, s)$ としよう．ふたつのアファイン写像 $T(z) = rz + z_0$, $S(z) = s^{-1}(z - w_0)$ を用いると，関数 $F(z) = S \circ f \circ T(z)$ はシュワルツ・ピックの定理（定理 2.12) の仮定をみたす．ふたつ目の式に $\zeta = 0$ として適用すると，

$$|F'(0)| \le 1 - |F'(0)|^2 < 1.$$

あとは補題 2.11 と同様にチェインルールを適用すればよい． ■

定理 2.14 (反発的周期点はジュリア集合上) $f = f_c$ を 2 次多項式とし，α はある自然数 n について

$$f^n(\alpha) = \alpha \quad |(f^n)'(\alpha)| > 1$$

を満たすとする.（このような，α は**反発的周期点**と呼ばれる．[23]）このとき α はジュリア集合 J_c 上にある．すなわち，充填ジュリア集合 K_c と無限の鉢 B_c の境界上にある．

証明. もし α が K_c の内部 K_c° にあるならば，十分に小さな円板 $\mathbb{D}(\alpha, r)$ はまるごと K_c° に含まれる．とくに，任意の $k \ge 1$ にたいし，$f^{nk}(\mathbb{D}(\alpha, r))$ は K_c に含まれる．ところで K_c は円板 $\mathbb{D}(0, R_c)$（ただし $R_c = \max\{2, |c|\}$）に含まれるので，補題 2.13 より

$$|(f^{nk})'(\alpha)| \le R_c/r$$

となる．しかしチェイン・ルールより

$$|(f^{nk})'(\alpha)| = |(f^n)'(\alpha)|^k \to \infty$$

であったから，矛盾である．したがって，$\alpha \in K_c$ であるから，$\alpha \in \partial K_c = J_c$ でなくてはならない． ■

2 点間の「違い」を測る量． つぎに，もっと重要な応用例をあげよう．いま $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ にたいし，

$$\delta(z_1, z_2) \ := \ \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|$$

と定義しよう．するとシュワルツ・ピックの定理の最初の式は

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \ \le \ \delta(z_1, z_2)$$

と表現される．

$|z_1 - z_2|$ という量が z_1 と z_2 の違いを表現するものであるように，δ も z_1 と z_2 の違いを表現するひとつの量だと解釈できる（$z_1 = z_2$ のとき，ちゃんと 0 となる ）．そして，シュワルツ・ピックの定理によれば，この量は正則写像によって決して増えることがない．とくに，等号が成立するのは $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が等角な全単射である場合だけであって[24]，それ以外の場合は必ず真に減少するのである．

複素力学系では，この「真に減少する」性質を主に利用する．たとえば次の応用例は，次章でカントール型ジュリア集合を扱う場合に本質的な役割をはたすことになるだろう．

命題 2.15 (閉円板における一様縮小性) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を等角な全単射でない正則写像とする．このとき，任意の $r < 1$ にたいしある $0 < \lambda = \lambda(f, r) < 1$ が存在して，$z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}(r)}$ のとき

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \ \le \ \lambda \delta(z_1, z_2)$$

をみたす．さらに $f(\mathbb{D}(r)) \subset \mathbb{D}(r)$ であれば，ある定数 $C = C(r)$ （f に依存しない）が存在して，

$$|f^n(z_1) - f^n(z_2)| \ \le \ C \cdot \lambda^n$$

が成り立つ．とくに，右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．

証明． まず $z_1 \neq z_2$ と仮定する．このときシュワルツ・ピックの定理より，

$$0 \ \le \ \frac{\delta(f(z_1), f(z_2))}{\delta(z_1, z_2)} \ < \ 1$$

---

[24]すなわち，写像 f で写した前後でこの量は変化しない．この性質は，奥の深い「複素平面上の回転＋平行移動」が 2 点間の距離を保つように,「単位円板上の等角な全単射」が，2 点間の δ を保存する，ということである．

実際，$d(z_1, z_2) = 2 \tan^{-1} \delta(z_1, z_2)$ とおけば，これが $\mathbb{D}$ を非ユークリッド平面とみなした場合の非ユークリッド距離となることが知られている.「単位円板上の等角な全単射」とは，あたかも「単位円板上の回転＋平行移動」のように解釈できるのである．

がなりたつ．左辺を z_1 と z_2 の 2 変数関数 $\Delta(z_1,z_2)$ だと考える．$z_1 = z_2$ のときは，$z_2 \to z_1$ とした極限として

$$\frac{\delta(f(z_1),f(z_2))}{\delta(z_1,z_2)} \;=\; \left|\frac{1-\overline{z_1}z_2}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right|\cdot\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \;\to\; \frac{1-|z_1|^2}{1-|f'(z)|^2}|f'(z_1)|$$

が得られるから，この極限を $\Delta(z_1,z_1)$ と定義する．これで，$\Delta:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to[0,1)$ は連続関数となる．いま $\overline{\mathbb{D}(r)}\times\overline{\mathbb{D}(r)}$ は $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ コンパクト集合であるから，その中で Δ は最大値 $\lambda=\lambda(f,r)<1$ をもつ．[25]

つぎに $f(\mathbb{D}(r))\subset\mathbb{D}(r)$ であれば，反復合成 $f^n:\mathbb{D}(r)\to\mathbb{D}(r)$ が定義できて，

$$\delta(f^n(z_1),f^n(z_2)) \;\le\; \lambda\delta(f^{n-1}(z_1),f^{n-1}(z_2)) \;\le\; \cdots \;\le\; \lambda^n\delta(z_1,z_2)$$

が成り立つ．これより

$$|f^n(z_1)-f^n(z_2))| \;\le\; \lambda^n\cdot\frac{|1-\overline{f^n(z_1)}f^n(z_2)||z_1-z_2|}{|1-\overline{z_1}z_2|} \;\le\; \lambda^n\cdot\frac{(1+r^2)2r}{1-r^2}.$$

よって $C=2r(1+r^2)/(1-r^2)$ とおけば，主張をえる． ■

系 2.16 (固定点の存在) 上の命題で $f(\mathbb{D}(r))\subset\mathbb{D}(r)$ であるとき，f のある固定点 $\alpha\in\overline{\mathbb{D}(r)}$ が存在して，すべての $z\in\overline{\mathbb{D}(r)}$ は α に収束する．

証明． 上の命題で $z_1=z$，$z_2=f(z)$ とおくと，$|f^n(z)-f^{n+1}(z)|\to 0$．$f^n(z)$ の集積点を α とすると，n がある特定の数列 n_k を渡り歩くことで三角不等式より

$$|\alpha-f(\alpha)| \;\le\; |\alpha-f^{n_k}(z)|+|f^{n_k}(z)-f^{n_k+1}(z)|+|f^{n_k+1}(z)-f(\alpha)|\to 0.$$

よって $f^n(z)$ の集積点は必ず固定点である．

もし別の集積点 β が $\overline{\mathbb{D}(r)}$ 内にあるとすれば，同様の議論により固定点でなくてはならない．さらに，やはり上の命題より

$$|\alpha-\beta| \;=\; |f^n(\alpha)-f^n(\beta)| \;\le\; C\lambda^n \;\to\; 0$$

となり，$\alpha=\beta$ でなくてはならない． ■

証明． (定理 2.12)

---

[25] まず $z_1=z_2$ における連続性は複素関数の微分の定義式からわかる．コンパクト性を用いる部分は，$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$ のように実部と虚部にわけ実 4 変数関数だと思い，4 次元ユークリッド空間内のコンパクト集合

$$\left\{(x_1,y_1,x_2,y_2)\,:\,x_1^2+y_1^2\le r,\;x_2^2+y_2^2\le r\right\}$$

と考えれば，実数の微積分の議論が適用できる．

ステップ１：練習問題. 任意の $a \in \mathbb{D}$ にたいし，写像 $T(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への等角な全単射を定めることを示せ．また，その微分 $T'(z)$ が $\dfrac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$ となることを確かめよ．

ステップ２：練習問題. ζ をダミーの変数とし，

$$\xi = T(\zeta) \ := \ \frac{\zeta - z}{1-\bar{z}\zeta}, \quad S(\zeta) \ := \ \frac{\zeta - f(z)}{1-\overline{f(z)}\zeta},$$

とおく．このとき，$F(\xi) \ := \ S \circ f \circ T^{-1}(\xi)$ は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への正則写像であり，$F(0) = 0$ を満たすことを示せ．

ステップ３．シュワルツの補題を F に適用すると，

$$|F(\xi)| \ \le \ |\xi| \iff |S(f(z))| \ \le \ |T(\zeta)|$$

（$\xi = T(\zeta)$ を代入した）および

$$|F'(0)| \ \le \ 1 \iff |S'(f(z))f'(0)(T'(z))^{-1}| \ \le \ 1$$

を得る．あとは丁寧に微分を計算すれば，シュワルツ・ピックの定理のふたつの式が導かれる．

■

注意. 結局，シュワルツ・ピックの定理とはシュワルツの補題を T, S によって座標変換して表現しただけ，ということになる．

練習問題（単位円板の自己同型写像） 一般に $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への等角な全単射は

$$T(z) \ = \ e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

の形をしていることを示せ.（このような写像は $\mathbb{D}$ の**自己同型写像**もしくは単に**自己同型** (automorphism) と呼ばれている.）

第3章　マンデルブロー集合の連結性

3.1　球面上の力学系としての z^2+c

地球という球体に立つわれわれにとって，2次元的世界として平面を考えるより，球面を考えるほうがより「自然」，現実的かもしれない．先の章では，2次多項式 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f_c(z)=z^2+c$ をある「白紙上の力学系」の表現とみなした.「白紙」とは，座標もなにもない，まっさらな平面のことである．この章では，f を「ある真っ白な球面上の力学系の，表現のひとつ」と解釈する方法を解説しよう．このような解釈は必ずしも必要ではないが，見通しがぐっとよくなるのである．

複素平面から「複素球面」へ． 地球表面の座標系（緯度と経度）が人為的なものであるように，われわれもあたえられた球面に人為的な座標を入れることを余儀なくされる．空間にポカンと白紙の球面 S が浮いているとき，われわれはこの空間に適当なユークリッド的 xyz 座標系をいれることで

$$S:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \ = \ r^2$$

という見慣れた球の方程式をえる．もちろん，この表現も人為的である．xyz 座標系を上手に選べば，S は単位球面だと思う事だってできる．

ここではまず，球面 S と複素数全体（複素平面）$\mathbb{C}$ を結びつける方法をあたえよう．[1]

- 白紙の球面 S をあらわす xyz 座標系を人為的に選んで，S は $(0,0,\frac{1}{2})$ 中心，半径 $\frac{1}{2}$ の球面だとしてよい．その「北極」を $\mathrm{N}:(0,0,1)$ であらわす．

- つぎに xyz 空間内の xy 平面を複素数全体 $\mathbb{C}$ と同一視する．すなわち，点 $(X,Y,0)$ は複素数 $Z=X+Yi$ の別名だと思い，これをあらためて複素平面とよぶことにする．

- N から複素平面上の点 Z へ半直線をおろすと，半直線は球 S と一度だけ交わるので，その点を P とおく．この点を，複素数 Z を表現する新しい点（「別名」）とする．

- これにより，$S-\mathrm{N}$ と複素数全体 $\mathbb{C}$ との対応がつく．すなわち，$S-\mathrm{N}$ とは $\mathbb{C}$ の「別名」だと思ってよい（図 3.1）．

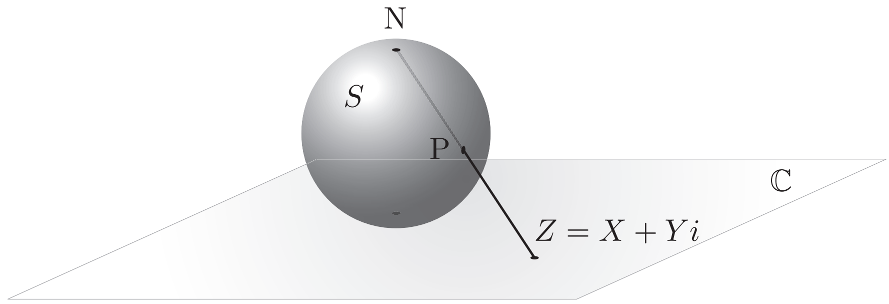


図 3.1: リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の構成

以上の対応関係から，次の関係式を導くことは難しくないだろう：

命題 3.1 S 上の点 (x, y, z) $(z \neq 1)$ に対応する複素数 $Z = X + Yi$ とすると，

$$Z = \frac{x+yi}{1-z}, \quad x = \frac{X}{1+|Z|^2}, \quad y = \frac{Y}{1+|Z|^2}, \quad z = \frac{|Z|^2}{1+|Z|^2}$$

練習問題． 命題 3.1 を証明せよ．

$|Z|$ がどんどん大きくなるとき（$|Z| = 100000 \cdots 00$ と大きくなる様子を図 3.1 でイメージせよ），対応する点 P は N に近づく．これは，Z の偏角にまったく依存しない．

したがって，N は「大きな」複素数が，より大きくなったときの共通の極限だと考えられる．この点 N を**無限遠点** (point at infinity) とよび，∞ で表す．また，S は $S - \mathrm{N} = \mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を加えたものだから，

$$(\text{球 } S) = (\text{複素数 } \mathbb{C}) \cup (\text{無限遠点 } \infty)$$

を記号として $\hat{\mathbb{C}}$ で表す．[2]すなわち，$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ である．これを**リーマン球面** (Riemann sphere) とよぶ．

ここで，∞ は数ではなく，あくまで N という「点」であることに注意しておこう．冒険家が北極へ限りなく近づくことができるように，そのような幾何学的な意味で，複素数 Z は無限遠点に近づくのである．

$\hat{\mathbb{C}}$ 上の四則演算． $\hat{\mathbb{C}}$ の中の，普通の実数に対応する数にはいつもの四則演算を行えばよい．では，∞ を含む四則演算はできるのだろうか？ ∞ は数ではないが，点としては複素数の極限とみなせる．計算上も，ある種の極限計算として ∞ の計算を次のように約束しておく．

- 和：任意の複素数 z にたいし，

$$\infty + z = z + \infty = \infty$$

[1]複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ はいつも平面として表現される．でも一体，誰がそんなことを決めたのだろう？常識をいったん捨てて，複素数を表現する新しい方法として，球面を利用する，と考えるのである．

[2]$\hat{\mathbb{C}}$ はシーハットと読む．$\bar{\mathbb{C}}$ （シー バー）と呼ばれることもある．

とする．この計算は次のようにして正当化される：複素数 z を固定する．もし Z が複素数でその絶対値が限りなく大きくなった場合，$Z+z,\ z+Z, Z$ の対応する点は全て S 上の N$=\infty$ に近づく．したがって上の式を認めるのは自然であろう．

- 積と商：任意の 0 でない複素数 z にたいし，

$$\begin{aligned} \infty \cdot z &= z \cdot \infty = \infty \\ \frac{z}{\infty} &= 0 \quad \frac{z}{0} = \infty \end{aligned}$$

とする．これらも和と同様に正当化できる．

- 次のものはとりあえず考えない．

$$\infty \cdot \infty,\ \infty \pm \infty,\ \infty/\infty,\ 0 \cdot \infty.$$

練習問題． S 上の円は，$\mathbb{C}$ 上の円または直線に対応することをしめせ．(Hint. S 上の円は S を平面で切り取ったものになる．すなわち，x, y, z に関する S の方程式と平面の方程式の連立方程式で表される．この連立方程式が，$\mathbb{C}$ 上の $Z = X + Yi$ に関する円または直線の方程式と同値であることをしめせばよい．平面と S が交わるための条件を忘れないように！ ）

3.1.1 球面上の力学系としての 2 次多項式

球面上の力学系としての 2 次多項式． では，$f = f_c : z \mapsto z^2 + c$ による力学系を考えよう．いま，$\hat{\mathbb{C}}$ の意味で $z \to \infty$ となるとき，$f(z) \to \infty$ が成立する．したがって $f(\infty) = \infty$ とすれば，f は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への写像とみなすことができる．この作用をいくつかの c の値について図示したものが図 3.2 である．左上の球面には，複素平面上で原点中心半径 $k/20$ および $20/k$ $(1 \le k \le 20)$ の同心円に対応する球面上の円が描かれている．これを $f_0 : z \mapsto z^2$， $f_1 : z \mapsto z^2 + 1$，$f_i : z \mapsto z^2 + i$ で写したものがそれぞれ右上，左下，右下の球面の図である．まず注目すべきことは，$f_0 : z \mapsto z^2$ の作用が，単位円（＝球の赤道）に関して完全に対象にみえることである．北極点にあたる無限遠点の近傍と，南極点にあたる原点の近傍では，円たちがまったく同じように引き寄せられている．

さらに，f_1, f_i を見ても，無限遠点の十分近くでは f_0 と同じような写り方をしている．このように図示してみると，無限遠点の特殊性は分岐点の特殊性と同等なものと解釈できそうである．以下では，それを正当化しよう．

反転写像． ここでは，$\tau(z) = 1/z$ という写像を考える．いま，$1/0 = \infty$，$1/\infty = 0$ と定義すれば，この写像は連続な全単射 $\tau : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ と解釈できる．さらに，$\tau^{-1}(z) = 1/z = \tau(z)$ であるから，τ は $\mathbb{C}$ から自分自身への同相写像である．

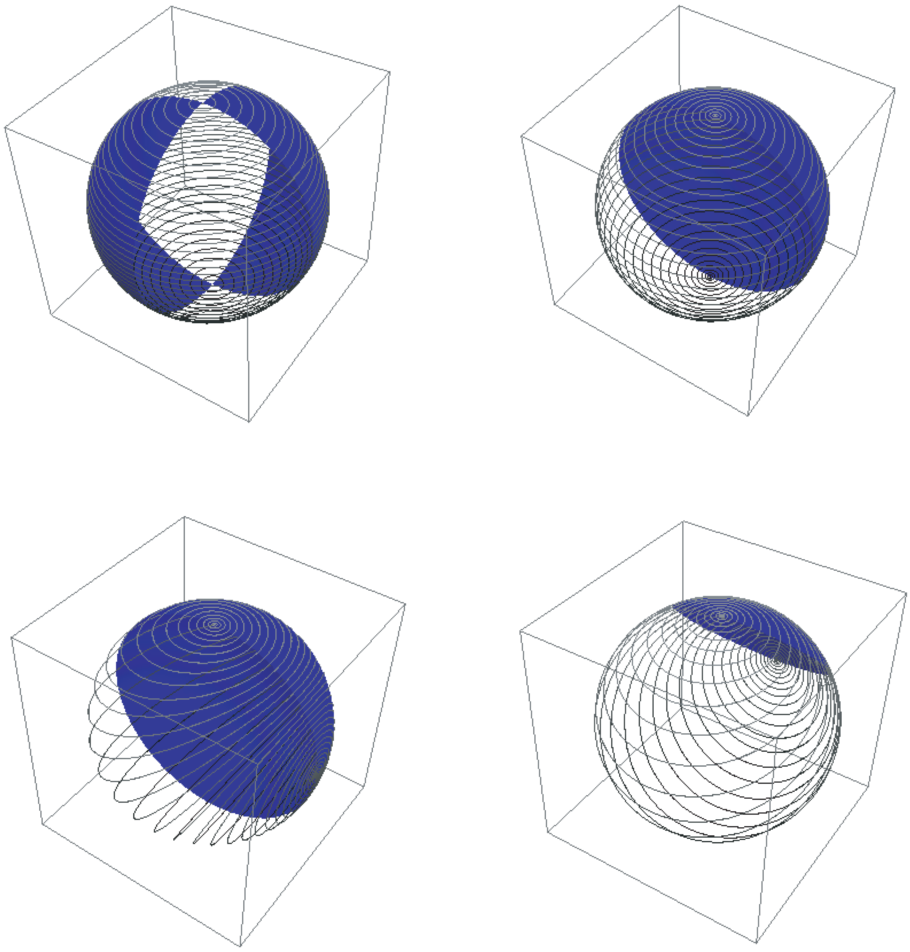


図 3.2: $f(z) = z^2 + c$ の作用を球面上に表現したもの，すなわち図 2.3 の球面版である．左上の図を $f_0 : z \mapsto z^2$ の作用で写したものが右上の図である．さらに $+1$ したのが左下の図で，$+i$ したのが右下の図．

ここで，複素平面を分割する集合を表す記号

$$\mathbb{D} \;=\; \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},\quad \mathbb{J} \;=\; \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\quad \mathbb{B} \;=\; \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

を思い出そう．これに対応するリーマン球面での分割を考えるために，さらに記号

$$\hat{\mathbb{B}} \;:=\; \mathbb{B} \cup \{\infty\}$$

を導入する．このとき，

$$\tau(\mathbb{J}) \;=\; \mathbb{J},\quad \tau(\mathbb{D}) \;=\; \hat{\mathbb{B}},\quad \tau(\hat{\mathbb{B}}) \;=\; \mathbb{D}$$

はあきらかである．τ は単位円板の内側と外側をひっくり返す（反転）させていることがわかる．

この作用を具体的に，定量的にみてみよう．命題 3.1 のように $Z \in \hat{\mathbb{C}}$ を $(x, y, z) \in S$ に対応付ける写像を $p : \hat{\mathbb{C}} \to S$ であらわそう.（ただし，$p(\infty) = (0, 0, 1)$ とする.）このとき，次がなりたつ：

命題 3.2 (反転＝ 180 度回転) $Z = X + Yi \in \overline{\mathbb{D}}$ とするとき，

$$p(1/Z) \;=\; \left(\frac{X}{1 + |Z|^2},\; -\frac{Y}{1 + |Z|^2},\; \frac{1}{1 + |Z|^2}\right).$$

また，この点は赤道上の点 $p(1) = (1/2, 0, 1/2)$ と $p(-1) = (-1/2, 0, 1/2)$ を結ぶ線分を軸にして，$p(Z)$ を 180 度回転させて得られる点である．

証明（命題 3.2）のスケッチ． $p(1/Z)$ の式は単純な計算で得られる．また，$p(1/Z)$ と $p(Z)$ の中点は

$$\left(\frac{X}{1 + |Z|^2},\; 0,\; \frac{1}{2}\right)$$

であり，これは赤道上の点 $p(1) = (1/2, 0, 1/2)$ と $p(-1) = (-1/2, 0, 1/2)$ を結ぶ線分上にある（図 3.3）．したがって，$p(Z)$ をこの線分を軸として 180 度回転させて得られる点が $p(1/Z)$ である． ■

すなわち，反転 $\tau : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ の作用を $p : \hat{\mathbb{C}} \to S$ というレンズを通して観測すると，ちょうど S の赤道上にある 2 点を固定する 180 度回転にみえる，ということである．[3]

実際，τ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上で ± 1 を固定する．さらに，正則関数の具体例としてみた $\tau(z) = 1/z$ の $z = 1$ における展開公式から

$$\begin{aligned} \tau(z) \;&=\; 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - \cdots \\ \iff \tau(z) - 1 \;&\approx\; -(z - 1) \end{aligned}$$

[3]図 3.2 において，なぜあのような同心円の半径のとりをしたのかわかるであろう．単位円板で等間隔な同心円に対応するものを $\hat{\mathbb{B}}$ に描くには，それらの逆数半径の同心円が必要だからである．

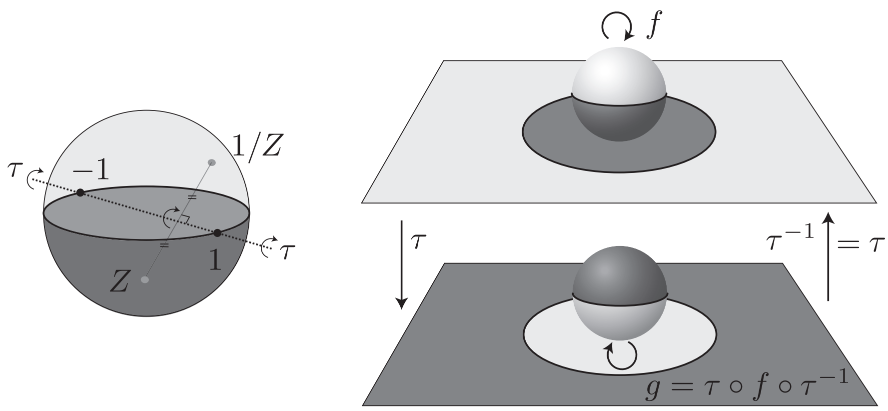


図 3.3: 反転 $\tau:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ の作用.

をえる．これは，複素平面上においても，$z=1$ を中心にして局所的に 180 度回転していることがみて取れる．$z=-1$ の近傍でも同様である．

分岐点・超吸引的固定点としての無限遠点． $f=f_c:z\mapsto z^2+c$ の無限遠点近傍での作用を理解するために，これを通常の複素関数のように表現してみよう．アイディアは簡単である．無限遠点近傍 $\hat{\mathbb{B}}$ は τ で写せば $\mathbb{D}$ のようにみえる．そこで，アファイン共役の考え方をそのまま適用する．無限遠点まわりの f による作用を，この τ というレンズを通して眺め，原点まわりの関数として表現するのである．

次のダイアグラムを考える：

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\tau} & \hat{\mathbb{C}} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\tau} & \hat{\mathbb{C}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\tau} & w \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ f(z) & \xrightarrow{\tau} & g(w) \end{array}$$

いま $g:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ は未知の写像であるが，ちょうど f による力学系を τ を通して眺めたものになっている．したがって，$f\curvearrowright\hat{\mathbb{C}}$ と $g\curvearrowright\hat{\mathbb{C}}$ 本質的に同じ「球面上の力学系」の異なる表現だと考えられる．

この g を具体的に計算してみよう．$g=\tau\circ f\circ\tau^{-1}$ と書けるから，$z=1/w$ より

$$g(w) \ := \ \left(\left(\frac{1}{w}\right)^2+c\right)^{-1} \ = \ \frac{w^2}{cw^2+1}$$

となる．いま，z が無限遠点に近い，すなわち w が原点に近いと仮定すれば，$|cw^2|<1$ とできて（等比級数の要領で）

$$g(w) \ = \ w^2\underline{(1-cw^2+c^2w^4+\cdots)} \ \approx \ w^2$$

をみたす.（下線部は $w\to 0$ のとき，いくらでも 1 に近くできる.）したがって $w=0$ での作用は局所的に $w\mapsto w^2$ によって近似される．とくに，$c=0$ のときは $w\mapsto w^2$ そのものである．このことから，図 3.2 が説明される．

無限遠点における正則性，等角性の定義． 一般に，無限遠点を含む $\hat{\mathbb{C}}$ 上の領域 D で定義された写像 $F : D \to \hat{\mathbb{C}}$ が $F(\infty) = \infty$ をみたすとしよう．このとき，F が $z = \infty$ で**正則**（もしくは**等角**）であるとは，F の作用を $\tau : z \mapsto w = 1/z$ で眺めた $G = \tau \circ F \circ \tau^{-1} : \tau(D) \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ が（これは $G(0) = 0$ をみたす），$w = 0$ において正則（もしくは等角）であるときだと定義する．また，$w = 0$ が G の分岐点であるとき，無限遠点は F 分岐点であると呼ぶことにしよう．

正則写像の性質として,「無限小円を無限小円にうつす」というものがあった（性質 4）．これはリーマン球面においても正しい．$\mathbb{C}$ 上の円は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に対応するし，$\tau = \tau^{-1}$ もまた $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の円に写す．したがって F も $G = \tau \circ F \circ \tau^{-1}$ も，球面上の微小円を,「ほぼ」球面上の微小円に写すのである．

無限遠点につきまとう「無限」のイメージはまやかしであって，球面上の点としては，なんら特別な点ではない．実際，2 次多項式 f はそのような区別をしていないのである．

練習問題． 上の写像 $F : D \to \hat{\mathbb{C}}$ が $F(\infty) = \alpha \in \mathbb{C}$ を満たす場合，どのように「F が無限遠点で正則（もしくは等角）である」ことを定義するのが妥当だろうか？(Hint：いわゆる 1 次分数変換 $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ で $T(\infty), T(\alpha) \in \mathbb{C}$ となるものを見つけ，F を T を通して観測する.)

3.2 無限の鉢のベトヒャー座標

$f_c(z) = z^2 + c$ の作用は，z が無限遠点に近い，すなわち $|z|$ が非常に大きい状況では

$$f_c(z) \;=\; z^2 \cdot (1 + c/z^2) \;\approx\; z^2 \;=\; f_0(z^2)$$

と（相対誤差の意味で）近似されるのであった．この意味で，無限遠点の周りでは f_c の力学系は f_0 の力学系にきわめて近いと考えられる．実際，次でみるように，これらの間には局所的な共役が構成できる．すなわち，無限遠点まわりの f_c による力学系は,「f_0 による力学系をあるレンズを通して眺めたもの」だと考えられるのである．

記号の準備． $R > 0$ にたいし，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の「円板」をつぎのように定義しておく：

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(R) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \\ \mathbb{B}(R) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \\ \hat{\mathbb{B}}(R) &:= \mathbb{B}(R) \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

$f_c(z) = z^2 + c$ にたいし，$R = R_c := \max\{2, |c|\}$ とする．いまから考えるのは，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の「円板」$\hat{\mathbb{B}}(R)$ における力学系である．

定理 3.3 (無限遠点近傍のベトヒャー座標) ある正則写像 $\phi_c : \hat{\mathbb{B}}(R) \to \hat{\mathbb{B}}, \phi_c(\infty) = \infty$ が存在して，以下をみたす：

1. $z \in \hat{\mathbb{B}}(R)$ のとき，$f_c(z) \in \hat{\mathbb{B}}(R)$ かつ $\phi_c(f_c(z)) = \phi_c(z)^2$ をみたす．すなわち，$f_c|_{\hat{\mathbb{B}}(R)}$ と $f_0|_{\phi_c(\hat{\mathbb{B}}(R))} : w \mapsto w^2$ は共役である：

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{B}}(R) & \xrightarrow{\phi_c} & \phi_c(\hat{\mathbb{B}}(R)) \subset \hat{\mathbb{B}} \\ \Big\downarrow f_c & & \Big\downarrow f_0 \\ \hat{\mathbb{B}}(R) & \xrightarrow{\phi_c} & \phi_c(\hat{\mathbb{B}}(R)) \subset \hat{\mathbb{B}}. \end{array} \qquad \phi_c \circ f_c \circ \phi_c^{-1} \ = \ f_0.$$

2. 無限遠点の近傍で ϕ_c は等角かつ 1 対 1 である．とくに，$z \to \infty$ のとき

$$\phi_c(z) \ = \ z + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

が成り立つ．[4]

このような ϕ_c を**ベトヒャー座標** (Böttcher coordinate) とよぶ．[5] 定理の証明に用いられる手法は複素函数論における標準的なものだが，それゆえに大雑把にしか書かれないことが多い．以下では，定理の証明をできるだけきっちり，丁寧に解説しよう．式変形と三角不等式をコツコツと積み重ねていく，その感覚を生で伝えるためである．(そのかわり，議論は少しまどろっこしくなる．丁寧さと分かりやすさは，かならずしも両立し得ない．)

証明（定理 3.3）への準備． $z \in \hat{\mathbb{B}}(R) = \{R < |z| \le \infty\}$ を固定する．いま適当に $R < R' < |z|$ なる R' を固定しておく．さらに $R = \max\{2, |c|\} \ge 2$ であったから，

$$\lambda \ := \ R' - 1 \ > \ R - 1 \ \ge \ 1$$

なる定数 λ が定まる．命題 1.5 における「$|Z_k(z)|$」はいまの z に置き換えてよいから，同じ議論をなぞることで

$$|f_c^n(z)| \ge (|z| - 1)^n \cdot |z| \ge \lambda^n |z| \quad (n \ge 0)$$

をえる．とくに，$|f_c(z)| \ge |z|$ であるから $f_c(z) \in \hat{\mathbb{B}}(R)$ は確認できた．以上が準備である．

考察． 式をすっきりとさせるために $f = f_c$ とおき，$n \ge 0$ にたいし $\phi_n(z) := \{f^n(z)\}^{1/2^n}$ という関数を考えよう．この関数は関係式

$$\phi_n(f(z)) \ = \ \{\phi_{n+1}(z)\}^2$$

をみたすので，極限関数 $\phi = \lim \phi_n$ があれば $\phi(f(z)) = \{\phi(z)\}^2$ をみたすことが期待される．(あたかも，ガラスを少しずつ磨き上げれば，完璧なレンズが出来上がるよう

[5]**ベトヒャー関数** (Böttcher function) とも呼ばれる．「座標」という言いまわしは，「等角写像による座標変換」というイメージから来たものであろうろう．

に！）そこで，分数べき乗の部分をどう扱うかは後回しにして，次のような式変形をしてみる：

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(z) &= \{f(f^n(z))\}^{1/2^{n+1}} = \left\{\{f^n(z)\}^2 \cdot \left(1+\frac{c}{\{f^n(z)\}^2}\right)\right\}^{1/2^{n+1}} \\ &= \phi_n(z)\left(1+\frac{c}{\{f^n(z)\}^2}\right)^{1/2^{n+1}}.\end{aligned}$$

したがって，最初から

$$\phi_n(z) := z\left(1+\frac{c}{z^2}\right)^{1/2}\cdots\cdot\left(1+\frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right)^{1/2^n}.$$

と定義しても上の関係式は満たされることがわかる．極限関数の存在は，この z にたいし無限積

$$\phi(z) := z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right)^{1/2^n}.$$

が，2^n 根部分の適当な解釈のもと収束するかをチェックすることであたえられる．

分数べき部分の解釈 いま，$n \geq 0$ のとき $|f^n(z)| \geq \lambda^n|z| > \lambda^n \max\{2,|c|\}$ であるから，

$$\left|\frac{c}{\{f^n(z)\}^2}\right| \leq \frac{|c|}{(\lambda^n\cdot|c|)\cdot(\lambda^n\cdot 2)} = \frac{1}{2\lambda^{2n}} < \frac{1}{2} < 1$$

をみたす．一般に，$|\zeta|<1$ のとき $1+\zeta$ は $z=1$ 中心半径 1 の開円板内に含まれる．$\eta^{2^n}=1+\zeta$ をみたす η は図 3.4 のような花弁（花びら）状の 2^n 個の領域に含まれるが，とくに $\eta=(1+\zeta)^{1/2^n}$ として $z=1$ を含む花弁と同じ部分から選ぶことにする．[6]

これで，ϕ_n の有限積および ϕ の無限積の意味は確定した．とくに，ϕ_n のような有限積は正則となることが知られている．

収束性の証明． では，ϕ_n がある $\phi=\phi_c$ へと収束し，(a) のような性質をみたすことをしめそう．いま，z は固定して，積をとる各項にたいし

$$\left(1+\frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right)^{1/2^n} = e^{b_n}$$

となる複素数 b_n を探そう．

ここで念のため，複素数の対数を思い出しておく．複素数 $w\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ を強引に極表示すれば

$$w = |w|e^{i\arg w} = e^{\log|w|+i\arg w}$$

とできる．そこで，

$$\log w = \log|w| + i\arg w$$

[6] さらにこのとき，$\eta=1+\zeta/2^n+O(\zeta^2)$ と展開できることが知られている．実際，この η は $|\zeta|<1$ 上で ζ に関する正則関数なのである．

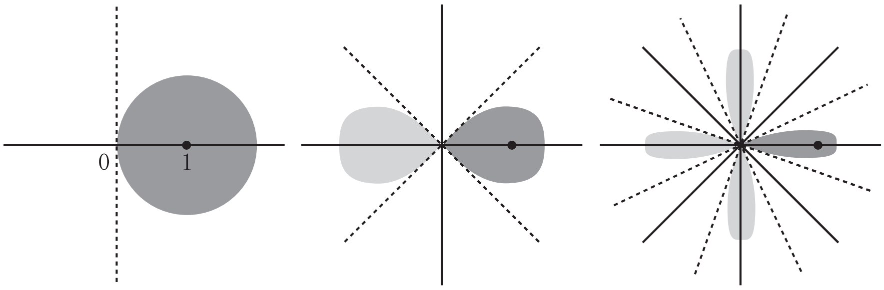


図 3.4: $|\zeta| < 1$ のとき，$\eta = (1+\zeta)^{1/2^n}$ の定め方．左は $1+\zeta$ が動く領域，中央と右はそれぞれは $\eta^2 = 1+\zeta$ および $\eta^4 = 1+\zeta$ となる η が動く領域．

と表すのであった．もちろん，$\arg w$ の取り方には $+2\pi\mathbb{Z}$ の自由度があるから，$\log w$ 自体にも $+2\pi i\mathbb{Z}$ 分の自由度が生じる．

さて $w = \left(1 + \frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right)^{1/2^n}$ とすれば，b_n の候補は無限に存在することになるが，ここではもっとも都合のよい値を選ぶことにする．

上で指定した $1 + c/\{f^{n-1}(z)\}^2$ の 2^n 乗根の定義から，b_n は

$$|\mathrm{Im}\, b_n| \ := \ \left|\arg\left(1 + \frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right)^{1/2^n}\right| \ \leq \ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$$

をみたすように取ることができる．さらに，

$$\mathrm{Re}\, b_n \ := \ \log\left|\left(1 + \frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right)^{1/2^n}\right| \ = \ \frac{1}{2^n}\log\left|1 + \frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right|$$

である．ところで，上で $\left|c/\{f^{n-1}(z)\}^2\right| < 1/2 < 1$ をしめしたから，$1 + c/\{f^{n-1}(z)\}^2$ は複素平面上で 1 中心半径 1/2 の円板内にある．したがって

$$\frac{1}{2} \ \leq \ \left|1 + \frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right| \ \leq \ \frac{3}{2} \ \leq \ 2$$

であるから，

$$|\mathrm{Re}\, b_n| \ = \ \left|\frac{1}{2^n}\log\left|1 + \frac{c}{\{f^{n-1}(z)\}^2}\right|\right| \ \leq \ \frac{1}{2^n}\log 2$$

をえる．以上まとめると，b_n として

$$|b_n| \ \leq \ |\mathrm{Re}\, b_n| + |\mathrm{Im}\, b_n| \ \leq \ \frac{1}{2^n}\left(\log 2 + \frac{\pi}{2}\right) \ =: \ \frac{M}{2^n}$$

をみたすものがとれる．この定数 M は z に依存しないことに注意しておこう．

さて，もとの無限積の有限積部分は

$$\phi_n(z) \ := \ z\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{c}{\{f^{k-1}(z)\}^2}\right)^{1/2^k} \ = \ ze^{b_1+\cdots+b_n}$$

と書き表される．いま，無限和 $\sum_{n\geq 1} b_n$ がある複素数に収束するための十分条件は $\sum_{n\geq 1} |b_n|$ が有界となる（したがって収束する）ことであるが，上で定めた b_n の選び方からこの条件は（z や c に依存せず）満たされている．したがって，この有限積には $n\to\infty$ とした極限が存在する．これを $\phi(z)$ とする．

以上より $z\in\hat{\mathbb{B}}(R)$ において関数 $\phi(z)=\phi_c(z)$ が定まり，$\phi(f(z))=\phi(z)^2$ をみたすことがわかった．また無限積の表示式より，$\phi_c(z)/z\to 1$ $(z\to\infty)$ となることがわかる．

つぎに，$\phi_c(\hat{\mathbb{B}}(R))\subset\hat{\mathbb{B}}$ をチェックしよう．$z\in\hat{\mathbb{B}}(R)$ と仮定すると，$f^n(z)\to\infty$ $(n\to\infty)$ である．$\phi_c(z)/z\to 1$ $(z\to\infty)$ より，$\phi_c(f^n(z))=\{\phi_c(z)\}^{2^n}\to\infty$ でなくてはならない．これは $|\phi_c(z)|>1$ を意味するから，$\phi_c(z)\in\hat{\mathbb{B}}$ がしめされた．

一様収束性と正則性の証明． 次に，$\phi_c:\hat{\mathbb{B}}(R)\to\hat{\mathbb{C}}$ が無限遠点を除いた場所で正則関数であることをしめそう．(現時点では，各 z ごとに $\phi_n(z)\to\phi(z)$ がいえただけで，連続性や正則性はまだ厳密にはチェックできたとはいえない.）一般に，次の事実が知られている：

> **命題 3.4 (正則関数列の性質)** D を複素平面上の領域とする．
>
> (i) 正則関数の列 $g_n:D\to\mathbb{C}$ が，D に含まれる任意のコンパクト集合上で一様収束していれば，その極限関数 $g:D\to\mathbb{C}$ も正則である．
>
> (ii) さらにこのとき，収束関数列の微分係数をあたえる関数 $g_n':D\to\mathbb{C}$ も，任意の $z_0\in D$ のまわりで局所的に一様収束し，その極限関数は $g':D\to\mathbb{C}$ と一致する．

とうことが知られている．[7]正則関数の列として $\phi_n:\mathbb{B}(R)\to\mathbb{C}$ を適用してみよう．(i) の条件を確認するには,「$\mathbb{B}(R)$ 内の任意のコンパクト集合」を考えなければならない．コンパクト集合 $K\subset\mathbb{B}(R)$ を勝手に選んだとき，十分大きな $R'>0$ を選べば，K は環状領域 $A:=\{z\in\mathbb{C}\,:\,R\leq|z|\leq R'\}$ に含まれるとしてよい．したがって，この A 上で ϕ_n が ϕ へ一様収束することを確認すればよい．念のため，ϵ-δ 式に表現された一様収束の定義を確認しておこう：

> 任意に小さい $\epsilon>0$ にたいし，ある十分大きな N が存在して，$n\geq N$ であれば A 上 $|\phi_c(z)-\phi_n(z)|<\epsilon$ が成り立つ．

これをチェックすればよい．

$z\in\mathbb{B}(R)$ を固定すると，

$$|\phi_c(z)-\phi_n(z)| \;=\; |\phi_n(z)|\cdot\left|e^{b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots}-1\right| \tag{3.1}$$

であるから，この右辺を評価したい．まず

$$\begin{aligned}|\phi_n(z)| &= |z||e^{b_1+\cdots+b_n}| \;=\; |z|e^{\mathrm{Re}\,b_1+\cdots+\mathrm{Re}\,b_n}\\ &\leq |z|e^{|\mathrm{Re}\,b_1|+\cdots+|\mathrm{Re}\,b_n|} \;\leq\; |z|e^{(\log 2)\cdot(1/2+\cdots+1/2^n)}\leq 2|z|\end{aligned}$$

[7]参考文献：アールフォルス「複素解析」など

となることから，[8] $z \in A$ であれば $|z| \le R'$ より $|\phi_n(z)| \le 2R'$ となる．次に，

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots| \ \le\ |b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \cdots \ \le\ M\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots\right) \ \le\ \frac{M}{2^n}$$

より，n が十分大きければ $|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots| < 1$ としてよい．一般に $|\zeta| < 1$ のとき $|e^{\zeta} - 1| \le 2|\zeta|$ が成立するから，[9] 結局 (3.1) より

$$|\phi_c(z) - \phi_n(z)| \ \le\ 2R' \cdot \left(2 \cdot \frac{M}{2^n}\right)$$

とできる．ここで十分大きな N をとれば，$n \ge N$ のとき右辺は任意に固定した $\epsilon > 0$ より小さくできる.（この N は R' の選び方にのみ依存し，$z \in A$ の選び方には依存していないことに注意.）すなわち，ϕ_n は ϕ_c に A 上一様収束している．ϕ_n は A 上正則関数であるから ϕ_c も A 上正則関数である．(i) より，ϕ_c は $\mathbb{B}(R)$ 上正則である．

無限遠点における展開． 次に，定理の (b) の部分を証明しよう．ϕ_c を実際に級数の形で表現し，ϕ_c が無限遠点も含めて等角であり，しかも単射である（異なる点は異なる点に写る）ことをチェックしよう．

無限積を用いると，ϕ_c を無限遠点の回りで展開した式をもとめることができる．いま，$z \in \hat{\mathbb{B}}(R)$ として考えよう．このとき，

$$\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z) \ =\ \phi_n(z)\left\{\left(1 + \frac{c}{\{f^n(z)\}^2}\right)^{1/2^{n+1}} - 1\right\}$$

である．一般に $m > 0$ および $|\zeta| < 1$ のとき $(1+\zeta)^m = 1 + m\zeta + O(\zeta^2)$ が成り立つから，

$$\left(1 + \frac{c}{\{f^n(z)\}^2}\right)^{1/2^{n+1}} \ =\ 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{c}{\{f^n(z)\}^2} + O\left(\frac{1}{\{f^n(z)\}^4}\right)$$

としてよい．いま，多項式として $\{f^n(z)\}^2 = z^{2^{n+1}} + \cdots$ であるから，

$$\frac{c}{\{f^n(z)\}^2} \ =\ \frac{c}{z^{2^{n+1}}} + O\left(\frac{1}{z^{2^{n+1}+1}}\right) \ (z \to \infty)$$

である．この右辺は，$1/z$ に関する冪級数 $\sum_{n \ge 2^{n+1}} a_n/z^n$ の形をしていることに注意しておこう．さらに $z \to \infty$ のとき $\phi_n(z)/z \to 1$ を用いると，

$$\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z) \ =\ \frac{c}{2^{n+1} z^{2^{n+1}-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2^{n+1}}}\right) \quad (z \to \infty)$$

をえる．すなわち，n が増えても，新しく増える項は非常に高次のものしか加えられず，低次の項には関係がない．したがって，

$$\phi_c(z) \ =\ \lim_{n \to \infty} \{(\phi_n(z) - \phi_{n-1}(z)) + \cdots + (\phi_1(z) - \phi_0(z)) + \phi_0(z)\}$$

[8] したがって $|\phi_c(z)| \le 2|z|$ もなりたつ．また，$|\phi_n(z)| = |z|e^{\mathrm{Re}\, b_1 + \cdots + \mathrm{Re}\, b_n} \ge |z|e^{-(|\mathrm{Re}\, b_1| + \cdots + |\mathrm{Re}\, b_n|)} \ge |z|/2$ すなわち $|\phi_c(z)| \ge |z|/2$ も得られることに注意.

[9] 証明：$|e^{\zeta} - 1| = |\zeta + \zeta^2/2 + \zeta^3/(2\cdot 3) + \cdots| \le |\zeta|(1 + |\zeta|/2 + |\zeta|^2/(2\cdot 2) + \cdots) \le |\zeta|(1 + 1/2 + 1/2^2 + \cdots)$ ■

に注意すれば，次の公式が得られる：

命題 3.5 任意の $n \geq 1$ について

$$\phi_c(z) \;=\; \phi_n(z) + O\left(\frac{1}{z^{2^{n+1}-1}}\right) \quad (z \to \infty).$$

無限遠点近傍での等角性． さて $n = 0$ としてこの命題を適用しよう．$\phi_0(z) = z$ より，

$$\phi_c(z) \;=\; \phi_0(z) + O\left(\frac{1}{z^{2^{0+1}-1}}\right) \;=\; z + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

である．式の形をみると，ϕ_c は無限遠点近傍の点を無限遠点近傍に，ほとんど動かさずに写すことがわかる．これを $w = \tau(z) = 1/z$ を用いて眺めると，次のようになる：

$$\psi_c(w) \;:=\; \tau \circ \phi_c \circ \tau^{-1}(w) \;=\; \frac{1}{\phi_c(1/w)} \;=\; \frac{1}{1/w + O(w)} \;=\; w + O(w^2).$$

ただし，$O(w^2)$ の部分は $\sum_{n \geq 2} a_n w^n$ の形の級数である．これは $w = 0$ のまわりで収束する冪級数であるから，項別に微分ができて，

$$\psi_c'(w) \;=\; 1 + \sum_{n \geq 2} n a_n w^{n-1} \;=\; 1 + O(w)$$

となる．すなわち，w が十分に小さいと（z が十分に大きいと）この値は 0 とならない．したがって，ϕ_c は無限遠点の近傍で等角である．

無限遠点近傍での単射性． 最後に，ある $\tilde{R} > R$ が存在して，$\hat{\mathbb{B}}(\tilde{R})$ 上 ϕ_c が単射であることを確認しよう．そのためには，その作用を τ で眺めた ψ_c がある $r > 0$ について $\mathbb{D}(\tilde{r})$ 上単射であることをしめせばよいが，これは付録「冪級数に関する覚書」の，冪級数の逆関数に関する性質をそのまま適用すればよい．以上でベトヒャーの定理が証明された． ■

注意． じつは，ϕ_c は $\hat{\mathbb{B}}(R)$ 全体で等角かつ単射であることをあとで証明する．

ベトヒャー座標の具体的な形． 命題 3.5 を用いて，ϕ_c を 6 次のオーダーでもとめてみよう．上の命題で $n = 3$ とすれば $\phi_c(z) = \phi_3(z) + O(z^{-7})$ であるから，あとは $\phi_3(z) = \{f^3(z)\}^{1/8}$ を 6 次のオーダーでもとめればよい．$f^3(z) = z^8(1 + \cdots)$ であるから，

$$\left\{f^3(z)\right\}^{1/8} \;=\; z\left(1 + \frac{4c}{z^2} + \frac{6c^2 + 2c}{z^4} + \frac{4c^3 + 4c^2}{z^6} + \frac{c^4 + 2c^3 + c^2 + c}{z^8}\right)^{1/8}$$

と変形して，地道に根号を開くと（もしくは数式処理ソフトを援用して），次の結果が得られる：

$$\phi_c(z) \;=\; z + \frac{c}{2z} - \frac{c(c-2)}{z^3} + \frac{c^2(c-6)}{z^5} + O\left(\frac{1}{z^7}\right).$$

練習問題． なぜ ϕ_c に偶数次の項が現れないのか説明せよ．(Hint. K_c が原点対称なのはなぜだったか？)

無限の鉢における発散のスピード． 命題 1.5 でみたように，無限の鉢の z はある自然数 k において $Z_k(z,c) = f_c^k(z) \in \mathbb{B}(R_c)$ となり，その後は評価式

$$|f_c^{k+n}(z)| \ \geq \ \lambda^n |f_c^k(z)| \ \geq \ \lambda^n R_c$$

をみたす．ただし，$\lambda = |f_c^k(z)| - 1 > 1$ である．しかし，実際の発散スピードはもっと早い：

> **命題 3.6** 任意の $z \in B_c$ にたいし，ある定数 $\Lambda = \Lambda_z > 1$ および $k = k_z \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq k$ のとき，
>
> $$\frac{\Lambda^{2^n}}{2} \ \leq \ |Z_n(z,c)| \ = \ |f_c^n(z)| \ \leq \ 2\Lambda^{2^n}$$
>
> をみたす．

証明 (命題 3.6) 命題 1.5 より，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $z' = f_c^k(z) \in \mathbb{B}(R)$ とできる．ベトヒャー座標 ϕ_c は $\hat{\mathbb{B}}(R)$ を $\hat{\mathbb{B}}$ の中に写すから，$r := |\phi_c(z')|$ は 1 より大きな正数である．ベトヒャー座標の存在証明中の脚注にあるように，$|\phi_c(z)| \leq 2|z|$ が成り立つから，

$$2|f^{n-k}(z')| \ \geq \ |\phi_c(f^{n-k}(z'))| \ = \ |\phi_c(z')^{2^{n-k}}| \ = \ r^{2^{n-k}} \ = \ \left(r^{1/2^k}\right)^{2^n}$$

となる．したがって，$\Lambda = r^{1/2^k} > 1$ とおけば，

$$|f^n(z)| \ \geq \ \frac{1}{2}\Lambda^{2^n}$$

が成り立つ．同様に，$|\phi_c(z)| \geq |z|/2$ をもちいれば $|f^n(z)| \leq 2\Lambda^{2^n}$ をえる． ■

この命題はマンデルブロー集合の定義で扱った数列 $C_n(c)$ にも適用できる．$c \in H_\infty$ であれば $c \in B_c$ であるから，次の系をえる：

> **系 3.7** 任意の $c \in H_\infty = \mathbb{C} - \mathbb{M}$ にたいし，ある定数 $\Lambda = \Lambda_c > 1$ および $k = k_c \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq k$ のとき
>
> $$\frac{\Lambda^{2^n}}{2} \ \leq \ |C_n(c)| \ = \ |Z_n(c,c)| \ \leq \ 2\Lambda^{2^n}$$
>
> をみたす．

3.3 連結な充填ジュリア集合とベトヒャー座標

前節ではベトヒャー座標を無限遠点の近傍 $\hat{B}(R_c)$ で構成したが，実際には無限の鉢（ほぼ）全体にまで拡張することができる．しかもそ拡張のされ方から，充填ジュリア集合の「かたち」について重要な情報が得られる．

では，どのようにベトヒャー座標を拡張していけばいいのだろうか．直感的には，$z \in B_c = \mathbb{C} - K_c$ のとき，関係式 $\phi_c(f_c(z)) = \{\phi_c(z)\}^2$ をもちいて

$$\phi_c(z) \ := \ \{\phi_c(f_c^n(z))\}^{1/2^n}$$

と定義すればよい．ただし，n は十分に大きく，$f_c^n(z) \in \mathbb{B}(R_c)$ となるようにとる．しかし，右辺の分数べきをどのように解釈するかはいくらか問題で，丁寧な議論が必要となる．

この節では，まず $c \in \mathbb{M}$ の場合について考えてみよう．

定理 3.8 (B_c **のベトヒャー座標，その１**) $c \in \mathbb{M}$ のとき，ベトヒャー座標は無限の鉢 $\hat{B}_c$ 全体にまで拡張でき，$f_c : \hat{B}_c \to \hat{B}_c$ と $f_0 : \hat{\mathbb{B}} \to \hat{\mathbb{B}}$ の間の等角な共役写像 $\phi_c : \hat{B}_c \to \hat{\mathbb{B}}$ となる．とくに，無限の鉢 $\hat{B}_c$ と $\hat{\mathbb{B}}$ は同相である．

すなわち，$\hat{B}_c$ 上の力学系 $f_c \curvearrowright \hat{B}_c$ は $\hat{\mathbb{B}}$ 上の $f_0 : z \mapsto z^2$ による力学系を ϕ_c というレンズを通して眺めたものだといえる.（とくに ϕ_c が等角な同相写像であることから，「複素力学系」としては本質的に同じだといってもよい.）

拡張されたベトヒャー座標から得られる重要な系がある：

系 3.9 (**充填ジュリア集合の連結性**) $c \in \mathbb{M}$ のとき，すなわち $c \in K_c$ のとき，$K_c = \hat{\mathbb{C}} - \hat{B}_c$ は連結である．

証明． (**系 3.9**) 定理 3.8 より，$\hat{B}_c$ は $\hat{\mathbb{B}}$ と同相，すなわち単位開円板 $\mathbb{D}$ と同相である．したがって，K_c は連結でないとすると，$\hat{B}_c$ に「穴」があくことになり，矛盾である．
■

では，定理 3.8 の証明に入ろう．

等高線． まず言葉の準備をしておく．$c \in \mathbb{C}$ を固定すると，ベトヒャー座標 $\phi_c : \hat{\mathbb{B}}(R_c) \to \hat{\mathbb{B}}$ が定義されるのであった．一般に $r > 1$ にたいし，

$$\mathcal{E}_c(r) \ = \ \phi_c^{-1}\Big(\Big\{w \in \hat{\mathbb{B}} \, : \, |w| = r\Big\}\Big)$$

を K_c もしくは B_c の**等高線** (equipotential curve) とよぶ．ϕ_c が無限遠点の近傍で等角な同相写像であることから，r が十分おおきければ $\mathcal{E}_c(r)$ は自己交差しない閉じた曲線 (いわゆる単純閉曲線）であり，しかも滑らかである．またこのとき，関係式

$$f_c(\mathcal{E}_c(r)) \ = \ \mathcal{E}_c(r^2)$$

をみたすことにも注意しておこう．ただし現時点では $\phi_c(\hat{\mathbb{B}}(R_c)) \subsetneq \hat{\mathbb{B}}$ であるから，r の値によっては $\mathcal{E}_c(r)$ が空集合となることもある．

定理 3.8 の証明． まず最初に，次の補題を証明する：

補題 3.10 c は任意の複素数とする．ある $R>1$ にたいし，

$$\psi_c=\phi_c^{-1}:\hat{\mathbb{C}}-\mathbb{D}(R)\to\psi_c(\hat{\mathbb{C}}-\mathbb{D}(R))\subset\hat{B}_c$$

が同相写像として定義でき，しかも定義域の内部で等角と仮定する．このとき，もし $\psi_c(\hat{\mathbb{C}}-\mathbb{D}(R))$ が c を含まなければ，ψ_c は $\hat{\mathbb{C}}-\mathbb{D}(\sqrt{R})$ まで内部で等角な同相写像として拡張でき，$f_c(\psi_c(w))=\psi_c(w^2)$ をみたす．

証明（補題 3.10.） 円環状の閉集合 $A_0=\{z\in\mathbb{C}:R\le|z|\le R^2\}$ を考える．この上で ψ_c は同相写像であるから，$A_c=\psi_c(A_0)$ も円環状の領域である．このような集合を閉アニュラスとよび，その「内部」をアニュラスとよぶ.（以下，図 3.5 を参照.）

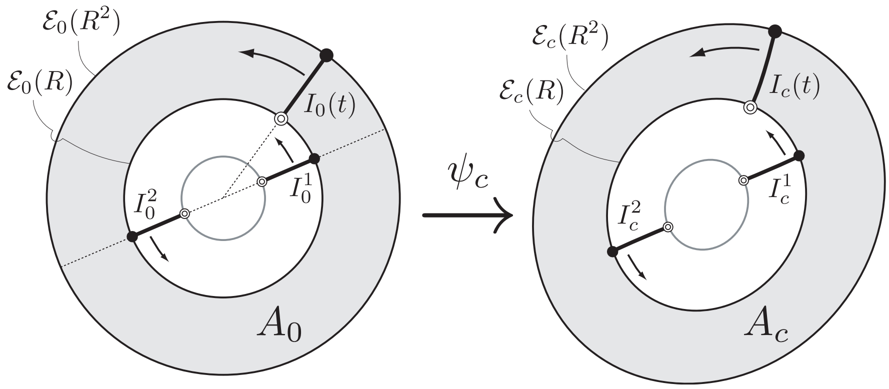


図 3.5: A_0 と A_c の対応．$f_c^{-1}(A_c)$ も同じく閉アニュラスとなる．

とくに，任意の $r\ge R$ について等高線 $\mathcal{E}_c(r)$ が定義できて，それぞれ円 $\mathcal{E}_0(r)=\{|w|=r\}$ と同相な閉曲線である．[10]とくに，A_c とは $R<r\le R^2$ をみたす等高線 $\mathcal{E}_c(r)$ の束（たば）であり，$\partial A_c=\mathcal{E}_c(R)\sqcup\mathcal{E}_c(R^2)$ となることに注意しておこう．

まず，A_c に含まれる等高線 $E=\mathcal{E}_c(r)$ にたいし，$E'=f_c^{-1}(E)$ がやはり円と同相な曲線になることをしめそう．

いま，$\psi_0(z)=z$ であることに注意して，$0\le t<1$ にたいし

$$I_c(t)\ :=\ \left\{\psi_c(\rho e^{2\pi it}):r\le\rho\le R^2\right\}\ \subset\ A_c$$

を考える．これは A_c の外側の境界 $\mathcal{E}_c(R^2)$ と等高線 E を結ぶ A_c 内の弧 (arc) である．

さて $z\in I_c(t)$ にたいし，$f_c(\zeta)=z$ をみたす ζ は方程式

$$\zeta^2+c\ =\ z\iff\zeta^2\ =\ z-c$$

の解である．いま $c\notin A_c$ であるから，そのような ζ はちょうど 2 つ存在している．これを $\pm\zeta(z)$ で表そう．また，それぞれの $f_c:\pm\zeta(z)\mapsto z$ における作用は等角であ

[10] このような閉曲線をジョルダン閉曲線とよぶのであった.

り，局所的には同相写像であることに注意しよう．すなわち，逆写像 $z \mapsto \zeta(z)$ および $z \mapsto -\zeta(z)$ が局所的に定義でいる．

いま z が $I_c(t)$ 上を $\mathcal{E}_c(R^2)$ 側の端点からスタートし，E 側の端点まで到達したとしよう．この動きを局所的な逆写像 $z \mapsto \zeta(z)$ で追って得られる $I_c(t)$ の像を I_c^1，$z \mapsto -\zeta(z)$ で追って得られる像を I_c^2 とする．これらの像は当然，原点対称である．

さて $f_c : \mathcal{E}_c(R) \to \mathcal{E}_c(R^2)$ であったから，I_c^1，I_c^2 は $\mathcal{E}_c(R)$ に端点（●）をもつ．ここでは，逆写像をうまく選び，$\psi_c(Re^{\pi it}) \in I_c^1$ かつ $-\psi_c(Re^{\pi it}) \in I_c^2$ と仮定しておこう．以上の集合は $c = 0$ の場合も同様に定義しておく．

まず，t を 0 から 1 まで動かして，I_c^1，I_c^2 の等高線 $\mathcal{E}_c(R)$ 上にない方の端点（◎）の軌跡を調べてみよう．定義より，この軌跡は $E' = f_c^{-1}(\mathcal{E}_c(r))$ である．

I_c^1，I_c^2 は $I_c(t)$ が一周すると $\mathcal{E}_c(R)$ にそって半周し，互いに入れ替わる．従って，◎の軌跡 E' は閉曲線である．もし E' が自己交差（接触）すると，その点の近傍で f_c は等角なので，写った先の $E = \mathcal{E}_c(r)$ も自己交差（接触）していることになり矛盾である．従って，E は円と同相な曲線（ジョルダン閉曲線）である．

いま $R \leq r \leq R^2$ は自由に選べるから，$A_c^1 := f_c^{-1}(A_c)$ はジョルダン閉曲線 $E' = f_c^{-1}(\mathcal{E}_c(r))$ の和集合である．このようなジョルダン閉曲線たちが束になっていることは，f_c が局所的に等角であり，写した先が A_c という等高線の束になっていることからわかる．したがって，A_c^1 は $A_0^1 := \left\{z \in \mathbb{C} : \sqrt{R} \leq |z| \leq R\right\}$ と同相な円環領域である．

では，ψ_c を $\psi_c : A_0^1 \to A_c^1$ にまで拡張しよう．$w \in I_0^j$ $(j = 1, 2)$ については $f_c^{-1}(\psi_c(w^2))$ のうち I_c^j にある方を $\psi_c(w)$ と定めればよい．とくに，この写像は正則な同相写像である．すなわち，内部で等角性も成り立つ．以上で，同相写像 $\psi_c : \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{D}(\sqrt{R}) \to \hat{B}_c$ が定まった．■

定理 3.8 の証明． 定理 3.3 より，ベトヒャー座標は無限遠点の近くで等角な同相写像なので，十分大きな $R > 1$ をとれば補題 3.10 の条件を満たす．このような R を固定しよう．補題の証明で定義した閉アニュラス A_c にたいし，

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{B}} &= \hat{\mathbb{B}}(R) \cup \bigcup_{n \geq 0} f_0^{-n}(A_0) \\ \hat{B}_c &= \psi_c(\hat{\mathbb{B}}(R)) \cup \bigcup_{n \geq 0} f_c^{-n}(A_c) \end{aligned}$$

であり，しかも $c \in \mathbb{M}$ より $c \notin \hat{B}_c$ であるから，補題 3.10 を繰り返し適用することで等角な同相写像 $\psi_c : \hat{\mathbb{B}} \to \hat{B}_c$ をえる．この逆写像がもとめる ϕ_c である．■

3.4 カントール型ジュリア集合とマンデルブロー集合の再定義

次に，$c \notin \mathbb{M}$ すなわち，$c \notin K_c$ の場合を考えよう．十分大きな $R > 0$ をとれば補題 3.10 にあるようなベトヒャー座標の逆写像 ψ_c と，閉アニュラス A_c がとれる．この場

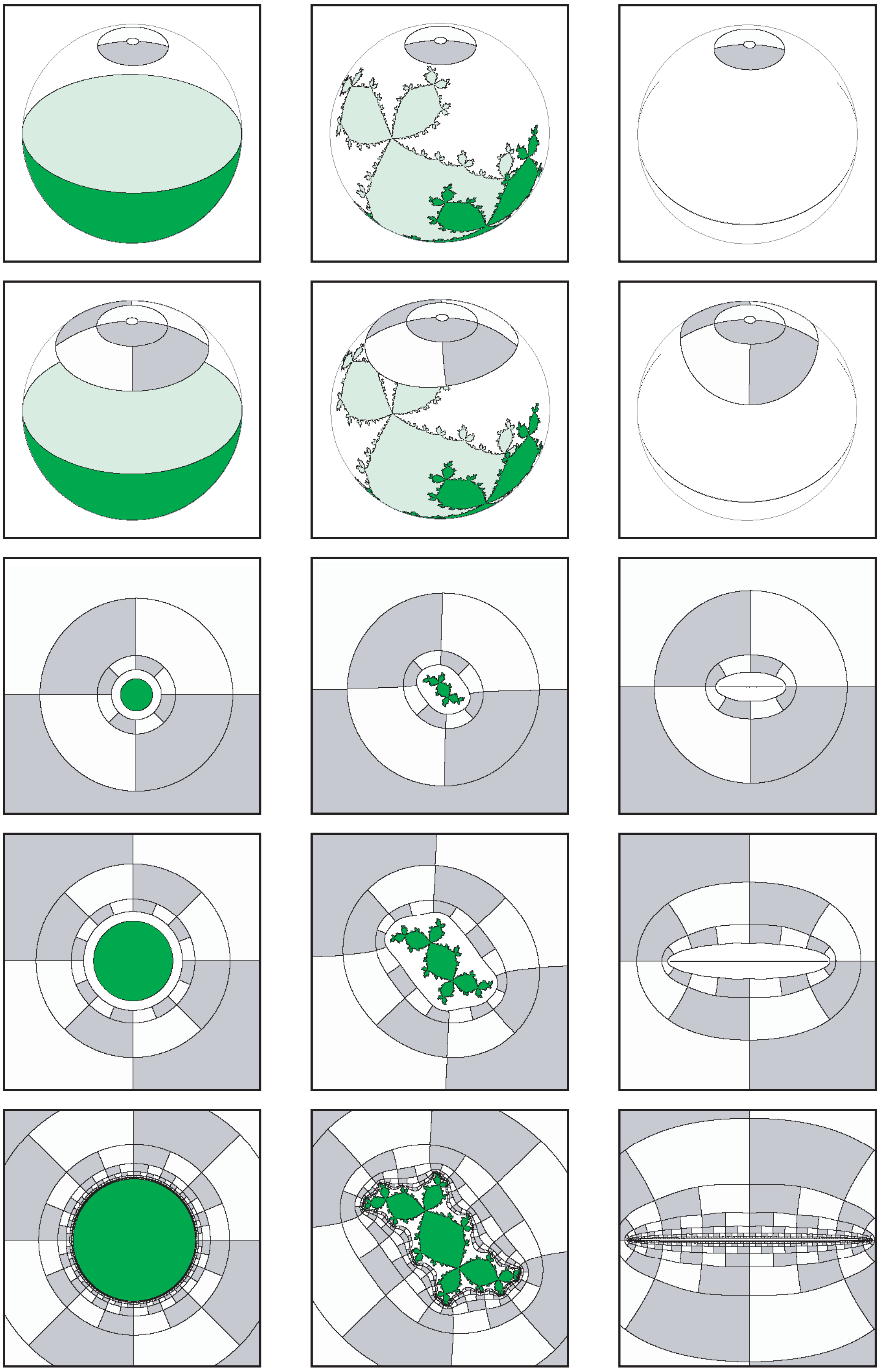


図 3.6: $c = 0$，ウサギ，$c = -2$ について閉アニュラス $f_c^{-n}(A_c)$ を $\hat{\mathbb{C}}$ もしくは $\mathbb{C}$ に描いたもの．上からそれぞれ，$n = 0, 1, 2, 3, 6$ である．色分けは A_c まで写ったときに虚部が正ならば白，負ならばグレー．

合も，

$$\hat{B}_c \;=\; \psi_c(\hat{\mathbb{B}}(R)) \cup \bigcup_{n\geq 0} f_c^{-n}(A_c)$$

が成立していることに注意しよう．さて補題 3.10 により，ベトヒャー座標の逆写像 ψ_c を少しずつ拡張していくと,「$\psi_c(\hat{B}(R))$ が c を含まない」ような R の下限に到達してしまう．このような下限に到達してしまうことは，$\hat{B}_c$ は上のような和集合で表されること，$c \in \hat{B}_c$ よりわかる．このような R 下限のを r_c と表すことにしよう．再び補題 3.10 より，ψ_c は最大で $\psi_c : \hat{\mathbb{B}}(\sqrt{r_c}) \to \psi_c(\hat{\mathbb{B}}(\sqrt{r_c})) \subset \hat{B}_c$ まで，等角な同相写像として拡張できる．記号を簡単にするために，$\psi_c(\hat{\mathbb{B}}(R))$ は $\hat{B}_c(R)$ と表すことにしよう．ψ_c の逆写像をとることで，次の定理をえる：

定理 3.11 ($\mathbb{B}_c$ **のベトヒャー座標，その２**) $c \notin \mathbb{M}$ すなわち，$c \notin K_c$ とする．このとき，ある $r = r_c$ が存在して，ベトヒャー座標 ϕ_c は $f_c : \hat{B}_c(\sqrt{r_c}) \to \hat{B}_c(r_c)$ と $f_0 : \hat{\mathbb{B}}(\sqrt{r_c}) \to \hat{\mathbb{B}}(r_c)$ の等角な共役写像 $\phi_c : \hat{B}_c(\sqrt{r_c}) \to \hat{\mathbb{B}}(\sqrt{r_c})$ として拡張できる．

それでは，ベトヒャー座標が拡張できない部分に，充填ジュリア集合 K_c はどのように入っているのだろうか？そこで現れるのが，**カントール集合** (Cantor set) と呼ばれるタイプの集合である．

８の字型等高線． いま，$c \in \hat{B}$ では ψ_c が定義されているから，c を含む等高線 $E_0 := \mathcal{E}_c(r_c)$ が存在する．この逆像 $E_1 = f_c^{-1}(E_0)$ はどんな形をしているのだろう？まず，$z \in E_0 - \{c\}$ であれば，$f_c(\zeta) = z$ の解 $\zeta \in E_1$ は２つ存在して，しかも $f : \zeta \mapsto z$ は局所的に等角な逆写像がとれるから，そのような点 ζ における E_1 の局所的な形状はもとの等高線 E_0 と（形のうえでは）かわらない．

一方，$c \in E_0$ に対応する逆像は $0 \in E_1$，この１点のみであり，しかも写像は局所的に２対１となっているのであった．従って，0 のまわりの E_1 の局所的な形状は図 3.7 のようになることがわかる．すなわち，E_1 は原点でのみ交差する閉曲線，すなわち８の字型の曲線となる．このような曲線が現れた時点で，補題 3.10 のような議論は破綻してしまったわけである．しかし，あとでグリーン関数を導入して正当化するように,「等高線」と呼んでも不自然でない曲線であるから，とりあえず「８の字型等高線」とよぶことにしておこう．

つぎに $\sqrt{r_c} < R < r_c$ をみたす R をとり，$E' = \mathcal{E}_c(R)$ の逆像 $E_1' = f_c^{-1}(E')$ を考えてみよう．これらは「８の字型等高線」 E_1 に囲まれた部分に存在するはずである．しかも，局所的には等角に「等高線の束が等高線の束に写っている」ことから，結局 E_1' は，E_1 が囲む２つの領域にそれぞれジョルダン閉曲線として含まれることになる．

記号力学系への準備． 同様に $E_2 = f_c^{-1}(E_1)$, $E_2' = f_c^{-1}(E_1')$ といった集合を考えていくと，充填ジュリア集合 K_c の居場所と形が分かってくるはずだ．そのプロセスをもう少しシステマティックに行うために，いまからちょっとした「記号」を導入する．

まず，$\psi_c = \phi_c^{-1} : \hat{\mathbb{B}}(\sqrt{r_c}) \to \hat{B}_c$ が同相写像として定義されることから，曲線（部分的な外射線）

$$\mathcal{R}_c(t : r_c) \;:=\; \psi_c\Big(\rho e^{2\pi i t} \in \hat{\mathbb{B}} \,:\, r_c < \rho < \infty\Big)$$

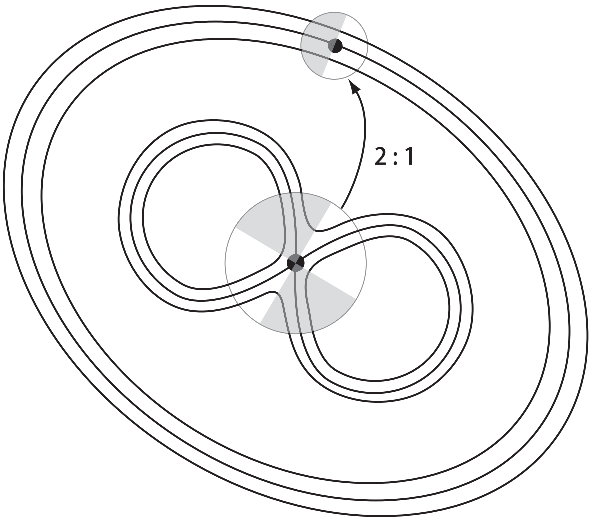


図 3.7: 一番最初に現れる 8 の字型等高線は原点を通る.

が定義できる．とくに，$\phi_c(c) = r_c e^{2\pi i t_c}$ $(t_c \in \mathbb{T})$ とすると，$\mathcal{R}_c(t_c : r_c)$ は c と ∞ を端点に持つ.（端点自体は含まれないが.）次に，その f_c による逆像で $\mathcal{R}_c(t_c/2 : r_c)$ を含むほうを $\mathcal{R}_0$，$\mathcal{R}_c((t_c+1)/2 : r_c)$ を含むほうを $\mathcal{R}_1$ で表そう．これらは端点 0 で接しており，和集合 $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1 \cup \{0\}$ は複素平面を 2 つに分割する．そこで，集合

$$\{\mathcal{R}_c(t : r_c) \,:\, t_c/2 < t < (t_c+1)/2\}$$

を含むほうを P_0，もう一方を P_1 と表すことにしよう．

いま，等高線 E で囲まれる（原点を含む）位相的円板[11] を V としよう．また 8 の字型等高線 E_1 が囲む二つの開領域は位相的円板であり，それぞれ P_0 と P_1 に含まれる部分を U_0 と U_1 で表すことにしよう．充填ジュリア集合はこの中に含まれている．

このとき，写像 $f_c : U_0 \cup U_1 \to V$ は U_0 もしくは U_1 に制限すると等角な同相写像であるから，等角な逆写像 $g_0 : V \to U_0$ および $g_1 : V \to U_1$ が定まる（図 3.8）．以上で準備は終わりである．

「記号」との対応づけ． まず，U_0, U_1 を $g_0 : V \to U_0$ で写した像をそれぞれ

$$U_{00} \;:=\; g_0(U_0) \qquad U_{01} \;:=\; g_0(U_1)$$

定義する．これらは，8 の字型等高線 E_1 の像 $g_0(E_1)$ で囲まれる U_0 内の領域である．同様に，U_1 内に含まれる $g_1(E_1)$ の中身

$$U_{10} \;:=\; g_1(U_0) \qquad U_{11} \;:=\; g_1(U_1)$$

[11]**位相的円板** (topological disk) とは，単位円板 $\mathbb{D}$ を同相写像で写した像のことである．リーマンの写像定理（定理 2.9）によれば，これは連結かつ単連結な（平面）領域，ということになる．

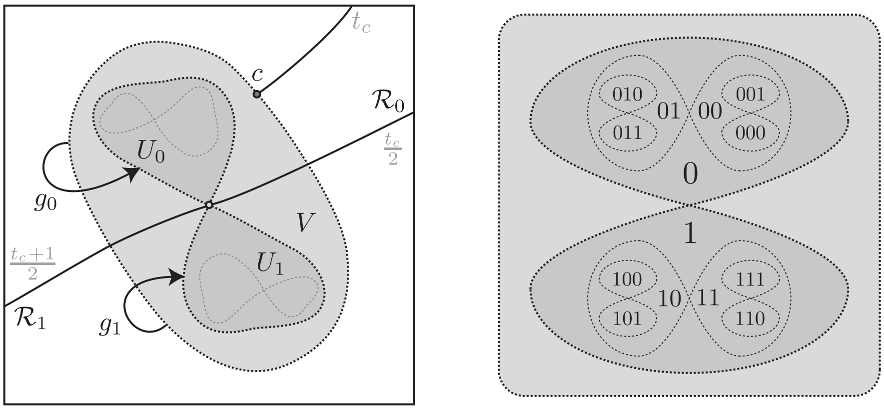


図 3.8: 写像 $g_j : U_j \to V$ $(j = 0, 1)$ の定義および「記号」との対応.

も定義できる．これらを再び g_0 と g_1 で写した像をそれぞれ

$$\begin{array}{lclclcl} U_{000} & := & g_0(U_{00}) & \quad & U_{001} & := & g_0(U_{01}) \\ U_{010} & := & g_0(U_{10}) & & U_{011} & := & g_0(U_{11}) \\ U_{100} & := & g_1(U_{00}) & & U_{101} & := & g_1(U_{01}) \\ U_{010} & := & g_1(U_{10}) & & U_{111} & := & g_1(U_{11}) \end{array}$$

と定義する．ルールはもう明解であろう．この操作を繰り返して，一般に任意に与えられた長さ n の有限列（「記号」）

$$u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \quad (u_j = 0 \text{ もしくは } 1)$$

にたいし，

$$U_{0u_1u_2u_3\ldots u_n} \; := \; g_0(U_{u_1u_2u_3\ldots u_n}) \quad U_{1u_1u_2u_3\ldots u_n} \; := \; g_1(U_{u_1u_2u_3\ldots u_n})$$

と定義すれば，長さ $n \geq 1$ にたいし，計 2^n 個の位相的円板が定まるわけである．しかも，関係式

- $V \; \supset \; U_{u_1} \; \supset \; U_{u_1u_2} \; \supset \; \cdots \; \supset \; U_{u_1u_2u_3\ldots u_n}$
- $f_c(U_{u_1u_2u_3\ldots u_n}) \; = \; U_{u_2u_3\ldots u_n}$

が成り立つことは定義より，もしくは丹念に図をみていけば理解されるだろう．この時点で，充填ジュリア集合 K_c 内の点の居場所が，これら 2^n 個の円板内に制限されたことがわかる．この操作を続けていった極限の果てに，K_c は存在するはずであろう．

この操作を無限に続けていくには，無限の長さの列が必要である．そこで，

$$\Sigma \; := \; \{\underline{u} = u_1 u_2 u_3 \ldots : u_j = 0 \text{ もしくは } 1\}$$

という集合を考える．じつは，次のことが成り立つ：

命題 3.12 任意の $\underline{u} = u_1u_2u_3\ldots \in \Sigma$ にたいし，充填ジュリア集合の点

$$\pi(\underline{u}) \ := \ \bigcap_{n \geq 1} U_{u_1u_2\ldots u_n} \ \in \ K_c$$

が定まる．さらに，写像 $\pi = \pi_c : \Sigma \to K_c$ は全単射である．

この証明は（直感に反して）意外に難しい．その難しさの本質は，たとえば縮小する位相的円板の列

$$U_0 \ \supset \ U_1 \ \supset \ U_2 \ \supset \ \cdots$$

を考えたとき,「極限」 $\bigcap_{n \geq 0} U_n$ がかならずしも一点になるとは限らないことにある．たとえば，原点中心・半径 $1 + 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ の円板の列を考えてみればよい．現時点ではこのような状況が起きない保証は，まったくされていないのである．したがって，証明では円板の列 $\{U_{u_1u_2\ldots u_n}\}$ がある特殊な性質に基づいて十分なスピードで一様に小さくなっていることをしめさなくてはならない．少なくとも，初等的な複素関数論だけを用いて証明するにはそれなりの努力が必要である．

とりあえず，一旦この命題を認めることにして，話を先に進めよう．

この命題から，記号の列に対応する円板の列の極限にはかならず K_c の元が存在することがわかった．とくに，K_c 内の異なる 2 点はいずれも適当な E_1 の逆像 $\bigcup_{n \geq 0} f_c^{-n}(E_1)$ に含まれる 8 の字型曲線によって分離されている．K_c は，究極まで粉々になった塵のあつまりのような平面集合なのである．このように連結成分がすべて 1 点からなる集合は**全不連結** (totally disconnected) と呼ばれる．

すなわち，

系 3.13 $c \notin \mathbb{M}$ のとき，充填ジュリア集合 K_c は連結ではない．しかも，全不連結である．

上の結果と前節で得られた結果とまとめると，次の命題をえる．じつは，20 世紀初頭のファトウとジュリアに由来する古典的な結果である：

定理 3.14 (連結 vs. 全不連結) 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ とその充填ジュリア集合 K_c について，次がなりたつ：

- $0 \in K_c$ のとき，K_c は連結.
- $0 \notin K_c$ のとき，K_c は全不連結.

ここで，$0 \in K_c$ は $c \in \mathbb{M}$ と同値であったから，次の系をえる：

系 3.15 ($\mathbb{M}$ の定義その 2) マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ は次のように定義してもよい：

$$\mathbb{M} \ := \ \{c \in \mathbb{C} \ : \ K_c \text{は連結}\}$$

記号力学系とカントール集合． では次に，$c \notin \mathbb{M}$ のときの力学系 (K_c, f_c) がじつは集合 Σ 上の力学系によって完全に記述できることをチェックしよう．

集合 Σ の元 $\underline{u} = u_1 u_2 \ldots$，$\underline{v} = v_1 v_2 \ldots$，にたいし，**距離** (distance) を

$$d_\Sigma(\underline{u}, \underline{v}) \ := \ \sum_{n \geq 1} \frac{|u_n - v_n|}{2^n}$$

で定めておく．このような距離を定めることで集合 Σ 内に「近い」「遠い」と言った言葉が意味を持つようになる．感覚的には，おおむね 2 進小数をイメージすればよい．たとえば，

$$d_\Sigma(0100000 \cdots, 0101000 \cdots) \ > \ d_\Sigma(0100000 \cdots, 0100010 \cdots)$$

が成り立つ.（左辺は頭 3 桁が一致，右辺は頭 5 桁が一致しているから.）この距離には最大値が存在していて，$\underline{0} = 0000\ldots$ と $\underline{1} = 1111\ldots$ により

$$d_\Sigma(\underline{0}, \underline{1}) \ \leq \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \ = \ 1$$

という形で実現される．

さらに，Σ 上の力学系を定義しておく．非常にシンプルに，写像 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ を

$$\sigma : u_1 u_2 u_3 \cdots \longmapsto u_2 u_3 u_4 \cdots$$

によって定める．このような写像を**シフト写像** (shift map) と呼び，力学系 (Σ, σ) を**記号力学系** (symbolic dynamics) とよぶ．[12]シフト写像はつぎの意味で連続である：任意の点列 $\underline{u}^n \in \Sigma$ と $\underline{u} \in \Sigma$ について，$n \to \infty$ のとき

$$d_\Sigma(\underline{u}^n, \underline{u}) \to 0 \implies d_\Sigma(\sigma(\underline{u}^n), \sigma(\underline{u})) \to 0.$$

練習問題． シフト写像の連続性をチェックせよ．

さてじつは，次のことが成り立つ：

定理 3.16 全単射 $\pi = \pi_c : \Sigma \to K_c$ は次の意味で同相写像である：点列 $\underline{u}^n \in \Sigma$ と $\underline{u} \in \Sigma$ について，$n \to \infty$ のとき

$$d_\Sigma(\underline{u}^n, \underline{u}) \to 0 \iff |\pi(\underline{u}^n) - \pi(\underline{u})| \to 0$$

また，π は力学系 (Σ, σ) と (K_c, f_c) の間の共役写像をあたえる．すなわち，

$$\pi \circ \sigma \ = \ f_c \circ \pi$$

[12]ちなみに，2 進小数 $u = 0.u_1 u_2 \cdots$ に「シフト写像」を施したもの $0.u_2 u_3 \cdots$ は $2u = u_1.u_2 u_3 \cdots$ の小数部分になることに注意しておこう．

したがって，記号力学系は充填ジュリア集合上の力学系 (K_c, f_c) の普遍的な（要するに $c \notin \mathbb{M}$ に依存しない）モデルとなっている．記号力学系 (Σ, σ) の世界を π_c というレンズを通し $\mathbb{C}$ に射影したものが (K_c, f_c) の力学系，というわけである．

一般に，Σ と上の意味で同相な複素平面上の集合を**カントール集合** (Cantor set) とよぶ．すなわち，$c \notin \mathbb{M}$ のとき，充填ジュリア集合 K_c はカントール集合である．

では，命題 3.12 および定理 3.16 の証明をみていこう．まず，次の補題が必要である：

補題 3.17 (一様な縮小性) 集合 $E \subset \mathbb{C}$ にたいし，その**直径** (diameter) を

$$\operatorname{diam} E \ := \ \sup\{|x-y| \ : \ x, y \in E\}$$

により定める．$c \notin \mathbb{M}$ のとき，ある正定数 $C = C_c > 0,\ \lambda = \lambda_c < 1$ が存在して，任意の有限列 $u_1 u_2 \ldots u_n$ について

$$\operatorname{diam} U_{u_1 u_2 \ldots u_n} \ \le \ C\lambda^n$$

をみたす．

すなわち，$U_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ の直径は c と位相的円板列の深さ n のみに依存する量で上から一様に押さえられる．しかも，$\operatorname{diam} U_{u_1 u_2 \ldots u_n} \to 0\ (n \to \infty)$ である．

すでに述べたように，この証明は少し込み入っているので，後回しにして命題 3.12 と定理 3.16 を先に証明してしまおう．

証明. **(命題 3.12)** 任意に点列 $z_n \in U_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ を定めたとき，$m \ge n$ であれば $z_n, z_m \in U_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ である．よって補題 3.17 より，$|z_n - z_m| \ \le \ \operatorname{diam} U_{u_1 u_2 \ldots u_n} \to 0\ (n \to \infty)$ である．すなわち数列 z_n はコーシー列であり，極限 $z = \lim z_n$ を持つ．[13] もし，別の点列 $z'_n \in U_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ によって別の極限 $z' = \lim z'_n$ が定まったとしても，

$$|z - z'| \ \le \ |z - z_n| + |z_n - z'_n| + |z'_n - z'| \ \to \ 0$$

より $z = z'$ でなくてならない．よって $\bigcap_{n \ge 0} U_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ は 1 点でなくてななららない．これを $\pi(\underline{u}) := z$ とおく．

つぎに，$z \in K_c$ であることをしめそう．定義より任意の n について $z \in U_{u_1 u_2 \ldots u_n}$ であるが，これは $f_c^n(z) \in V$ を意味し，z の軌道が有界であることをしめしている．よって $z \in K_c$ でなくてはならない．これで，写像 $\pi : \Sigma \to K_c$ が定まった．

さて，$\underline{u} \neq \underline{u}' = u'_1 u'_2 \ldots$ としよう．このとき，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，$u_n \neq u'_n$ である．これは，$U_{u_1 u_2 \ldots u_n} \neq U_{u'_1 u'_2 \ldots u'_n}$ を意味する．とくに，これらの位相的円板はそれぞれ $\pi(\underline{u})$ と $\pi(\underline{u}')$ を含むが，互いに交わらないことから，$\pi(\underline{u}) \neq \pi(\underline{u}')$ でなくてはならない．これは π の単射性を意味する．また，任意の $z \in K_c$ にたいし，$z \in U_{u_1}$，$z \in U_{u_1 u_2}$，$z \in U_{u_1 u_2 u_3} \ldots$ となる位相的円板の縮小列を選んでいくことがで

[13] 数列 $z_n \in \mathbb{C}$ が**コーシー列** (Cauchy seqence) であるとは，$n, m \to \infty$ のとき $|z_m - z_n| \to 0$ となることをいうのであった．複素平面上では「コーシー列＝収束列」である．

きる．このようにして得られる記号列 $\underline{u} = u_1u_2\dots$ は $\pi(\underline{u}) = z$ をみたすことが上と同様の議論によりわかる．すなわち，π は全射でもある． ■

定理 3.16 の証明． 任意に小さい $\epsilon > 0$ を固定しよう．このとき，$\underline{u}$, $\underline{u}' \in \Sigma$ が $d_\Sigma(\underline{u}, \underline{u}') < \epsilon$ をみたすためには，ある十分大きな N にたいし $u_j = u'_j$ $(1 \le j \le N)$ であり，

$$d_\Sigma(\underline{u}, \underline{u}') \ \le \ \sum_{j \ge N+1} \frac{|u_j - u'_j|}{2^j} \ \le \ \frac{1}{2^N} \ < \ \epsilon$$

でなくてはならない．このとき，$\pi(\underline{u})$, $\pi(\underline{u}') \in U_{u_1u_2\cdots u_N}$ であるから，補題 3.17 より $|\pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}')| \le C\lambda^N$ をみたす．したがって $\underline{u} = \underline{u}^n$ の場合，$d_\Sigma(\underline{u}', \underline{u}) \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば対応する N は発散し，$|\pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}')| \to 0$ をみたす．

逆に，任意に小さい $\epsilon > 0$ について $\pi(\underline{u})$, $\pi(\underline{u}') \in K_c$ が $|\pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}')| < \epsilon$ をみたすとき，$\pi(\underline{u}') \in U_{u_1u_2\dots u_N}$ となる最大の深さ N をとることができる．このとき $u_j = u'_j$ $(1 \le j \le N)$ をみたすから，$d_\Sigma(\underline{u}, \underline{u}') \le 1/2^N$ である．したがって $\underline{u} = \underline{u}^n$ の場合，$|\pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}')| \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば対応する N も発散するようにとることができ，$d_\Sigma(\underline{u}, \underline{u}') \to 0$ をみたす．

最後に共役性 $\pi \circ \sigma = f_c \circ \pi$ をチェックしよう．$\underline{u} \in \Sigma$ を固定する．このとき，任意の n について $\pi(\underline{u}) \in U_{u_1u_2\dots u_n}$ より $f_c(\pi(\underline{u})) \in f_c(U_{u_1u_2\dots u_n}) = U_{u_2\dots u_n}$．従って

$$f_c(\pi(\underline{u})) \ = \ \bigcap_{n \ge 1} U_{u_2\dots u_n} \ = \ \pi(\sigma(\underline{u})).$$

■

補題 3.17 の証明． さて後回しにした補題（「一様な縮小性」）を証明しよう．

まず V の上には $g_0 : V \to U_0$ と $g_1 : V \to U_1$ のふたつの同相な等角写像があり，$U_{u_1u_2\dots u_n}$ は

$$U_{u_1u_2\dots u_n} \ = \ g_{u_1} \circ g_{u_2} \circ \cdots \circ g_{u_n}(V)$$

であることに注意する．これを単位円板 $\mathbb{D}$ での出来事に翻訳してみよう．

リーマンの写像定理（定理 2.9）から，ある等角な全単射 $\Phi : V \to \mathbb{D}$ が存在する．この全単射を通して上の $U_{u_1u_2\dots u_n}$ が生成される様子を眺めてみると，$G_0 := \Phi \circ g_0 \circ \Phi^{-1} : \mathbb{D} \to \Phi(U_0)$, $G_1 := \Phi \circ g_1 \circ \Phi^{-1} : \mathbb{D} \to \Phi(U_1)$ というふたつの等角な全単射があって，

$$\Phi(U_{u_1u_2\dots u_n}) \ = \ G_{u_1} \circ G_{u_2} \circ \cdots \circ G_{u_n}(\mathbb{D})$$

となっていることがわかる．また，$\overline{U_0}$ と $\overline{U_1}$ はともに V に含まれるから，この状況を Φ を通して観察することで，

$$\overline{\Phi(U_0)} \cup \overline{\Phi(U_0)} \ \subset \ \mathbb{D}(r)$$

となる $r < 1$ が存在する．

さて $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$ にたいし，

$$\delta(w_1, w_2) \;=\; \left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_1} w_2}\right|$$

を考えると，シュワルツ・ピックの定理から導かれる命題 2.15 を G_0, G_1 にそれぞれすることで，ある $\lambda = \lambda(G_0, G_1, r) < 1$ が存在して

$$\delta(G_i(w_1), G_i(w_2)) \;\leq\; \lambda\delta(w_1, w_2)$$

がすべての $i = 0, 1$ および $w_1, w_2 \in \mathbb{D}(r)$ について成立する．

記号を簡単にするために

$$\begin{aligned} g_{n-1} \;&:=\; g_{u_1} \circ g_{u_2} \circ \cdots \circ g_{u_{n-1}} \\ G_{n-1} \;&:=\; G_{u_1} \circ G_{u_2} \circ \cdots \circ G_{u_{n-1}} \end{aligned}$$

と定義すると，すべての $w_1, w_2 \in \mathbb{D}(r)$ にたいし，命題 2.15 の後半と同様の議論によって，

$$|G_{n-1}(w_1) - G_{n-1}(w_2)| \;\leq\; C\lambda^{n-1}$$

（ただし $C = 2r(1 + r^2)/(1 - r^2)$）が成立する．この結果を Φ^{-1} での結果に読み替えよう．

$\overline{\mathbb{D}(r)}$ のコンパクト性より，ある正の数 M が存在して任意の $w \in \overline{\mathbb{D}(r)}$ にたいし

$$|(\Phi^{-1})'(w)| \leq M$$

が成り立つとしてよい．これより，w_1, $w_2 \in \mathbb{D}(r)$ であれば，$z_1 = \Phi^{-1}(w_1)$ および $z_2 = \Phi^{-1}(w_2)$ にたいし

$$|z_1 - z_2| \;\leq\; M|w_1 - w_2|$$

が成り立つ．[14] この不等式の w_1, w_2 を $G_{n-1}(w_1)$, $G_{n-1}(w_2)$ で置き換えれば，$z_j = \Phi^{-1}(w_j)$ $(j = 1, 2)$ にたいし

$$|g_{n-1}(z_1) - g_{n-1}(z_2)| \;\leq\; M|G_{n-1}(w_1) - G_{n-1}(w_2)| \;\leq\; MC\lambda^{n-1}$$

を得る．

では，直径について考えよう．

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} U_{u_1 u_2 \ldots u_n} \;&=\; \sup\{|x - y| \,:\, x, y \in U_{u_1 u_2 \ldots u_n}\} \\ &=\; \sup\{|g_{n-1}(g_{u_n}(x')) - g_{n-1}(g_{u_n}(y'))| \,:\, x', y' \in V\} \end{aligned}$$

[14] w が円板 $\mathbb{D}(r)$ の中を秒速 1 で w_1 から w_2 へ移動するとき，その Φ^{-1} で写した像 z の速さがちょうど $|(\Phi^{-1})'(w)|$ であり，それは M を超えない．これは「速度制限」である．移動にかかる時間は $|w_1 - w_2|$ であるから，像 z は z_1 からスタートして，どんなに遠くても制限速度いっぱいで移動した距離 $M|w_1 - w_2|$ までしか到達しえない．よってこの不等式を得る．

であるが，$g_{u_n}(x'), g_{u_n}(y') \in U_{u_n} \subset \Phi^{-1}(\overline{\mathbb{D}(r)})$ より

$$\operatorname{diam} U_{u_1 u_2 \ldots u_n} \ \le \ \frac{MC}{\lambda}\lambda^n$$

を得る．ここで定数 MC/λ を改めて $C = C_c$ とすればよい． ■

以上の結果から，$c \notin \mathbb{M}$ のとき，すなわち K_c がカントール集合のとき，力学系 (K_c, f_c) はどれも (Σ, σ) を経由して互いに共役となることがわかった.（アファイン共役ではないが.）その意味で，力学系としては本質的に一種類しかない.

一方，$c \in \mathbb{M}$ のとき，すなわち K_c が連結な場合は，多種多様な力学系が存在する．次のタスクとしては，連結な K_c の形，もしくはそのときの力学系 $f_c \curvearrowright \mathbb{C}$ を分類することであろう．じつは，その分類とマンデルブロー集合の形状には深い関係がある．詳細は次章以降で明らかにしていこう.

練習問題（グリーン関数）． ベトヒャー座標 $\phi_c : \hat{B}(R) \to \hat{\mathbb{B}}$ が定義されているとき，関数 $G_c(z) := \log|\phi_c(z)|$ は関係式

$$G_c(f_c(z)) \ = \ \log|\phi_c(f_c(z))| \ = \ \log|\phi_c(z)|^2 \ = \ 2G_c(z)$$

をみたす．これを用いれば，$z \in \hat{B}_c$ においてベトヒャー座標が定義されていなくても，十分大きな $n \in \mathbb{N}$ を選び

$$G_c(z) \ := \ \frac{G_c(f_c^n(z))}{2^n}$$

とすることで関数 $G_c : \hat{B}_c \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が定義できる．これを K_c の**グリーン関数** (Green's function) とよぶ.

グリーン関数は次の性質をもつことが知られている：

- $G_c : B_c \to \mathbb{R}$ は滑らかな調和関数である．すなわち，$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G_c(z) \equiv 0.$
- $z \to z_0 \in K_c$ のとき，$G_c(z) \to 0$．したがって $z \in K_c$ のとき $G_c(z) = 0$ 定義すると，$G_c : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ は連続関数．[15]
- $G_c(f_c(z)) = 2G_c(z)$ をみたす.

これら可能なだけチェックせよ.（簡単ではない.）

グリーン関数は K_c から ∞ までのの高さを表す関数だと考えられる．実際，球面 $\hat{\mathbb{C}}$ において点電荷を ∞ におき，K_c でアースした場合に生じるポテンシャル関数が $G_c : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ だと考えられる．その意味で，$G_c(z) = a > 0$ （一定）となる曲線を「等ポテンシャル線」もしくは「等高線」とよぶのは自然であろう.

練習問題． グラフ描画ソフトを用いて，$G_c(z) \approx \log|f_c^n(z)|^{1/2^n}$ と近似し，$G_c : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ のグラフを書け.（3 次元のグラフならば，$z \mapsto -G_c(z)$ のほうが絵としてはみやすいかもしれない．図 3.9）また，c の値を変えて等高線の形がどのように変化するか確認せよ.

[15] じつは，2 変数関数 $(c, z) \mapsto G_c(z)$ はすべての $(c, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ において連続である.

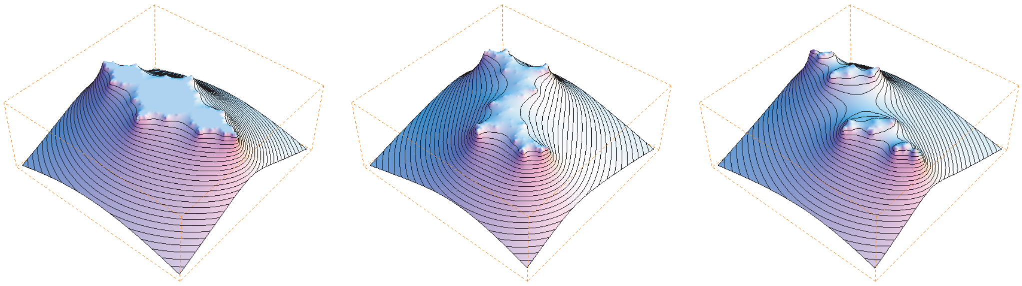


図 3.9: 関数 $z \mapsto -G_c(z)$ の絵を $c = -1,\ i, -1+i$ について描かせたもの．
等高線の形に注意．

3.5 マンデルブロー集合の連結性

1980 年代初頭，ドュアディ(Douady) とハバード (Hubbard) はマンデルブロー集合の理論における金字塔ともいえる，次の定理を証明した：

定理 3.18 等角な同相写像 $\Phi : \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M} \to \hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$ で $\Phi(c)/c \to 1\ (c \to \infty)$ をみたすものが存在する．

したがって，$\hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M}$ は開円板と同相である．これより直ちに，

定理 3.19 $\mathbb{M}$ は連結である．

をえる．[16] そうでなければ，$\hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M}$ に「穴」があいてしまい上の定理に矛盾するからである．

当初，マンデルブローが IBM のコンピューターで $\mathbb{M}$ を描いたとき，彼は「$\mathbb{M}$ には無数の島がある」と考えていたようである．(ちょうど，充填ジュリア集合がカントール集合になりうるように．) 定理 3.19 はマンデルブローの予想に反して，M がすべて「ひとつながり」の大陸であることを主張する．

じつは，定理 3.18 の Φ はただ存在が証明されたのではなく，すぐにみるように，かなり具体的に構成される．その構成法から，ジュングレイス (Jungreis, 1985) は Φ を無限遠点中心に展開したときの係数が満たす漸化式を見出した．彼の結果によると：

定理 3.20 $\Phi : \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M} \to \hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$ は無限遠点の周りで次のような級数展開をもつ：

$$\Phi(c) \ = \ c - \frac{1}{2} + \frac{1}{8c} - \frac{1}{4c^2} + \frac{15}{128c^3} + \frac{0}{c^4} - \frac{47}{1024c^5} + \cdots .$$

また，c^{-n} の係数はすべて $m/2^n$ の形の有理数であり，c^{-2^n} の係数は 0 である．

[16] 同時期に，シボニー (Sibony) も独立に $\mathbb{M}$ の連結性を証明したとされる．(セミナーで発表されたのみで，文献が残っていない模様．)

この結果自体は M の性質について得に重要な情報をもたらさないが，係数がすべて有理数になるというのは，なかなか奥ゆかしいではないか．

3.5.1 定理 3.18 の証明

少し長くなるが，定理 3.18 の証明に挑戦してみよう．以下記号をすっきりさせるため，

$$\hat{H}_\infty \ := \ \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M} \ = \ H_\infty \cup \{\infty\}$$

とおく．また，$\hat{\mathbb{B}} = \hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$ という記号も思い出しておこう．目標は，等角な同相写像 $\Phi : \hat{H}_\infty \to \hat{\mathbb{B}}$ をみつけることであるが，この作業自体は意外とあっけなく済んでしまう．$c \in H_\infty$ のとき，定理 3.11 より $c \in B_c$ かつ $\phi_c(c) \in \hat{\mathbb{B}}$ が定義された．ここで，

$$\Phi(c) \ := \ \phi_c(c)$$

とおくと，なんとこれだけで定理 3.18 のいう等角写像になってしまうのである！しかし，これをチェックすることはそれほど簡単ではない．リーマン面（1 次元複素多様体）や分岐被覆面についての知識があれば非常にすっきりと証明が書けるのだが，ここではそのような知識を補うかたちできっちりと証明を追っていこう．

まず $|c| > 2$ を仮定すると，$\phi_c(c)$ は具体的に

$$\Phi(c) \ = \ \phi_c(c) \ = \ c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{\{f_c^{n-1}(c)\}^2}\right)^{1/2^n}.$$

と収束する無限積の形で書き表される．収束性の評価は c を（$|c| > 2$ の範囲で）わずかに変えても一様であったから，$c \mapsto \Phi(c)$ は連続，また，無限積の形から $\Phi(c)/c \to 1$ $(c \to \infty)$ であり，ベトヒャー座標のときと同様に無限遠点の近傍で等角な写像であることもわかる．[17]とくに，$\Phi(c) = \infty$ となるのは $c = \infty$ のときに限る．

> **補題 3.21** 数列 $c_m \in H_\infty$ は $m \to \infty$ のとき $c_m \to c_0 \in \partial\mathbb{M}$ をみたすと仮定する．このとき，$|\Phi(c_m)| \to 1$.

証明（補題 3.21）． $c \in H_\infty$ であることから，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $|f_c^k(c)| = |C_k(c)| > 2$ をみたす．とくに，そのような最初の k から，$|C_n(c)|$ の絶対値は単調に増加して発散するので（命題 1.1），$|C_n(c)| \geq 4$ となる最初の n が存在する．これは c に依存するので，$n = n(c)$ と表すことにしよう．

いま仮定のように，$c_m \to c_0 \in \mathbb{M}$ であるとき，$n(c_m) \to \infty$ でなくてはならない．なぜなら，もし $n(c_m)$ に上限 $M \in \mathbb{N}$ があれば，写像 $c \mapsto C_M(c)$ は c に関する多項式であり，c について連続的に変化する．$c_m \to c_0$ より $C_M(c_m) \to C_M(c_0)$ でなくてはなら

[17]実際，$\tau \circ \Phi \circ \tau^{-1}(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ の形に書けることがわかる．あとはベトヒャー座標のときと同様の議論をすれば，この写像が原点近傍で単射となることがわかる．

ず，$|C_M(c_0)| \geq 4$ が満たされる．命題 1.1 より，これは $c_0 \in H_\infty$ を意味するから，矛盾である．

さて系 1.2 より，$\mathbb{M}$ は原点中心半径 2 の閉円板に含まれたから，パラメーター $c = c_m \to c_0$ はすべて $|c| < 3$ をみたすと仮定してよい．$R_c = \max\{2, |c|\}$ とおくと，定理 3.3 よりベトヒャー座標 $\phi_c : \hat{\mathbb{B}}(R_c) \to \hat{\mathbb{B}}$ が定義できて，しかも $1 < |\phi_c(z)| \leq 2|z|$ をみたすのであった（定理 3.3 証明の脚注参照）．ここで関係式

$$\phi_c(f_c^{n(c)}(c)) \;=\; \{\phi_c(c)\}^{2^{n(c)}} \;=\; \{\Phi(c)\}^{2^{n(c)}}$$

および $|f_c^{n(c)-1}(c)| = |C_{n(c)-1}(c)| < 4$ に注意すると，

$$\begin{aligned} 1 \;<\; |\Phi(c)|^{2^{n(c)}} \;&=\; \left|\phi_c(f_c^{n(c)}(c))\right| \\ \leq\; 2\left|f_c^{n(c)}(c)\right| \;&=\; 2\left|f_c^{n(c)-1}(c)^2 + c\right| \\ \leq\; 2\left(|f_c^{n(c)-1}(c)|^2 + |c|\right) \;&<\; 2 \cdot (4^2 + 3) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$n(c_m) \to \infty$ より，$|\Phi(c_m)| \to 1$ でなくてはならない．

■（補題 3.21）

補題 3.22 写像 $\Phi : \hat{H}_\infty \to \hat{\mathbb{B}}$ は全射である．

証明（補題 3.22：集積点やコンパクト集合についてどこかで解説して，ここの証明はもっとすっきりさせたい.）． ある $w_0 \in \hat{\mathbb{B}} - \Phi(\hat{H}_\infty)$ が存在したと仮定して矛盾を導こう．このとき,（必要があれば w_0 を選び直して）$w_0 \in \partial\Phi(\hat{H}_\infty) \cap \hat{\mathbb{B}}$ と仮定してよい．いま，適当に $w_n \to w_0$ となる数列 $w_n \in \Phi(\hat{H}_\infty)$ を選ぼう．このとき，数列 $c_n \in \hat{H}_\infty$ が存在して，$\Phi(c_n) = w_n$ をみたす.（図 3.10）

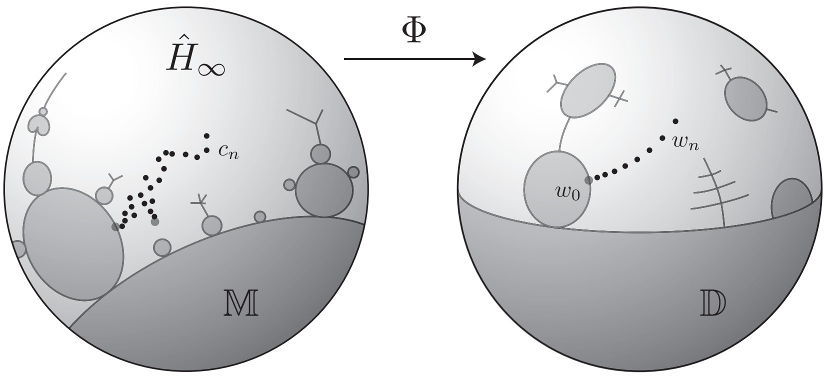


図 3.10: 像 $\Phi(\hat{H}_\infty)$ が右のようになることはない.

ここで，各 c_n と $\mathbb{M}$ の距離を $\operatorname{dist}(c_n, \mathbb{M}) := \min\{|c_n - c| \,:\, c \in \mathbb{M}\}$ で表し，

$$\delta \;=\; \inf_n \operatorname{dist}(c_n, \mathbb{M})$$

という数を考えてみる.（$\mathbb{M}$ は閉集合なので，実際には c_n と $\partial\mathbb{M}$ の距離を考えていることになる.）もし $\delta = 0$ の場合，ある適当な部分列 $\{n(1), n(2), \ldots\} \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$ と $c \in \mathbb{M}$ が存在して $c_{n(i)} \to c \in \mathbb{M}$ $(i \to \infty)$ とできる．[18] 補題 3.21 より，これは $|w_{n(i)}| = |\Phi(c_{n(i)})| \to 1$ を意味するから，$w_0 \in \hat{\mathbb{B}}$ に矛盾する．

次に $\delta > 0$ の場合を考えよう．$\hat{\mathbb{C}}$ 内で $\mathbb{M}$ からの距離が δ 以上離れている集合 E は閉集合をなすから，コンパクトである．[19]したがって，$c_n \in E$ より，収束する部分列 $c_{n(i)} \to c_0 \in E$ を持つ．いま $E \subset \hat{H}_\infty$ であるから，$\Phi(c_0)$ が定まり，これは $\Phi(\hat{H}_\infty)$ の内点である．一方 Φ の連続性より $w_{n(i)} = \Phi(c_{n(i)}) \to w_0 = \Phi(c_0)$ をえるが，これは $w_0 \in \partial\Phi(\hat{H}_\infty)$ であったことに矛盾する．

以上より，$\hat{\mathbb{B}} = \Phi(\hat{H}_\infty)$ でなくてはならない． ■（補題 3.22）

補題 3.23 任意のコンパクト集合 $X \in \hat{\mathbb{B}}$ にたいし，逆像 $X' := \Phi^{-1}(X) \subset \hat{H}_\infty$ もコンパクトである．[20]

とくに，任意の $w \in \hat{\mathbb{B}}$ にたいし，逆像 $\Phi^{-1}(\{w\}) \subset \hat{H}_\infty$ は有限個の点からなる．

証明（補題 3.23）.

まず X' は閉集合であることをしめそう．もし $c_n \in X$ かつ $c_n \to c$ であれば, Φ の連続性と X が閉となることから，$\Phi(c_n) \to \Phi(c) \in X$ をみたす．よって $c \in \Phi^{-1}(\Phi(c)) \subset X'$ であり，X' は閉集合となる．[21]さらに，X' 内に $c_m \to c \in \partial\mathbb{M}$ となる点列が取れるならば，それは $|\Phi(c_m)| \to 1$ を意味する（補題 3.21）．一方で $\Phi(c_m) \in X \subset \hat{\mathbb{B}}$ でなくてはならないから，これは矛盾である．よって，X' は $\mathbb{M}$ から一定距離 δ 離れている．すなわち，$\hat{H}_\infty$ の中のコンパクト集合である．[22] このことから，一点集合 $X = \{w\}$（これはコンパクト）の逆像 X' はコンパクトである．もし X' が無限個の点を有するならば，$X' \subset \hat{H}_\infty$ の中で収束する点列 $c_n \to c$ が取れる．ところが，この点列は次の，いわゆる「一致の定理」に矛盾する：

一致の定理． 正則写像 $f, g : D \to \mathbb{C}$ にたいし，D 内で収束する点列 $z_n \to z \in D$ が存在し $f(z_n) = g(z_n)$ をみたすとき，D 上で恒等的に $f = g$ である．

---

[18]ここで $\mathbb{M}$ のコンパクト性を用いている．実際，$\mathrm{dist}\,(c_{n(i)}, \mathbb{M}) \to 0$ となる部分列がみつかるから，それぞれで $|c_{n(i)} - c_i| = \mathrm{dist}\,(c_{n(i)}, \mathbb{M})$ となる $c_i \in \partial\mathbb{M} \subset \mathbb{M}$ が存在している．このような c_i の列は $\mathbb{M}$ のコンパクト性より $\mathbb{M}$ 上で収束するさらなる部分列をもつ．この最後の部分列をあらためて $c_{n(i)}$ とおいたのである．

[19]$\mathrm{dist}\,(c, \mathbb{M}) < \delta$ をみたす $c \in \hat{\mathbb{C}}$ 全体 $N_\delta(\mathbb{M})$ は開集合である．従ってこの補集合 $E = \hat{\mathbb{C}} - N_\delta(\mathbb{M})$ は閉集合となる．この集合は無限遠点を含むが，$0 \in \mathbb{M}$ より原点は含まない．よって τ で写して眺めれば $\tau(E)$ が $\mathbb{C}$ 内の有界閉集合すなわちコンパクト集合となることがわかる．いわゆる「コンパクト集合内の任意の点列は収束する部分列を持つ」という性質は τ で写しても保存されるので，E の性質とみなせるのである．

[21]一般に，写像の連続性は「収束列の像は収束列」と標語的にいえる．一方で,「開集合の逆像は開集合」もしくは「閉集合の逆像は閉集合」とも言い換えられることが知られている．

[22]補題 3.22 の閉集合 E と同様に，$\tau(X')$ を考えると有界閉集合となる．コンパクト性はその帰結である．

ちなみに，もし閉集合 X' が $\mathbb{M}$ から一定距離離れていないとすると，X' が縮小する無限個の閉円板からなり，じわじわと $\mathbb{M}$ に近づく，ということがありえる．そのような可能性を排除したのである．

実際，$\Phi(c_n) = w$ より Φ は恒等的に定数写像 $\Phi(c) \equiv w$ でなくてはならないが，これは $\Phi : \hat{H}_\infty \to \hat{\mathbb{B}}$ が全射であったことに矛盾する．よって，$X' = \Phi^{-1}(\{w\})$ は有限個の点からなる． ■（補題 3.23）

補題 3.24 写像 $\Phi : \hat{H}_\infty \to \hat{\mathbb{B}}$ の分岐点の集合 P は $\hat{H}_\infty$ 内では集積点を持たない．また，分岐点の像の集合 $Q = \Phi(P)$ も $\hat{\mathbb{B}}$ 内で集積点を持たない．

証明（補題 3.24）． いま，Φ の分岐点の集合 P が集積点 $p \in \hat{H}_\infty$ をもつならば，ある P 内の点列 $p_n \to p$ が存在して $\Phi'(p_n) = 0$ をみたす．Φ が正則なとき，Φ' も正則関数であったから,「一致の定理」より，$\hat{\mathbb{B}}$ 上で恒等的に $\Phi'(c) = 0$ （定数）となる．これは Φ が ∞ のまわりで等角な同相写像であったことに矛盾する．

また，$Q = \Phi(P)$ が集積点 $q \in Q \subset \hat{\mathbb{B}}$ をもつならば，ある Q 内の無限点列 $q_n \to q$ が存在する．とくに，ある十分小さな q のまわりの閉円板 $X \subset \hat{\mathbb{B}}$ が存在して，すべて $q_n \in X$ としてよい．この円板はコンパクトであるから，逆写像 $X' = \Phi^{-1}(X)$ もコンパクトである．今，Q の定義より $\Phi(p_n) = q_n$ となる $p_n \in P$ が存在する．$P \subset X'$ であったから，p_n には $\hat{H}_\infty$ 内で収束する部分列が取れることになる．これは再び，一致の定理に矛盾する． ■（補題 3.24）

補題 3.25 写像 $\Phi : \hat{H}_\infty \to \hat{\mathbb{B}}$ は単射である．したがって，等角な同相写像である．

この部分の証明はすこし厄介で，分岐被覆面の手法が必要になる．雰囲気だけでも感じ取っていただきたい．

証明（補題 3.25）． $\tilde{P} := \Phi^{-1}(Q) \supset P$ とおき，写像 $\Phi|\ \hat{H}_\infty - \tilde{P} \to \hat{\mathbb{B}} - Q$ を考えよう．分岐点の集合をのぞいたことから，この写像は局所的に等角，したがって局所的に同相写像である．後は，単射となることをしめそう．すなわち，任意の $w \in \hat{\mathbb{B}} - Q$ にたいし，$\Phi(c) = w$ となるような $c \in \hat{H}_\infty$ はただ一つしか存在しないことをしめす．これより写像 $\Phi|\ \hat{H}_\infty - \tilde{P} \to \hat{\mathbb{B}} - Q$ は同相写像であることがわかり，補題 3.24 より，$\tilde{P}$ の各点に対応する「穴」をうめれば結局全体的に写像 Φ が単射となることが導かれる．[23]

まず，次のことをしめそう：

ある自然数 $d \geq 1$ が存在して，任意の $w \in \hat{\mathbb{B}} - Q$ について，有限集合 $\Phi^{-1}(\{w\})$ の個数は d である．

ここで $\Phi^{-1}(\{w\})$ が有限集合であることは，補題 3.23 からの帰結であった．その個数は $w \in \hat{\mathbb{B}} - Q$ によらず一定だ，と主張しているのである．これを証明するには，任意に異なる $w, w' \in \hat{\mathbb{B}} - Q$ を選んで，全単射 $\chi : \Phi^{-1}(\{w\}) \to \Phi^{-1}(\{w'\})$ を構成すればよい．

[23]細かいことをいえば，リーマンの除去可能特異点定理を用いている．

まず，$\hat{\mathbb{B}} - Q$ 内で w と w' を結ぶなめらかな曲線 γ を選ぼう．このような曲線がひとつ取れることは，Q が集積点を持たず，$\hat{\mathbb{B}} - Q$ が連結な開集合となることからわかる．とくに，自己交差（接触）しないようにしておこう．曲線でなくても，有限個の線分をつなげた「折れ線」でもかまわない．

さてこの曲線 γ 上に十分たくさんの，しかし有限個の点 $w_0 = w, w_1, \ldots, w_n = w'$ を打って，次のようにできる（図 3.11）[24]：

- 各 w_i のまわりには十分小さな円板 $B_i \subset \hat{\mathbb{B}} - Q$ があって，その逆像 $\Phi^{-1}(B_i)$ は有限集合 $\Phi^{-1}(\{w_i\})$ の各点をひとつずつ含む，互いに交わらない位相的円板（円板と同相な開集合）の和集合である．

- B_i の和集合 $\bigcup_{i=0}^{n} B_i$ は γ を含む．

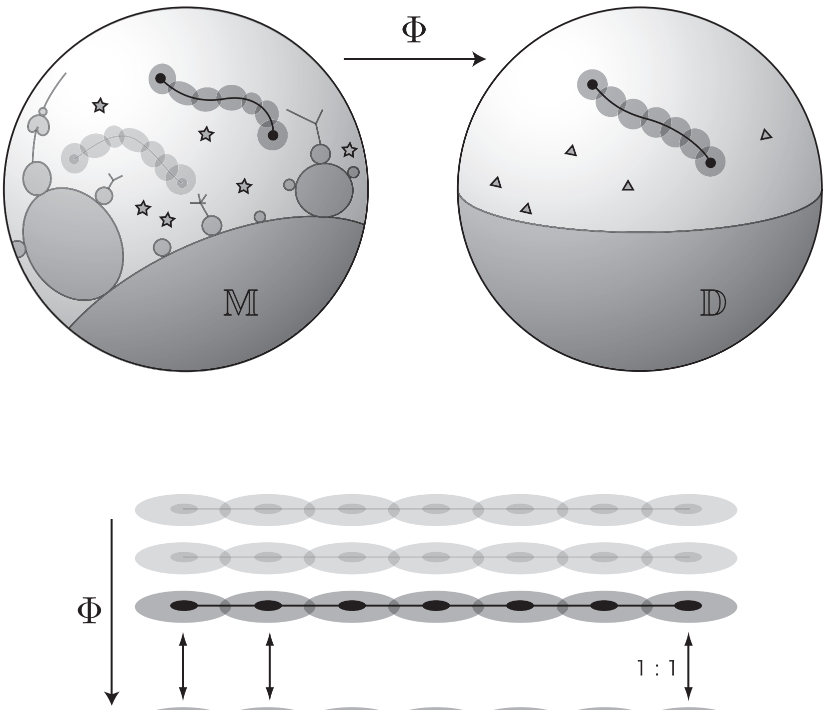


図 3.11: 曲線の「持ち上げ」．左上の小さな星は $\tilde{P}$ の点を表し，右上の小さな三角は Q の点を表す．

さて，$\Phi^{-1}(w)$ から一点 $c \in \hat{H}_\infty - \tilde{P}$ を選ぶ．Φ は局所的に同相なので，c の近傍に $\Phi^{-1}(B_0)$ の連結成分である位相的円板 V_0 がとれて，$\Phi : V_0 \to B_0$ が局所的に同相写像になっている．すなわち，曲線の一部 $\gamma \cap B_0$ をこの局所的な同相写像の逆写像によって V_0 上に持ち上げることができる．この操作は γ に沿って続けていくことができるから，c から始まる $\hat{H}_\infty - \tilde{P}$ 内の曲線 $\tilde{\gamma}$ で $\Phi : \tilde{\gamma} \to \gamma$ が近傍で同相写像となるものが

[24] じつは，それほど自明ではない．要参考文献．

存在する．[25]このとき，$\tilde{\gamma}$ の c でない方の端点は $\Phi^{-1}(\{w'\})$ の元であるから，これを $\chi(c) := c'$ とする．今，γ の w' の側からも同じ操作ができるから，$\chi^{-1}(c') = c$ も定まる．こうして定まった $\chi : \Phi^{-1}(\{w\}) \to \Phi^{-1}(\{w'\})$ は全単射であるから，$\Phi^{-1}(\{w'\})$ と $\Phi^{-1}(\{w'\})$ の元の個数は同じということである．いま $w,\ w'$ は任意であったから，主張のような自然数 d が定まるわけである．

ところで，$\Phi(c) = \infty$ となるような $c \in \hat{H}_\infty$ は $c = \infty$ しか存在しないのであった．$\infty \in \hat{H}_\infty - \tilde{P}$ より，これは $d = 1$ を意味する．したがって $\Phi : \hat{H}_\infty - \tilde{P} \to \hat{\mathbb{B}} - Q$ は単射，同相写像である．あとは $\Phi : \tilde{P} \to Q$ の部分を点で埋めたものがもとの $\Phi : \hat{H}_\infty \to \hat{\mathbb{B}}$ と考えられるが，$d = 1$ よりそもそも分岐点は存在せず，$Q = \emptyset$ だったのである． ■
（補題 3.25）

以上のようにして，定理 3.18 の証明は完結する． ■

[25] このような $\tilde{\gamma}$ を，c と端点とする γ の**持ち上げ** (lifting) とよぶ．

第4章　周期点と分岐点軌道の分類

最初にマンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ には（充填）ジュリア集合の「カタログ」としての役割がある，と謳った．今までのところ,「カタログ」が充填ジュリア集合の連結・不連結を区別していることは見てきたが，$\mathbb{M}$ にはそれ以上に豊富な情報が含まれているのである．そろそろ,「カタログ」に掲載された商品（アイテム）を詳しく説明するための言葉が必要かもしれない．

この章の主な目標は,「周期点」を分類することである．力学系が生成する軌道全体の中で周期点は少数派に属するのだが，中には力学系全体の性質を決定してしまうような重要な周期点が存在する．たとえば 2 次多項式において，無限遠点はたったひとつの固定点（周期 1 の周期点）でありながら，複素平面の大部分を引き寄せる「超吸引的」固定点であった．こうした特別な周期点の性質を丹念に調べることで，$\mathbb{M}$ の構造についてじつに多くのことがわかってしまう．

さらにもうひとつの目標は，周期点と「分岐点軌道」のかかわりについて考察することである．力学系のキーパーソンである分岐点が，周期点とどのように関わりあっているのか．これもまた，マンデルブロー集合という「カタログ」が表現するものなのだ．

4.1　周期点の分類

以下では $c \in \mathbb{C}$ を固定して，$f(z) = f_c(z) = z^2 + c$ の力学系について考える．

1 章では，$|z| > \max\{2, |c|\}$ ならば $z \notin K = K_c$ であることは証明した（命題 1.5）．では，$|z| \le \max\{2, |c|\}$ のとき，$z \in K$ であることはどのようにすればチェックできるのだろうか？

f の充填ジュリア集合 K の描画アルゴリズムを思い出してみよう．いま，$z \in \hat{\mathbb{C}}$ の**軌道** (orbit) と言ったら，集合

$$\mathcal{O}(z) \ := \ \left\{ f^n(z) \in \hat{\mathbb{C}} \,:\, n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

をさすことにする．[1]命題 1.5 より，$z \in K$ であることをしめすには

$$\mathcal{O}(z) \ \subset \ \{ w \in \mathbb{C} \,:\, |w| \le \max\{2, |c|\} \}$$

を確認すればよいが，z の軌道 $f^n(z)$ を無限に計算することは不可能である．そこで，十分大きな N をとり，$f^N(z)$ までがすべて絶対値 $\max\{2, |c|\}$ 以下であれば「$z \in K$

[1]**前方軌道** (forward orbit) とも言う．

と判定」した．しかし，$|f^{N+1}(z)| > \max\{2, |c|\}$ とならないとも限らないし，その意味でこの描画アルゴリズムには確実な限界がある．

一般に，あたえられた点 z が充填ジュリア集合 K に入っているかどうかを厳密に，理論的に判定することは難しい．しかし例外的に，**周期点**であれば，多くの場合判定可能なのである．

4.1.1 周期点と前周期点

力学系 $(f, \hat{\mathbb{C}})$ において，$z \in \hat{\mathbb{C}}$ が**周期的** (periodic) もしくは**周期点** (periodi point) であるとは，ある自然数 n が存在して

$$f^n(z) \ = \ z$$

となることをいう．また，このような n の最小値を z の**周期** (period) とよぶ．この場合，z を「n-周期点」とよぶのが便利である．また，1-周期点は普通**固定点**（もしくは不動点，fixed point）とよばれる．

z が n-周期点であるとき，集合

$$\mathcal{O}(z) \ = \ \big\{z,\ f(z),\ \ldots, f^{n-1}(z)\big\}$$

を z の**周期系** (cycle) とよぶ．たとえば $z = \infty$ は $f(\infty) = \infty$ を満たすので固定点である．一方 $z \in \mathbb{C}$ のとき，軌道

$$z \ \mapsto \ f(z) \ \mapsto \ \cdots \ \mapsto \ f^{n-1}(z) \ \mapsto \ z \ \mapsto \ \cdots$$

は絶対値が発散できないから，$\mathcal{O}(z) \subset K$ である．

また $w (\in \mathbb{C})$ が**前周期的** (preperiodic) であるとは，ある $m \geq 0$ が存在して $f^m(w) = z$ が周期的であるときをいう．したがって，周期点は前周期的でもある．$w \in \mathbb{C}$ のとき，その軌道は有限の時間で周期系に入り，そこから出ることはない．よって $w \in K$ をみたすわけである．

以上をまとめると，

> **命題 4.1** 2 次多項式 f にたいし，無限遠点でない前周期的な点はすべて充填ジュリア集合 K に属する．

無限遠点はやや特別なので，この章ではとくに断らない限り力学系を $(f, \mathbb{C})$ に制限して考え，**周期点と言った場合は無限遠点以外の，$\mathbb{C}$ 内の周期点を意味することにする**

練習問題． z の周期系に属する点はすべて n-周期点であることを納得せよ．また，z が前周期的であることは，前方軌道 $\mathcal{O}(z)$ が有限集合であることと同値である．これを納得せよ．

周期点の存在． 一般に，n 周期点 z がみたす方程式 $f^n(z) = z$ は複素係数 2^n 次方程式である．ガウスの「代数学の基本定理」によれば，この方程式にはかならず，重複

度込みで 2^n 個の複素数解が存在する．もちろん，これらの解には方程式 $f(z)=z$ の解なども含まれているから,「周期 n 以下の周期点が重複度込みで 2^n 個存在している」, と考えなくてはならない．このような重複を考え合わせても，次のことが証明できる：

命題 4.2 2 次多項式 $f=f_c$ にたいし，周期点は無限個存在する．したがって，充填ジュリア集合 $K=K_c$ は空ではなく，かつ有限集合でもない．

証明. [2]（もっと簡単な証明があるかもしれない．知っている方はぜひ教えてください.）周期点が有限個，たとえば N 個しか存在しないと仮定して矛盾を導こう．p を $N<p$ をみたす十分大きな素数とする．このとき，方程式 $f^p(z)=z$ は重複度込みで 2^p 個の解をもつが，これらの周期点としての周期は p の約数，すなわち 1 または p しかありえない．もし p 周期点が存在すれば，その軌道上に異なる点が p 個存在してしまうことになり，仮定に反する．よってこの方程式の解はすべて固定点ということになる．

いま，f の固定点（重複の可能性も込みで）を $\alpha,\ \beta$ としよう．いま，ある $p_1+p_2=2^p$ をみたす負でない整数 $p_1,\ p_2$ が存在して，

$$f^p(z)-z \;=\; (z-\alpha)^{p_1}(z-\beta)^{p_2}$$

とかける．いま素数 p は 2 以上なので，$p_1>1$ と仮定してよい．このとき

$$f^p(z)-\alpha \;=\; z-\alpha+(z-\alpha)^{p_1}(z-\beta)^{p_2}$$

と変形できるから，$z-\alpha$ で両辺を割り $z\to\alpha$ の極限を取ることで $(f^p)'(\alpha)=1$ をえる．連鎖律より $(f^p)'(\alpha)=\{f'(\alpha)\}^p$ であるから（下の「固有値」の項を参照），$f'(\alpha)$ は 1 の p 乗根である．さて，$q>p$ となる別の素数 q についても，同様の議論により $f'(\alpha)$ は 1 の q 乗根となることがわかる．[3] よって $f'(\alpha)=1$ しかありえない．

一方，具体的に α をもとめてみると，$\alpha=(1\pm\sqrt{1-4c})/2$ となることがわかる．$f'(\alpha)=2\alpha=1\pm\sqrt{1-4c}$ より，$c=1/4$ でなくてはならない．とくに，$\alpha=\beta=1/2$ をみたすから，

$$f^p(z)-1/2 \;=\; (z-1/2)+(z-1/2)^{2^p}$$

と書ける．しかし，$f(z)-1/2=z-1/2+(z-1/2)^2$ の関係式だけから，数学的帰納法により

$$f^m(z)-1/2 \;=\; (z-1/2)+m(z-1/2)^2+\cdots+(z-1/2)^{2^m}$$

と書けることも簡単にチェックできる．これは矛盾である． ■

[2] あとでジュリア集合内に反発周期点が無限個存在することをしめす．

[3] $f^q(z)-z \;=\; (z-\alpha)^{q_1}(z-\beta)^{q_2}$ と書けるが，もしかしたら $q_1\le 1$ かもしれない．しかしこのような q は無限にあるので，上手に p と q および α を選べば $p_1,q_1\ge 2$ とできる．

4.1.2 乗数による周期点の分類

乗数． α を n-周期点とする．このとき，$f^n : z \mapsto f^n(z)$ を α のまわりで展開すると，

$$f^n(z) \;=\; \alpha + (f^n)'(\alpha)(z-\alpha) + o(|z-\alpha|)$$

の形となる.（多項式 $f^n(z)$ の正則性/解析性を用いた.）すなわち，$\lambda = \lambda_\alpha := (f^n)'(\alpha) \in \mathbb{C}$ とすれば，1 次式部分は $z \approx \alpha$ のとき

$$f^n(z) - \alpha \;\approx\; \lambda(z-\alpha)$$

である．これは，α を中心にみると，f^n の作用があたかも λ 倍にみえるということを意味している.（もちろん，$\lambda = 0$ のときは注意が必要だが.）そこで，この $\lambda = (f^n)'(\alpha)$ を周期点 α の**乗数**（もしくは**乗法因子**，**固有値**，英語では multiplier）とよぶ.

乗数は周期点 α に依存する数のように見えるが，実際には周期系 $\mathcal{O}(\alpha)$ に依存する，周期系の性質をあらわす数である．この事実は次のようにして確認できる：いま，$\alpha_n := f^n(\alpha)$ $(n \geq 0)$ とおく．微分係数の性質 $\{f(f^{n-1}(z))\}' = f'(f^{n-1}(z)) \cdot (f^{n-1})'(z)$（連鎖律）に注意すれば，関係式

$$\begin{aligned} \lambda \;=\; (f^n)'(\alpha) \;&=\; f'(\alpha) \cdot f'(f(\alpha)) \cdots f'(f^{n-1}(\alpha)) \\ &=\; f'(\alpha_0) \cdot f'(\alpha_1) \cdots f'(\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

が得られる．この式から，周期系

$$\mathcal{O}(\alpha) \;=\; \{\alpha = \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ \ldots, \alpha_{n-1}\}$$

の各点で，同じ乗数はすべておなじ λ となることがわかる．この意味で，乗数は「周期系の」特徴を現す量なのである．

乗数による周期点の分類． 乗数は周期点のまわりの力学系を 1 次式で近似したときの回転・拡大率を表している．したがって，局所的な力学系（点の動き）を決定する大事な要素である．複素力学系理論では，乗数の絶対値および偏角に応じて，周期点（周期系）を次のように形容する：

- $0 \leq |\lambda| < 1$: **吸引的** (attracting) [4]
- $|\lambda| > 1$: **反発的** (repelling)
- $|\lambda| = 1 \iff \lambda = e^{2\pi i\theta}\ \ (\theta \in \mathbb{R})$: **中立的** (indifferent):
  - $\theta \in \mathbb{Q}$: **放物的** (parabolic)
  - $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: **無理的中立** (irrationally indifferent)

[4] 吸引的周期点にあとで述べる超吸引的周期点を入れないこともあるが，ここではまとめて吸引的としておく.

実際に，これらの乗数をもつ任意の周期の周期点が 2 次多項式として実現できることが知られている．たとえば，固定点であれば $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ を考えればよい．

以下では，乗数が周期点まわりの力学系をどのように支配するのか見ておこう．

吸引的周期点． α を吸引的 n-周期点とする．λ をその乗数とする．展開式

$$f^n(z) \ = \ \alpha + \lambda(z - \alpha) + o(|z - \alpha|)$$

より，近似式

$$|f^n(z) - \alpha| \ \approx \ |\lambda||z - \alpha| < |z - \alpha|$$

を考えれば，直感的に「α が自分の近くの点を（周期 n で）吸引する」 様子が納得されるだろう．厳密には，次のように証明できる：まず，上の展開式より

$$|f^n(z) - \alpha| = |\lambda + o(1)| \cdot |z - \alpha|$$

である．$|\lambda + o(1)|$ の部分は α の十分近くであればいくらでも $|\lambda|$ に近くなることに注意しよう．いま，$|\lambda| < 1$ より，ある $|\lambda| < \Lambda < 1$ を満たす正の数 Λ を固定すれば，ある α 中心の十分ちいさな半径 r の円板 $\Delta = \mathbb{D}(\alpha, r)$ が存在して，$z \in \Delta$ のとき一様に $|\lambda + o(1)| \le \Lambda < 1$ とできる．すなわち

$$|f^n(z) - \alpha| \ \le \ \Lambda|z - \alpha| \ < \ |z - \alpha|$$

が成り立つ．したがって，$f^n(z) \in \Delta$ であり，これを繰り返せば

$$|f^{nk} - \alpha| \ \le \ \Lambda^k|z - \alpha| \ \le \ \Lambda^k r \ \to \ 0 \quad (k \to \infty)$$

を得る．すなわち，Δ 上の点はすべて α に（周期 n で）吸引されていく．

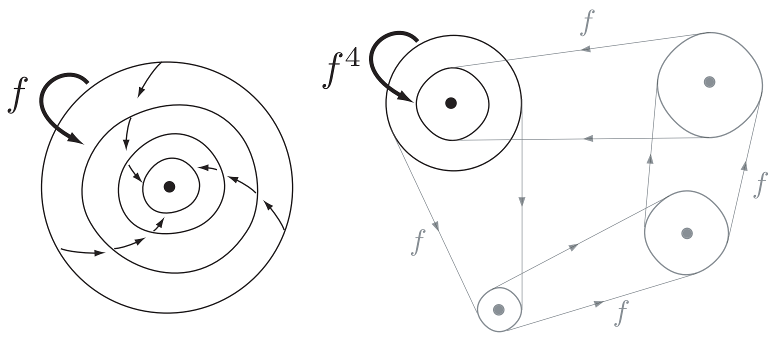


図 4.1: 吸引的固定点および 4-周期点の例．

具体例としては，$f_0(z) = z^2$ の $\alpha = 0$ は乗数 $\lambda = 0$ の吸引的固定点である．無限遠点も乗数 0 の固定点と考えれられる．($w = 1/z$ で共役をとって考えればよい．) もう少し一般に，$-3/4 < c < 1/4$ のとき，$f(z) = z^2 + c$ は吸引的固定点をもつ．実際，方程式 $f(z) = z$ を解きそこでの微分を計算すると，ふたつの解のうちひとつは乗数の絶対値が 1 より小さいことが証明される．

固定点でない吸引的周期点の例は，あとでたくさん取り上げる．

反発的周期点． 乗数 λ が $|\lambda|$ を満たすときは，上と同様の議論により，α のまわりの十分小さな円板上で

$$|f^n(z)-\alpha| \ \geq \ \Lambda|z-\alpha| \ > \ |z-\alpha|$$

を満たす $\Lambda > 1$ が存在する．したがって，吸引的周期点の反対で，α は周期 n で周りの点を引き離す（反発する）．

具体例:ウサギ周期点のなかで最も「一般的」なのが反発的周期点である．どういう意味で一般的かというと，反発的周期点は無限に存在するが，それ以外のタイプの周期点は高々有限個しか存在できない．この事実も，あとで取り上げる．

中立的な場合１：放物的周期点． いま，$(f^n)'(\alpha) = \lambda = e^{2\pi ip/q}$（ただし p, q は互いに素な自然数）の形をしているので，$\lambda^q = 1$ より

$$f^{nq}(z) - \alpha \ = \ z - \alpha + O((z-\alpha)^2)$$

と仮定してよい．すなわち，周期 nq かつ乗数 1 の周期点と解釈して，その挙動をみてみよう．この式は１次近似と見た場合 $f^{nq}(z) - \alpha \approx z - \alpha$ となってしまい，あたかもすべての点が固定されてるかのように見えてしまうが，実際には誤差項 $O((z-\alpha)^2)$ の影響で予想外に複雑な挙動を示す.

まず必要なら平行移動 $z \mapsto z - \alpha = Z$ により共役をとり，$\alpha = 0$ とみなすことができる．具体的には，関数 $F(Z) = f^{nq}(Z+\alpha) - \alpha$ を原点 $Z = 0$ のまわりで展開して，

$$F(Z) \ = \ Z + AZ^{m+1} + O(Z^{m+2})$$

（ただし $A \neq 0,\ m \in \mathbb{N}$） の形だとみなしてよい．さらに，$a^m = A$ を満たす $a \neq 0$（すなわち A の (m) 乗根のひとつ ）を固定し，変数変換 $Z \mapsto aZ = w$ により共役をとる．すなわち，関数 $g(w) = aF(w/a) - \alpha$ を原点 $w = 0$ のまわりで展開して，

$$g(w) \ = \ w + w^{m+1} + O(w^{m+2})$$

の形だとみなしてよい．まとめると，最初の z 座標による f^{np} の作用は，$z \mapsto z+\alpha \mapsto a(z+\alpha) = w$ というアファイン変換を通して観測すると上の g の作用のように見える，ということである．これらは本質的に同じものであるが，座標のとり方を変えたため異なる表現になっている.

さて g の固定点周辺での作用は以下のようになっている：

$$g(w) \ \approx \ w(1+w^m)$$

であることに注意すると，w^m がちょうど正の数のとき,（すなわち w の偏角が $2k\pi/m$ $(k = 0, 1, \ldots, k-1)$ のとき），$g(w)$ は w に $1 + |w|^m > 1$ を掛けたもので近似される．すなわち，$w^m > 0$ となるような w の方向では，g の作用は反発的である.

一方，w^m がちょうど負の数のとき,（すなわち w の偏角が $(2k+1)\pi/2m$ $(k = 0, 1, \ldots, k-1)$ のとき），$g(w)$ は w に $1 - |w|^m < 1$ を掛けたもので近似されるので，このような w の方向では g の作用は吸引的である.

一般に，$g(w)$ の作用は図 4.2 のように，m の値に応じて「花びら」のような軌道を形作る．

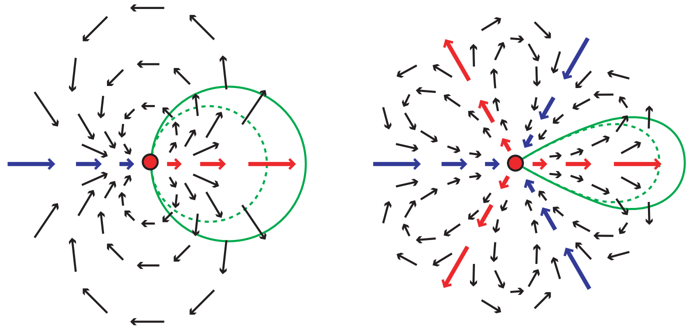


図 4.2: 放物的周期点まわりの挙動．矢印は g の作用に対応する．左が $m=1$ の場合，右が $m=3$ の場合．赤は反発方向を表し，青は吸引方向を表す．

最後に，重要な事実を述べておく：

命題 4.3 放物的周期点の集合は，方程式族 $\{f^n(z)=z\}_{n\in\mathbb{N}}$ の重解の集合と一致する．

証明． α を方程式 $f^n(z)=z$ の重解だとする．関数 $w=f^n(z)-z$ の「グラフ」は $z=\alpha$ において「z 軸」$w=0$ と 2 次以上の接触をするので，局所的に

$$f^n(z)-z \;=\; \alpha+A(z-\alpha)^{m+1}+O((z-\alpha)^{m+2})$$

（ただし $A\neq 0$, $m\in\mathbb{N}$） のような展開をもつ．これは明らかに， α が放物的周期点であることと同値である． ■

中立的な場合 2：無理的中立周期点． いま，$(f^n)'(\alpha)=\lambda=e^{2\pi i\theta}$（ただし θ は無理数）の形をしている．したがって

$$f^n(z)-\alpha\approx\lambda(z-\alpha)$$

とみれば，α 周辺での f^n 作用は角度 θ 回転によって近似されるはずである．しかし状況は，それほど単純ではない．

数列 $\{n\theta\}_{n\geq 1}$ は決して整数にはならないが，いくらでも整数に近づくことができる．したがって，数列 $\{\lambda^n\}_{n\geq 1}$ の中にはいくらでも 1 に近いものが存在する．この場合，状況としては放物的周期点に近いかもしれない．すなわち，α 周辺の力学系は,「吸引」「反発」「回転」といった単純な言葉では表現できるようなものではないかもしれない．

実際，この種の周期点にはいまだに謎が多い．無理的中立固定点を持つ力学系は本質的に無理数を扱うので，コンピューター（実質的に有限個の有理数しか扱えない！）では力学系のシミュレーションすらままなず，信頼おける実験結果が十分に揃わないのである．

ただ研究者の間では，2 種類で分類するのが一般的である：まず，α 周辺での f^n 作用が，実際に角度 $2\pi\theta$ ラジアンの回転だと思えるケース．具体的には，α を含む開集合 U で定義された等角同相写像 $\phi : U \to \mathbb{C}$ で $\phi(\alpha) = 0$ となるものが存在して，

$$\phi \circ f^n \circ \phi^{-1}(w) \ = \ e^{2\pi i\theta} w$$

が（左辺の写像が定義できている限り）成立する場合．このとき，$\phi(U)$ に含まれる $w = 0$ 中心の十分小さな円板上では，f^n の作用がまさに回転として表現されるわけである（図 4.3）．このとき，α 周辺の点の軌道は α のまわりをひたすら「回転」しつづける．もちろん，オリジナルの写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は 2 次多項式であったから，この ϕ が定義できる U の大きさは限定的である．

もうひとつのケースは，単純に，上のような ϕ（と U）が存在しない場合である．これら両方のケースが起き得ることが知られており，2 次多項式の場合に限っていえば，これらのケースが θ の値だけで決まってしまうことが知られている.（後述の Bruno-Yoccoz の定理を参照.）

前者のような中立的周期点は**線形化可能** (linearlizable) とよばれる．また，この場合について先駆的な研究を行ったジーゲルの名を冠して，**ジーゲル点** (Siegel point) とも呼ばれる．一方後者に関しては，単に線形化可能でない，もしくはその存在を初めて示したクレーマーの名を冠して，**クレーマー点** (Cemer point) と呼ばれている．

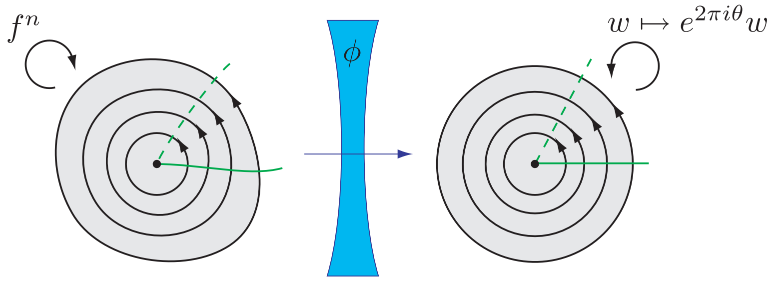


図 4.3: 線形化可能な中立的周期点（ジーゲル点）まわりの挙動．ϕ というレンズを通して f^n の作用を局所的に眺めると，ちょうど回転しているように見える．

乗数の等角的共役による不変性． 周期点の乗数は,「等角な同相写像で共役をとっても不変」という重要な性質をもっている．いま，α を f の n-周期点とする．また，U を α を含む開集合とし，$\psi : U \to \psi(U) \subset \hat{\mathbb{C}}$ は等角な同相写像であるとする．このとき，写像 $G := \psi \circ f^n \circ \psi^{-1}$ は $\psi(\alpha)$ を含む十分小さな開円板上であれば定義できる．とくに，$\psi(\alpha)$ は G の固定点であるり，したがって乗数 $G'(\psi(\alpha))$ が定義できる．このとき，次が成り立つ：

命題 4.4 G の固定点 $\psi(\alpha)$ の乗数は，f^n の周期点 α の乗数と一致する．
とくに，$U = \mathbb{C}$ で ψ がアファイン写像であるとき，$\psi(\alpha)$ は $g = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$ の n-周期点であり，$\psi(\alpha)$ の乗数は α の乗数と一致する．

われわれは 2 次多項式として $f(z) = z^2 + c$ という形だけを考えているが，これとアファイン共役な 2 次多項式であれば，周期点の乗数に由来する性質はすべて保たれているわけである．

証明． $\beta = \psi(\alpha)$ とおく．ψ の等角性より $\psi'(\alpha) \neq 0$ であることに注意しよう．β を含む十分小さな近傍では $\psi^{-1}(\psi(z)) = z$ がなりたつから，合成関数の微分公式よりさて $(\psi^{-1})'(\beta) \cdot \psi'(\alpha) = 1$. すなわち $(\psi^{-1})'(\beta) = \psi'(\alpha)^{-1}$ を得る．
ふたたび合成関数の微分公式より，$G'(\beta) = (\psi \circ f^n \circ \psi^{-1})'(\beta) = \psi'(f^n \circ \psi^{-1}(\beta)) \cdot (f^n)'(\psi^{-1}(\beta)) \cdot (\psi^{-1})'(\psi^{-1}(\beta)) = \psi'(\alpha) \cdot (f^n)'(\alpha) \cdot \psi'(\alpha)^{-1} = (f^n)'(\alpha)$.
$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ がアファイン写像であるとき，$g = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$ は f を同相写像 ψ を通して眺めただけであるから，n-周期点の像はやはり n-周期点である．乗数が変化しないことを確かめるには，上と同様の計算をすればよい． ■

4.2 固定点・周期点の線形化定理

中立的周期点のジーゲル点のように，適当な等角写像を通して乗数 λ 周期点のまわり力学系を観測すると，ちょうど $w \mapsto \lambda w$ と見えるかもしれない．この作用は線形写像なので，そのような等角写像を見つけて共役をとる作業を周期点の**線形化** (linearization) と呼ぶ．力学系の作用を共役を通して単純化してから観測すれば，力学系をよりよく理解であろう，というわけである．
以下では 2 次多項式から若干一般化して，

$$g(z) = \lambda z + O(z^2)$$

の形の，原点の周りで定義された正則写像の線形化を考える．一般の多項式 f の n-周期点 α の場合であれば，f^n の作用を平行移動 $z \mapsto z - \alpha$ により共役をとって表現すれば，g のような形になる．(命題 4.4 の特別な場合.) 目標は，さらに適当な等角写像 $\phi : U \to \mathbb{C}, \phi(z) = w$ （ただし U は原点の近傍）を見つけて，共役 $\phi \circ g \circ \phi^{-1}(w)$ が λw か，もしくは出来るだけ簡単な形にすることである．

4.2.1 吸引的固定点の線形化

まずは原点の近傍 U で定義された正則関数 $g(z) = \lambda z + O(z^2)$ が $0 < |\lambda| < 1$ を満たす場合を考えよう．($\lambda = 0$ の場合も吸引的と呼ぶのであったが，この場合線形化した右辺がゼロになってしまい，事情が異なる．これについては次節で考える.) このときは，ズバリ，線形化可能である：

定理 4.5 (吸引的固定点の線形化) ある原点中心の円板 D で定義された等角な同相写像 $\phi : D \to \phi(D) \subset \mathbb{C}$ で，$\phi(0) = 0$ かつ

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(w) \ = \ \lambda w,$$

をみたすものが存在する．とくに，そのような ϕ は定数倍を除いて一意的に定まる．

「定数倍を除いて一意的に定まる」というのは，もし別の等角な同相写像 $\psi : D \to \phi(D)$ が上の ϕ とまったく同じ性質をみたすならば，ある定数 $a \neq 0$ が存在して D 上 $\psi(w) = a\phi(w)$ をみたす，という意味である．この性質から，たとえば $\phi'(0) = 1$ となるもの（すなわち $\phi(z) = z + O(z^2)$ と展開できるもの．原点の周りでは恒等写像に近い）は本当に一意的に決まることになる．

古典的には関数方程式 $\phi \circ g(w) = \lambda\phi(w)$ の解として ϕ の存在が研究され，ケーニヒスがはじめてその解を構成した．その名を冠して，ϕ は**ケーニヒス座標** (Königs coordinate) ともよばれる．

証明. まず，$\Lambda^2 < |\lambda| < \Lambda$ をみたすような $0 < \Lambda < 1$ をひとつ固定する．[5] このとき，原点中心の十分小さな円板 $D = \mathbb{D}_r$ 上で，上述の吸引的周期点に関する議論と同様にして，$|g(z)| \leq \Lambda|z|$ が成り立つとしてよい．とくに，$g^n(D) \subset D$ である．さらに $g(z) = \lambda z + O(z^2)$ より D 上では

$$|g(z) - \lambda z| \leq C|z|^2$$

をみたす定数 $C > 0$ が存在するとしてよい．

さて $n \in \mathbb{N}$ にたいし，$\phi_n : D \mapsto \mathbb{C}$ を $\phi_n(z) := g^n(z)/\lambda^n$ で定義しよう．このとき，

$$|\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)| \ = \ \left|\frac{g(g^n(z)) - \lambda g^n(z)}{\lambda^{n+1}}\right| \ \leq \ \frac{C|g^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \ \leq \ \frac{C\Lambda^{2n}|z|^2}{|\lambda|^{n+1}} \ \leq \ Cr^2\left(\frac{\Lambda^2}{|\lambda|}\right)^n.$$

右端の項は等比数列であるから，関数列 ϕ_n は D 上で一様に収束する．ϕ_n は定義より正則であるから，その極限 $\phi : D \to \mathbb{C}$ も正則である．また，$\phi_n'(0) = 1$ より，$\phi'(0) = 1$ をみたす．すなわち，原点の近傍では等角な同相写像である．必要なら $D = \mathbb{D}_r$ をより小さく取り直すことで，逆写像 ϕ^{-1} が $\phi(D)$ 上存在するとしてよい．また，$\phi_n(g(z)) = \lambda\phi_{n+1}(z)$ より，$\phi(g(z)) = \lambda\phi(z)$ もわかる．以上より，定理の ϕ が存在することが示された．

一意性は次のようにして示す：もし別の ψ が ϕ と同様の性質を満たすならば，$\Phi(w) := \psi^{-1} \circ \phi(w)$ は関係式 $\Phi(\lambda w) = \lambda\Phi(w)$ をみたし，かつ正則である．ここで $\Phi(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots$ と展開して，関係式に代入すれば，$0 < |\lambda| < 1$ より a_1 以外は 0 となることがわかる．すなわち，$\Phi(w) = a_1 w$ である． ■

[5] $y = x$ と $y = x^2$ のグラフを比べれば，そのような Λ が存在することが目で見えるだろう．

4.2.2 反発的固定点の線形化

つぎに g が $|\lambda| > 1$ を満たす場合を考えよう．この場合，原点の十分近くでは g は等角な同相写像であるから，その逆写像 $h = g^{-1}$ が定義される．このとき，$h \circ g(z) = z$ であるから，合成関数の公式より $h'(0) = 1/\lambda$ でなくてはならない．すなわち，

$$h(Z) \ = \ \frac{1}{\lambda}Z + O(Z^2)$$

の形をしている．これは吸引的な場合に帰着されるから，定理 4.5 のような $\phi : Z \mapsto W$ が存在して，原点のまわりで $\phi \circ h \circ \phi^{-1}(W) = W/\lambda$ をみたす．$\phi^{-1} = \psi$ とすれば，

$$W \ = \ \psi \circ g \circ \psi^{-1}(W/\lambda),$$

すなわち $w = W/\lambda$ と置けば，同じ ψ について

$$\psi \circ g \circ \psi^{-1}(w) = \lambda w$$

が成立することになる．[6]

まとめると，乗数 λ の反発的周期点まわりの力学系は，回転・拡大を意味するアファイン写像 $w \mapsto \lambda w$ を ψ という等角同相写像のレンズを通して観測したものだ，ということになる．

4.2.3 超吸引的固定点の標準化

ここで一旦，g の乗数 λ が 0 の場合を考えよう．カテゴリーとしては吸引的固定点に含めてあるが，この場合は上の意味での線形化が意味をなさないので，特別扱いする必要がある．

いま適当な $d \geq 0$ と $C \neq 0$ が存在して，g は

$$g(z) \ = \ Cz^d + O(z^{d+1})$$

の形をしている．じつはこの C は次のようにして「忘れる」ことができる．なんでも良いので $B^{d-1} = C$ となる B（すなわち C の $d-1$ 乗根）を固定する．さらに，座標変換 $T : z \mapsto Z = Bz$ によって（アファイン）共役をとると，

$$T \circ g \circ T^{-1}(Z) \ = \ BC\left(\frac{Z}{B}\right)^d + O(Z^{d+1}) \ = \ Z^d + O(Z^{d+1})$$

となる．すなわち座標系を定数倍するだけで，最初から

$$g(z) \ = \ z^d + O(z^{d+1}) \ = \ z^d(1 + O(z))$$

[6]ただし，h や ϕ, ψ の定義域は適宜「原点まわりの十分ちいさな円板」をとったことにしておく．そうしないと，定義域をそのつど指定せねばならず，余計に煩雑になる．

だと考えてよい．[7]

よって局所的には $g(z) \approx z^d$ とみてよいわけだから，たしかに力学系としては原点が周辺の点を急速にひきつけている様子が想像される．ここではさらに，つぎのような「標準化」が線形化と同じアイディアでできることをみておこう：

定理 4.6 (ベトヒャー座標・一般の場合) ある原点中心の円板 D で定義された等角な同相写像 $\phi : D \to \phi(D) \subset \mathbb{C}$ で，$\phi(0) = 0$ かつ

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(w) \ = \ w^d,$$

をみたすものが存在する．とくに，そのような ϕ は 1 の $d-1$ 乗根倍を除いて一意的に定まる．

先にマンデルブロー集合の連結性を示すときにもちいたベトヒャー座標（定理 3.3）は，これの特別な場合（$d = 2$ かつ固定点が原点でなく無限遠点）となっている．証明はほとんど同じなので，見比べならが読み進めるとよい．

証明. $g(z) = z^d(1 + G(z))$ とおくと，$G(z) = O(z)$ より，適当な半径 r を固定することで，$\mathbb{D}_r$ 上 $|G(z)| \le 1/2$ としてよい．また $d \ge 2$ より $2r^d \le r$ も仮定してよいから，$|g(z)| \le |z|^d(1+1) \le 2r^d \le r$．とくに任意の $k \in \mathbb{N}$ について，$|g^k(z)| \le r$ かつ $|G(g^k(z))| \le 1/2$ がなりたつことに注意しておこう．

つぎに $\phi_n(z) = \{g^n(z)\}^{1/d^n}$ と定めたいのだが，このべき根の部分の解釈が明解でないので，一度形式的に

$$\phi_{n+1}(z) = \left\{g^n(z)^d(1 + G(g^n(z)))\right\}^{1/d^{n+1}} = \phi_n(z)\{1 + G(g^n(z))\}^{1/d^{n+1}}$$

と変形したうえで，$\phi_0(z) = z$ かつ

$$\phi_n(z) \ := \ z\{1 + G(z)\}^{1/d}\{1 + G(g(z))\}^{1/d^2} \cdots \left\{1 + G(g^{n-1}(z))\right\}^{1/d^n}$$

と定義する．ただし，$\left(1 + G(g^k(z))\right)^{1/d^{k+1}}$ の解釈は，無限の鉢のベトヒャー写像の場合と同様である．いま $e^{b_k(z)} = \left(1 + G(g^k(z))\right)^{1/d^{k+1}}$ となる $b_k(z)$ をとることができて，$|b_k(z)| \le (\log 2 + \pi/6)/d^{k+1}$ を満たし，関数の無限和 $b_1(z) + b_2(z) + \cdots + b_{n-1}(z) + \cdots$ は収束．よって $\phi_n(z) = ze^{b_1(z)+b_2(z)+\cdots+b_{n-1}(z)}$ もある写像 $\phi(z)$ に収束する．このとき，$\phi \circ g(z) = \{\phi(w)\}^d$ であることは ϕ_{n+1} と ϕ_n の関係より簡単に示される．

また明らかに $\phi_n'(0) = 1$ であるから，その極限においても $\phi'(0) = 1$ が成立する．すなわち，$\phi(z)$ が原点の十分小さな近傍で等角同相である．

一意性の証明は吸引的な場合に似ている：もし別の ψ が ϕ と同様の性質を満たすならば，$\Phi(w) := \psi^{-1} \circ \phi(w)$ は関係式 $\Phi(w^d) = (\Phi(w))^d$ をみたし，かつ正則である．

[7]座標系を定数倍するというのは，日常生活でいえば単位系をインチから cm に替える程度の差である．

$\Phi(0)=0$ より $\Phi(w)=a_1w+a_kw^k+\cdots\ (a_1\neq 0,\ k\geq 2)$ と展開して上の関係式に代入すると，[8]

$$a_1w^d+a_kw^{kd}+\cdots \ = \ a_1^dw^d+a_1^{d-1}a_kdw^{k+d-1}+\cdots$$

をえる．w^d の係数を比較して $a_1=a_1^d \iff a_1^{d-1}=1$（1 の $d-1$ 乗根倍）．次に次数の高い項を比較すると，いま $kd>k+d-1$ であるから $a_k=0$．k は任意なので，$\Phi(w)=a_1w$ が示された．■

4.2.4 放物的固定点の線形化

g の乗数 λ が 1 の原始 q 乗根の場合は，いったん g を g^q で置き換えて，

$$g(z) \ = \ z+Az^{m+1}+O(z^{m+2})$$

（ただし $A\neq 0$）を考えるのがよい．ここで前節と同様の議論により，$A=1$ と仮定してよい．また，このとき原点を**花弁数** m（もしくは**重複度** $m+1$）の放物的固定点と呼ぶ．

たとえば g が 2 次多項式の場合，花弁数は $m=q$ とできることがわかる.（これは練習問題としよう.）

このとき，次の定理が知られている：

> **定理 4.7 (カマチョの標準化)** 原点の近傍 U 上で定義された（等角とは限らない）同相写像 $\phi : U\to\phi(U)\subset\mathbb{C}$ で，$\phi(0)=0$ となるものが存在し，
>
> $$\phi\circ g\circ\phi^{-1}(w) \ = \ w(1+w^m)$$
>
> をみたす．ただし，左辺が定義可能な $w\in\phi(U)$ に限る．

証明は簡単ではないのでここでは扱うことはできない．とりあえず力学系としての近似

$$g(z)\approx w(1+w^m)$$

は ϕ という同相写像をとおして眺めることで正当化されるわけである．ただし，一般には ϕ として等角写像を選ぶことはできない．等角写像を通して力学系を簡略化するためには，もうちょっと工夫が必要となる．

ロー・ファトウの花弁定理 まず，$g(z)=z(1+z^m+O(z^{m+1}))$ の形の放物的固定点について考えよう．図 4.2 にあるように，この固定点まわりの力学系は原点中心の $1/m$ 回転に対して対称であるように見える．実際，カマチョの標準形である $G(z)=z(1+z^m)$ は，写像 $\delta : z\mapsto e^{2\pi i/m}z$ で共役をとっても $G=\delta\circ G\circ\delta^{-1}$ となっており，本当に回転に対して対象なのである．したがって，力学系を原点を中心に m 個の扇型で等分して，その様子を調べるのは悪くないアイディアであろう．

[8] $(1+w)^d=1+dw+O(w^2)\ (w\to 0)$ を用いる．

ここでは m 等分の代わりに，次のような座標変換を考える：写像 $Z = P(z) := z^m$ は原点を中心に，複素平面をぐるり m 重に巻きつける写像である．このとき，偏角が 0 以上 $2\pi/m$ 未満の部分はひとつの吸引方向を含む扇型（これを Π_0 と表す ）であり，この領域内の z と $Z \in \mathbb{C}$ は P により一対一に対応する．すなわち P をその扇形 Π_0 に制限すれば，$z = P^{-1}(Z)$ が意味をもつ．z は Z の m 乗根のひとつだから，便宜的にこれを $z = P^{-1}(Z) = Z^{1/m}$ と表現しておく．

さて g の作用を Z の座標のほうで表現することを考えよう．すなわち，$P \circ g \circ P^{-1}$ を考えるのである：

$$\begin{aligned} G(z) \;:=\; P \circ g \circ P^{-1}(Z) \;&=\; \left(Z^{1/m}(1 + Z + O(Z^{(m+1)/m}))\right)^m \\ &=\; Z(1 + mZ + O(Z^{1+1/m})) \\ &=\; Z + mZ^2 + O(Z^{2+1/m}). \end{aligned}$$

これは重複度 2 の放物的固定点の作用になっている．ただし，左辺はこれが定義できるような Z に限らなくてはならない．実際，扇形 Π_0 の境界にあたる Z 平面の正の実軸付近では，$g \circ P^{-1}(Z)$ が Π_0 からはみ出してしまうことがありえるので，ある程度は除外して考えなくてはならない．このあたりを精密に議論するために，さらなる座標変換を行う．

原点を無限遠点にうつす $Q : Z \mapsto w = -1/mZ$ という写像を用いると，$G : Z \mapsto Z + mZ^2 + O(Z^{2+1/m})$ は

$$\begin{aligned} F(w) \;&:=\; Q \circ G \circ Q^{-1}(w) \\ &=\; -\frac{1}{m}\left(\frac{-1}{mw} + m \cdot \left(\frac{-1}{mw}\right)^2 + O\left(\left(\frac{-1}{mw}\right)^{2+1/m}\right)\right)^{-1} \\ &=\; w + 1 + O(w^{-1/m}) \end{aligned}$$

の形となる．w における無限遠点の近くでは $1/w$ はものすごく小さな数であり，

$$F(w) = w(1 + 1/w + O(1/w^{(m+1)/m}))$$

（恒等写像× $(1 + \text{誤差})$ の形）となることから，実質的には G の式とあまり変わっていない．また，$w^{1/m}$ は Z と z の対応により，値が厳格に定まっていることにも注意しよう．あくまで，g の作用を Π_0 に限って，w という座標で表現したものであることは忘れてはならない．

さて，もうすこし誤差を小さく考えて，$F(w) = w + 1 + O(w^{-1/m}) \approx w + 1$ と考えると状況はかなり変化する．じつは，次が成立するからである：

命題 4.8 ある $R > 0$ が存在し，半平面 $\Pi(R) := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > R\}$ 上では次が成立する：

$$\operatorname{Re} F(w) \geq \operatorname{Re} w + \frac{1}{2}.$$

とくに，任意の $w \in \Pi(R)$ および $n \in \mathbb{N}$ について $F^n(w)$ は定義され，$F^n(w) \to \infty\ (n \to \infty)$．

証明. F にたいしある $M>0$ が存在して，$|F(w)-(w+1)| \le M/|w|^{1/m}$ が成り立つとしてよい．いま十分おおきな $R>0$ を $M/R^{1/m} \le 1/2$ となるようにとれば，$|z|>R$ のとき $|F(w)-(w+1)| \le 1/2$ が一様に成り立つ．すなわち，$F(w)$ は $w+1$ 中心半径 $1/2$ の円板内にある．実部に着目すれば，

$$\mathrm{Re}\, F(w) \ \ge \ \mathrm{Re}\,(w+1) - \frac{1}{2} \ = \ \mathrm{Re}\, w + \frac{1}{2}.$$

とくに，$F(w) \in \Pi(R+1/2) \subset \Pi(R)$ である．したがって $w \in \Pi(R)$ であれば $F^n(w)$ は確かに存在して，$\mathrm{Re}\, F^n(w) \ge \mathrm{Re}\, w + n/2 \ge R + n/2 \to \infty$．$\mathrm{Re}\, F^n(w) \le |F^n(w)|$ であるから，$\Pi(R)$ 上の点は一様に無限遠点へと吸引される． ■

このΠ(R) のように，無限遠点を境界に含む位相的円板で一様に無限遠点へと吸引される集合を**吸引花弁** (attracting petal) と呼ぶ.

定理 4.9 (ローの線形化定理) 十分大きな R にたいし，吸引花弁 $\Pi(R)$ 上の等角同相写像 $\Phi : \Pi(R) \to \mathbb{C}$ が存在し，任意の $w \in \Pi(R)$ にたいし

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}(w) \ = \ w+1$$

かつ $\Phi'(w) \to 1$ ($\mathrm{Re}\, w \to \infty$) を満たす．とくに，このような Φ は定数の差を除き一意的に定まる.

このような Φ を**ファトウ座標** (Fatou coordinate) と呼ぶ.

ここではスタインメッツ，ミルナーの教科書を参考にした証明を与える.

証明. (定理 4.9) まず次の補題を証明する：

補題 4.10 $S>R$ のとき，$w_1, w_2 \in \Pi(2S) \subset \Pi(R)$ であれば,

$$\left| \frac{F(w_2)-F(w_1)}{w_2-w_1} - 1 \right| \ \le \ \frac{M}{S^{1+1/m}}.$$

とくに,

$$|F'(w_1) - 1| \ \le \ \frac{M}{S^{1+1/m}}.$$

証明． $g(w) = F(w) - (w+1)$ とおく．もし $w_0 \in \Pi(2S)$ であれば，w_0 中心半径 S の開円板は $\Pi(S)$ に含まれるから，その開円板上では $|g(w)| \le M/S^{1/m}$ としてよい．よってコーシーの積分公式より（もしくはシュワルツの補題より），$|g'(w_0)| \le (M/S^{1/m})/S = M/S^{1+1/m}$ がなりたつ．[9] したがって，$g'(w)$ を w_1 と w_2 を結ぶ線分 $[w_1, w_2] \subset \Pi(2S)$

[9] $$|g'(w_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = S} \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta - w_0)^2} \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\max_{|\zeta - w_0| = S} \frac{|g(\zeta)|}{S^2} \right) \cdot (2\pi S)$$

で積分することで，補題の主張と同値な式

$$|g(w_2) - g(w_1)| \;=\; \left|\int_{[w_1,w_2]} g'(w)dw\right| \;\leq\; \frac{M}{S^{1+1/m}}|w_2 - w_1|$$

を得る．

最後の微分の式は，$w_2 \to w_1$ とした極限である．[10] ■(補題)

さて証明にもどろう． 何でも良いので $a \in \Pi(2R)$ を固定し，$w \in \Pi(2R)$ 上で定義された正則写像 $\phi_n(w) := F^n(w) - F^n(a)$ を考える．また，$F^n(w), F^n(a)$ をそれぞれ w_n, a_n で表そう．このとき，

$$\left|\frac{\phi_{n+1}(w)}{\phi_n(w)} - 1\right| \;=\; \left|\frac{w_{n+1} - a_{n+1}}{w_n - a_n} - 1\right| \;=\; \left|\frac{F(w_n) - F(a_n)}{w_n - a_n} - 1\right|.$$

上の補題で $2S = 2R + n/2$ とおけば，$w_n,\ a_n \in \Pi(2S)$ より

$$\left|\frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} - 1\right| \;\leq\; \frac{M}{(R + n/4)^{1+1/m}} \;\leq\; \frac{C}{(n+1)^{1+1/m}}.$$

ただし $C := 4^{1+1/m}M$，$R \geq 1/4$ と仮定した．$P := \prod_{n\geq 1}(1 + C/n^{1+1/m})$ とおくと，$|\phi_{n+1}(w)/\phi_n(w)| \leq 1 + C/(n+1)^{1+1/m}$ より

$$|\phi_n(w)| \;=\; \left|\frac{\phi_n(w)}{\phi_{n-1}(w)}\right| \cdots \left|\frac{\phi_1(w)}{\phi_0(w)}\right| \cdot |\phi_0(w)| \;\leq\; P|w - a|.$$

よって

$$|\phi_{n+1}(w) - \phi_n(w)| \;=\; \left|\frac{\phi_{n+1}(w)}{\phi_n(w)} - 1\right| \cdot |\phi_n(w)| \;\leq\; \frac{CP}{(n+1)^{1+1/m}} \cdot |w - a|$$

がなりたつ．$\phi_n(w) = \phi_0(w) + (\phi_1(w) - \phi_0(w)) + \cdots + (\phi_n(w) - \phi_{n-1}(w))$ とみなせば，これより $\phi_n(w)$ はコンパクト集合上で一様収束極限 $\phi(w)$ をもつことがわかる．

また，$\phi_n(F(w)) = \phi_{n+1}(w) + (a_{n+1} - a_n)$ が成り立つから，$a_{n+1} = a_n + 1 + O(|a_n|^{1+1/m})$ より式 $\phi(F(w)) = \phi(w) + 1$ を得る．

等角性もチェックしておこう．$w = w_0 \in \Pi(2R)$ とすると，$\phi_n'(w) = (F^n)'(w) = F'(w_{n-1}) \cdots F'(w_0)$. ここで，$F'(w_i) \neq 0$ より $\phi_n'(w) \neq 0$ であるが，その極限においても $\lim_n \phi_n'(w) = \phi'(w) \neq 0$ となることは自明でない．そこで，$F'(w_i) = 1 + \epsilon_i = e^{\eta_i}$ とおく．いま $w_i \in \Pi(2R + i/2)$ および上の補題より，$|\epsilon_i| \leq M/(R + i/4)^{1+1/m} = C/(4R + i)^{1+1/m}$ が成り立つことに注意しよう．よって R が十分に大きければ全ての $i \geq 0$ について $|\eta_i| < 1$ と仮定してもよい．

さて一般に，$1 + \epsilon = e^\eta$ かつ $|\eta| < 1$ であれば

$$(3 - e)|\eta| \;\leq\; |\epsilon| = |e^\eta - 1| \;\leq\; 2|\eta|$$

[10] この式は次のように解釈できる：w が $\Pi(2S)$ 内の線分 $[w_1, w_2]$ を速度 1 で進むとき，g による像 $g(w)$ の速度は高々 $M/S^{1+1/m}$ である．よって，$g(w_1)$ から $g(w_2)$ の移動距離の上限として右辺の式を得る．

が成り立つ．これより，[11]

$$
\begin{aligned}
|\phi_n(w)-1| &= |e^{\eta_0+\cdots+\eta_{n-1}}-1| \le 2(|\eta_0|+\cdots+|\eta_{n-1}|) \\
&\le \frac{2C}{3-e}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(4R+i)^{1+1/m}} < \frac{2C}{3-e}\cdot\int_{R-1}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+1/m}} \\
&= O(R^{-1/m}) \to 0 \quad (R\to\infty).
\end{aligned}
$$

上の式は n に依存しないので，$R\to\infty$ のとき，$w\in\Pi(2R)$ であれば一様に $\phi'(w)=\lim_n \phi_n'(w)\to 1$ が成立する．とくに $\phi'(w)\neq 0$ より，等角である．

つぎに，ϕ が同相であることを示そう．[12] いま R は十分に大きいとして，$w\in\Pi(2R)$ のとき $|\phi'(w)-1|<1/2$ であるとしてよい．w_1, w_2 を $\Pi(2R)$ から任意に選ぶと，

$$
|\phi(w_2)-\phi(w_1)-(w_2-w_1)| \le \left|\int_{[w_1,w_2]}(\phi'(w)-1)dw\right| \le \frac{|w_2-w_1|}{2}.
$$

もし $\phi(w_1)=\phi(w_2)$ であれば，上の式から $w_1=w_2$ となる．よって単射である．

最後に，$2R$ を R で置き換えれば定理を得る． ■

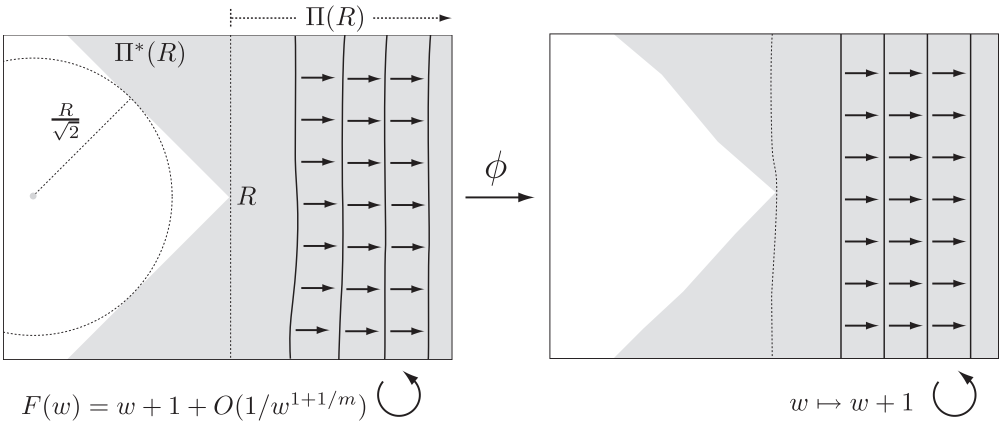


図 4.4: ファトウ座標 ϕ と拡張された吸引花弁 $\Pi^*(R)$．F の作用は，ϕ を通すことで平行移動とみなすことができる．

吸引花弁の拡張． これまでの議論で，十分大きな R について $\Pi(R)$ が F の吸引花弁として取ることができ，しかも Fatou 座標を通して平行移動と共役であることがわかった．

じつは吸引花弁をもうすこし広く拡張することができる．与えられた半径 R にたいし，

$$
\Pi^*(R)=\{w\in\mathbb{C} : |\arg(w-R)|<3\pi/4\}
$$

[11] 右側の不等式は前章の脚注で示した．左側は，$|e^\eta-1| \le |\eta|\{1-(|\eta|/2!+|\eta|/3!+\cdots)\} \le |\eta|\{1-(e-2)\}$ から導かれる．

[12] 等角であれば局所的には同相であるが，無限遠点を含む $\Pi(2R)$ 全体で同相（単射）かどうかは現時点ではわからない．

を満たす w 平面上の領域を考える．図示すればすぐにわかるが，この領域は原点中心半径 $R/\sqrt{2}$ の円の外側であるから，必要なら R を大きくしてそこでは命題 4.8 と同じ議論が成立する．また，定理 4.9 の証明をする上では補題 4.10 さえ成立していればよい．ここでネックになるのは，証明の中で，任意の $w_1, w_2 \in \Pi(R)$ を線分で結ぶところである．そのような線分がすべて $\Pi(R)$ に入ってないと，証明の中の積分を用いた計算がうまくいかない．

これを補うのは難しくなくて，次のようにすればよい：$w_1, w_2 \in \Pi^*(R)$ を任意にとると，それを直径の端点にもつ円が存在する．このとくに，これらの点を端点とする半円のうち一方は必ず $\Pi^*(R)$ に含まれている．これを $\{w_1, w_2\}$ とすれば，

$$|g(w_2) - g(w_1)| \;=\; \left|\int_{\{w_1,w_2\}} g'(w)dw\right| \;\le\; \frac{M}{S^{1+1/m}} \cdot \frac{\pi}{2}|w_2 - w_1|$$

が成立する．直線が半円に置き換わったため，弧長が $\pi/2$ 倍されてしまったが，定数部分を変更すればあとの議論には差し支えない．

さて F はもともと $z \mapsto g(z)$ の作用を部分的に取り出して，別の座標で表現したものであった．したがって，吸引花弁は本来 z 座標にあるとみなすことができる．これまでの議論を z 座標に還元することで，次の定理がなりたつ：

系 4.11 (ロー・ファトウの花弁定理) 原点を放物的固定点をもつ写像

$$g(z) = z + z^{m+1} + O(z^{m+2})$$

にたいし，原点を境界に含む $2m$ 個の位相的円板 $\Pi_1^-, \cdots, \Pi_m^-$（吸引花弁）および $\Pi_1^+, \cdots, \Pi_m^+$（反発花弁）が存在して，以下を満たす：

1. $\Pi_1^-, \cdots, \Pi_m^-$ は吸引方向を含み，互いに交わらない．また，$\overline{g(\Pi_i^-)} \subset \Pi_i^- \cup \{0\}$.
2. $\Pi_1^+, \cdots, \Pi_m^+$ は反発方向を含み，互いに交わらない．また，$\overline{\Pi_i^+} \subset g(\Pi_i^+) \cup \{0\}$.
3. $1 \le i \le m$ にたいし，$\Pi_i^\pm$ と $\Pi_{i+1}^\mp$（複号同順）は交わる．ただし，$m+1$ は 1 と同一視する．
4. $\{0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \Pi_i^+ \cup \Pi_i^-\right)$ は原点の近傍．
5. 各 i にたいし等角同相写像 $\Phi_i^\pm : \Pi_i^\pm \to \mathbb{C}$ が存在し，$w = \Phi_i^\pm(z)$ $(z \in \Pi_i^\pm)$ について
$$\Phi_i^\pm \circ g^{\pm 1} \circ (\Phi_i^\pm)^{-1}(w) \;=\; w \pm 1$$
が成り立つ（以上複号同順）．とくに $\Phi_i^+ \circ g \circ (\Phi_i^+)^{-1}(w)$ が定義できる場合に限れば，
$$\Phi_i^+ \circ g \circ (\Phi_i^+)^{-1}(w) \;=\; w + 1.$$

証明． (定理 4.11) 吸引花弁 $\Pi^*(R)$ の構成に用いた Π_0 は Z 平面において偏角が 0 以上 $2\pi/m$ 未満の部分であった．これを順次 $2\pi/m$ ずつ回転して得られる領域

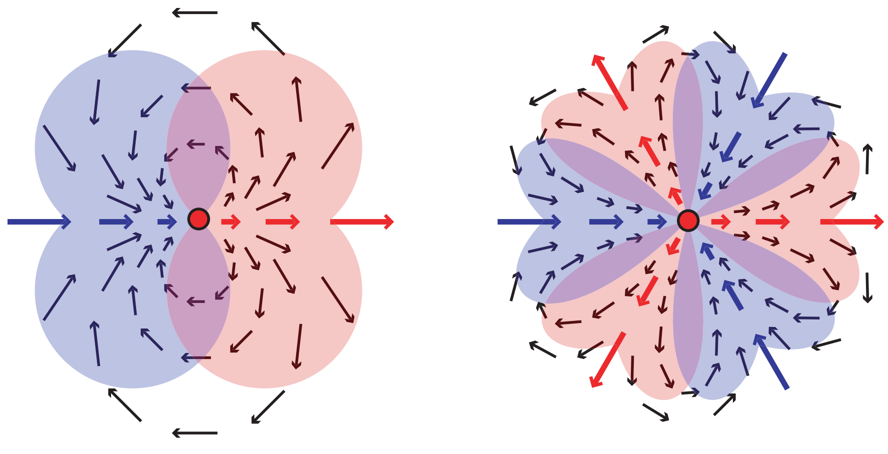


図 4.5: $m=1$ と $m=3$ における吸引花弁（青）と反発花弁（赤）．固定点の周りを花のように囲む．

$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m = \Pi_0$ においても吸引花弁 $\Pi(R)$ と同様の構成ができる．そうして得られた吸引花弁を $\Pi_1^-, \cdots, \Pi_m^-$ とすれば，それぞれは交差しない．

つぎに $w=g(z)$ として，$z=g^{-1}(w)$ について考えよう．$w=z+z^{m+1}+O(z^{m+2})=O(z)$ より，

$$\begin{aligned} z &= w - z^{m+1} + O(z^{m+2}) = w - (w + O(z^{m+1}))^{m+1} + O(z^{m+2}) \\ &= w - w^{m+1} + O(z^{m+2}). \end{aligned}$$

$O(z^{m+2}) = O(w^{m+2})$ より，$g^{-1}(w) = w - w^{m+1} + O(w^{m+2}) = w(1 - w^m + O(w^{m+1}))$. この式から，$g^{-1}$ は原点を重複度 $m+1$ の 放物的固定点としてもち，g と g^{-1} では反発方向と吸引方向の役割が入れ替わっていることがわかる．g^{-1} について，前節からの議論を適用して m 個の吸引花弁を構成すれば，$\Pi_1^+, \cdots, \Pi_m^+$ の性質を満たす．

Π_i^+ と Π_1^- が交わることは，$\Pi^*(R)$ の構成方法からわかる．実際，$\Pi(R)$ だけでは構成 Π_i^+ と Π_1^- は境界が原点で接するだけで，共通部分はもたない．しかし $\Pi^*(R)$ のように拡張することで，共通部分をもつようにできるのである． ■

$\Pi_1^+, \cdots, \Pi_m^+$ を g の**反発花弁** (repelling petal) とよぶ．正確には，g^{-1} の吸引花弁と定義すればよい．

4.2.5 無理的中立周期点の線形化可能性

最後に，$g(z) = \lambda z + O(z^2)$ において $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, θ が無理数の場合を考えよう．上述のように，線形化の可否によってそのような固定点（周期点）はジーゲル点ともクレーマー点ともよばれる．

ジーゲル点の場合，局所的な力学系は線形化座標によって無理数回転とみなすことができる．一方クレーマー点の場合はそうはいかず，力学系が局所的にどのように振

舞っているかを調べるのは非常にむずかしい．そのため，しばしば「ジーゲル点になるのは g，もしくは θ がどのような条件を満たすときか？」ということが問題になる．たとえば，

- 無理数 θ が**ブリューノ条件** Bruno condition とよばれる連分数展開に関する条件をみたすと，$z=0$ はジーゲル点となる．
- g が 2 次以上の多項式の反復合成であり，無理数 θ が**クレーマー条件** Cremer condition とよばれる条件をみたすと，$z=0$ はクレーマー点となる．

ことが知られているが，一般にジーゲル点・クレーマー点を隔てる必要十分条件は知られていない．このような条件には g そのものの性質が深く関係していることが知られており，仮に必要十分条件がわかったとしても，θ だけで判定されるとは限らないのである．[13]

しかし，2 次多項式の場合は事情が異なり，ヨコッツ (J.C.Yoccoz) による次のような結果が知られている[14]：

定理 4.12 (無理的中立周期点の線形化可能性) $\theta \in [0,1]-\mathbb{Q}$ とし，2 次多項式 $f_c(z)=z^2+c$ が乗数 $e^{2\pi i\theta}$ の周期点をもつとする．このとき，この周期点がジーゲル点であることと，θ がブリューノ条件をみたすことは同値である．

すなわち，2 次多項式の場合線形化可能性は乗数の回転角 θ によって完全にきまってしまう．ちなみに，ブリューノ条件をみたす θ の全体は長さ 1 の集合である．また，ブリューノ条件をみたさない（2 次多項式の場合必ずクレーマー点となる）θ の全体は長さ 0 だが無限集合である．[15]

4.3 周期点と分岐点

ここでは（2 次）多項式の力学系に戻って，周期点と分岐点の深い関係についてみていこう．あえて一般の多項式を考えるのは，$f_c(z)=z^2+c$ の代わりにその反復合成 f_c^n を考え，必要に応じて周期点を固定点と解釈したいからである．

4.3.1 吸引的周期点と分岐点

まずは，一般に d 次多項式によって定まる写像 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が周期 p の吸引的周期点 α をもったとしよう．

[13]極端なところでは，g が 1 次多項式（アファイン写像）であれば，θ によらず線形化可能である．

[14]ヨコッツの業績にはあとでまた触れることになるであろう．これらの業績により，彼は 1994 年フィールズ賞を受賞している．

[15]実際，非可算無限個存在する．また，ここでの「長さ」はルベーグ測度によって測るものとする．

吸引鉢. このとき，α を中心に十分小さなサイズの円板 $D = \mathbb{D}(\alpha, r)$ をとれば，$\overline{f^p(D)} \subset D$ を満たすようにできるのであった．このような円板を，便宜的に α の**吸引円板** (attracting disk) と呼ぶことにする．

いま $z \in \mathbb{C}$ が α に**吸引される** (attacted by α) とは，適当な自然数 ℓ が存在して，$f^\ell(z) \in D$ とできることだとする．この性質は ℓ の値さえ気にしなければ，吸引円板 D の取り方には依存しない性質である．α に吸引されるような $z \in \mathbb{C}$ 全体を，$A(\alpha)$ とあらわし，α の**吸引鉢** (きゅういんばち，attracting basin) とよぶ．[16]

このとき，次が成り立つ：

命題 4.13 α の軌道 $\mathcal{O}(\alpha) = \{\alpha, f(\alpha), \dots, f^{p-1}(\alpha)\}$ にたいし，

$$A(\alpha) \ = \ A(f(\alpha)) \ = \ \cdots \ = \ A(f^{p-1}(\alpha)).$$

証明は難しくないので割愛する．

吸引鉢は一般に，複数の（無限個の）連結成分をもつ．そのなかで，とくに周期点の軌道 $\mathcal{O}(\alpha)$ そのものを含む連結成分を**直接鉢** (ちょくせつばち，immediate basin) とよび，$A_0(\alpha)$ で表す．このとき，次がなりたつ：

定理 4.14 (吸引鉢と分岐点，ファトウ-ジュリア) 多項式 $f(z)$ が（超）吸引的周期点 α をもつと仮定する．このとき，直接吸引鉢 $A_0(\alpha)$ は少なくともひとつ f の分岐点を含む．とくに f が 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ の場合，$\mathcal{O}(0)$ は $A_0(\alpha)$ に含まれる．

直接鉢は周期系 $\mathcal{O}(\alpha)$ 全体に付随する集合であるから，上の性質は周期点 α の性質ではなく,「周期系」 $\mathcal{O}(\alpha)$ の性質と考えるべきであろう．

証明. (定理 4.14) 超吸引的周期系はそれ自身が分岐点を含むから，それ以外の場合を考えれば十分である．

まず α の周期を n，乗数を λ $(0 < |\lambda| < 1)$ とし，直接吸引鉢のなかでさらに α を含む連結成分を A としよう．このとき，あきらかに $f^n(A) \subset A$ であり，もし $(f^n)'(z) = 0$ となる $z \in A$ が存在すれば，$A_0(\alpha) = A \cup f(A) \cup \cdots \cup f^{n-1}(A)$ より，直接鉢のどこかには $f' = 0$ となる点が存在することになる．以降，そのような $z \in A$ が存在しないと仮定して，矛盾を導こう．

いま定理 4.5 より，適当な α の吸引円板 D の上で，等角同相な線形化写像 $\phi : D \to \mathbb{D}_r$ $(r > 0)$ が存在する．その逆写像 $\psi = \phi^{-1} : \mathbb{D}_r \to D$ は関係式 $f^n(\psi(w)) = \psi(\lambda w))$ を満たしている．そこで，次を示そう：

$\psi = \phi^{-1} : \mathbb{D}_r \to D$ は $\psi : \mathbb{D}_{r/|\lambda|} \to \psi(\mathbb{D}_{r/|\lambda|}) \subset A$ にまで等角な同相写像として拡張できる．したがって，等角な同相写像 $\psi : \mathbb{C} \to \psi(\mathbb{C}) \subset A$ が存在する．

[16] 重箱読みが気持ち悪いがよい訳がない．.

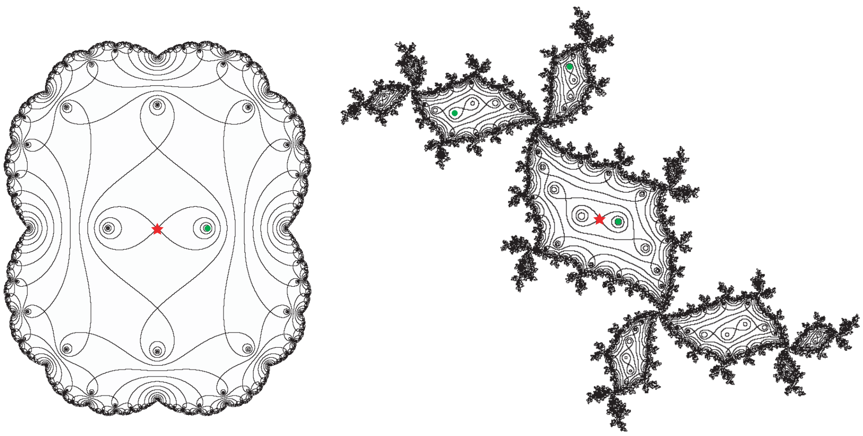


図 4.6: 2 次多項式の吸引鉢．左が周期 3 の吸引的周期点を持つ場合，右が周期 1 の吸引的固定点を持つ場合．それぞれ吸引的周期点は緑の点で描かれている．これらを含む成分の和集合が「直接鉢」である．直接鉢のなかには，少なくともひとつ分岐点（赤い☆）が含まれる．曲線はある吸引円板の境界線をうまくとり，軌道が最終的にその境界線上に乗るような点を描いたもの．ある種の等高線だとも考えられる．ここでは，分岐点が等高線に乗るように最初の吸引円板をうまくとった．

アイディアはベトヒャー座標の拡張方法（補題 3.10）と同じである．いま $|\lambda|r \leq \eta < r$ として $|w| = \eta$ となる w をとると，分岐点が存在しないという仮定から $z = \psi(w) \in D$ の十分小さな近傍では f^n の局所的な逆写像 g がとれて，$w' = w/\lambda$ の近傍で $\psi(w') := g \circ \psi(\lambda w')$ が等角同相写像として定義される．いま w が円 $\{|w| = \eta\}$ の上を一周すれば，$g \circ \psi(w) = \psi(w')$ は A 内の滑らかな閉曲線を描く．η が $|\lambda|r$ から r まで変化したとしよう．$\mathbb{D}_r$ はこのような同心円の束が同相写像により A 内の自己交差しない閉曲線の束に写っているわけだから，$\psi(w')$ の定義より，$\{|w'| = \eta/|\lambda|\}$ もやはり自己交差しない閉曲線の束に写る．そのような曲線の束は全体で位相的円板となる．これで，等角同相な拡張 $\psi : \mathbb{D}_{r/|\lambda|} \to \psi(\mathbb{D}_{r/|\lambda|}) \subset A$ が得られた．あとはこれを繰り返せば，ψ を w 平面全体にまで拡張できる．

いま f は 2 次以上の多項式であると仮定したから，A は有界集合である．そうでないと，α ではなく，無限遠点に吸収される部分が出てきてしまうからである．[17]これは，$\psi : \mathbb{C} \to A$ が有界な正則関数であることを意味するので，リュービルの定理[18]に矛盾する． ■

4.3.2 放物的周期点と分岐点

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が周期 p の放物的周期点 α をもったとしよう．

放物鉢． α の吸引花弁 Π をひとつ固定する．$z \in \mathbb{C}$ が α に**吸引される** (attacted by α) とは，適当な自然数 ℓ が存在して，$f^\ell(z) \in \Pi$ とできることだとする．この性質も（やはり ℓ の値さえ気にしなければ）吸引花弁 Π の取り方には依存しない性質である．α に吸引されるような $z \in \mathbb{C}$ 全体を，$PA(\alpha)$ とあらわし，α の**放物鉢** (ほうぶつばち，parabolic basin) とよぶ（図 4.7）．吸引鉢の場合と同様 (命題 4.13) に，放物鉢は周期系内の点の取り方によらず決まる．

放物鉢の連結成分の中で，吸引花弁 Π およびその軌道全体を含む連結成分たちをやはり**直接鉢** (ちょくせつばち，immediate basin) とよび，$PA_0(\alpha)$ で表す．

このとき，吸引鉢と同様の性質が成り立つ：

定理 4.15 (放物鉢と分岐点) 多項式 $f(z)$ が放物的周期点 α をもつと仮定する．このとき，直接吸引鉢 $PA_0(\alpha)$ は少なくともひとつ f の分岐点を含む．とくに f が 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ の場合，$\mathcal{O}(0)$ は $PA_0(\alpha)$ に含まれる．

証明． **(定理 4.15)** 証明は定理 4.14 とまったく同じである．線形化写像 ϕ を，ある吸引花弁上のファトウ座標に，円板を半平面に置き換えて議論すればよい． ■

[17]無限遠点の近傍では $f(z) \approx z^d$ であり，2 次多項式と同様の議論で「無限の鉢」にふくまれてしまうのである．

[18]複素解析の本を参照せよ．

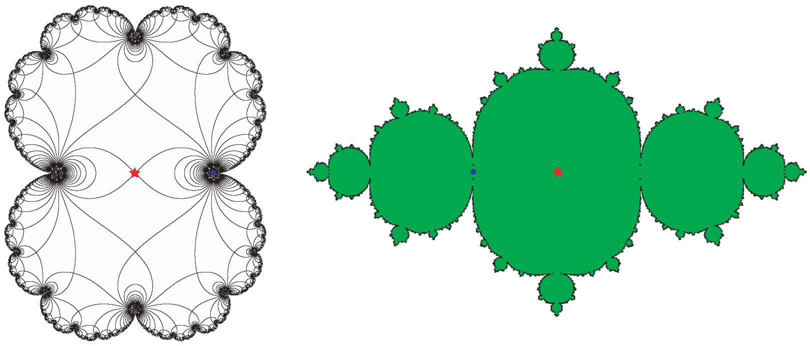


図 4.7: 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ に現れる放物的固定点の放物鉢．放物的固定点は青い●で，放物鉢に含まれる分岐点（この場合 $z = 0$）は赤い☆で示してある．左は $c = 0.25$ であり，乗数は 1．放物鉢の連結成分はひとつだけなので,「直接鉢」は放物鉢全体と一致する．曲線は図 4.6 と同様の方法で描いた「等高線」.（ただし吸引円板のかわりに，吸引花弁を用いている.）右は $c = -0.75$ の場合で，乗数は -1．この場合放物鉢は無限個の連結成分をもつが,「直接鉢」は固定点に触れる大きな 2 つの連結成分のみをさす.

系 4.16 d 次多項式がもつ吸引的周期系と放物的周期系の数は，あわせて $d-1$ 個以下である．とくに f が 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ の場合，1 つ以下となる．

証明. 上の定理より，ひとつの吸引的周期系（もしくは放物的周期系）には少なくともひとつの分岐点が対応する．分岐点は $d-1$ 次方程式 $f'(z) = 0$ の解であるから，高々 $d-1$ 個であるから，これら周期系の個数も最大で $d-1$ 個となる． ■

4.3.3 無理的中立周期点と分岐点

ジーゲル円板. α を多項式 f の無理的中立な p-周期点，$e^{2\pi i\theta}$ をその乗数とする．とくに α がジーゲル点（線形化可能）であるとき，等角な線形化写像 $\phi(f^p(z)) = e^{2\pi i\theta}\phi(z)$ が等角のまま定義できる最大の領域 D を**ジーゲル円板** (Siegel disk) とよぶ.

このとき $\phi(D)$ は本当に円板であり，そこでの角度 θ の回転がオリジナルの $f^p : D \to D$ と共役である．一般に ϕ には定数倍分の任意性があるが，$\phi'(0) = 1$ と正規化した場合，$\phi(D)$ の半径は一意的に定まる．これをジーゲル円板 D の「等角半径」とよぶことがある．クレーマー点は，この等角半径が 0 になってしまった，ジーゲル点の特別な場合とも解釈できる．この場合も,「ジーゲル円板」$D = \{\alpha\}$ が定義されていると考えることにする.

分岐点との関係. これらの無理的中立な周期点も，ある意味で分岐点をひきつける性質をもっている．いま α の「ジーゲル円板」 D にたいし，その像 $f^i(D)$ は無理的中

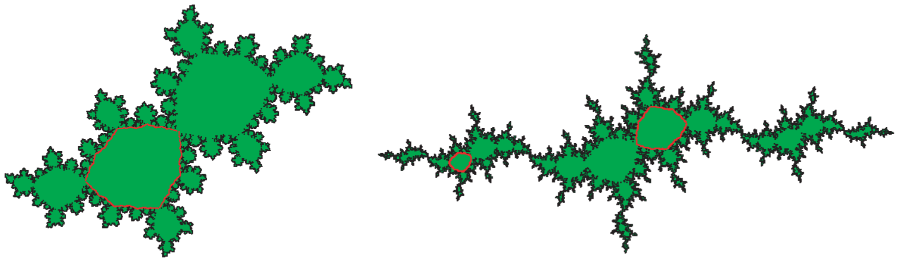


図 4.8: $\theta = (\sqrt{5}+1)/2$（黄金比）に対応する 2 次多項式のジーゲル円板．左が周期 1（$c \approx -0.39054087 + 0.586787901i$），右は周期 2（$c \approx -1.18434222 - 0.168872574i$）である．赤い部分は分岐点 $z = 0$ の軌道であり，その閉包はジーゲル円板の境界を含む．（この場合は，一致している．）

立周期点 $f^i(\alpha)$ の「ジーゲル円板」になっていることに注意しよう．このとき，次のことが知られている（図 4.8 も参照）：

定理 4.17 (無理的中立周期点と分岐点) 多項式 f が無理的中立周期点 α をもつとし，D を α の「ジーゲル円板」とする．このとき，ある分岐点 ω が存在して，

$$\partial D \cup \partial f(D) \cup \cdots \cup \partial f^{p-1}(D) \ \subset\ \overline{\mathcal{O}(\omega)}$$

をみたす．ただしクレーマー点の場合は $D = \{\alpha\} = \partial D$ とする．

系 4.18 (2 次多項式の場合) 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ が無理的中立周期点をもつとする．このとき，分岐点の軌道 $\mathcal{O}(0)$ はジーゲル円板の境界もしくはクレーマー点に集積する．

ドゥアディの不等式. d 次の多項式は重複度込みで $d-1$ 個の分岐点をもつ．非反発的（吸引，放物，中立）周期系がある場合，分岐点の軌道がどのような振る舞うか考えてみよう．

まず吸引もしくは放物的周期系が存在する場合，これに引き寄せられて吸引円板や吸引花弁に落ち込み二度と出られず，周期点に近づいていく分岐点が存在する．実際，この事実を用いて，系 4.16 を得たのであった．

次に無理的中立周期点が存在する場合，その「ジーゲル円板」の境界に引き寄せられる分岐点が必ず存在する．しかし吸引円板や吸引花弁に対応するものは無いので「引き寄せられて二度と出られない」というわけではなさそうである．したがって，ひとつの分岐点の軌道が，2 つ以上の中立的周期系の間をふらふらと行き来しているかもしれない．そのため，系 4.16 のような議論は通用しない．

それにも関わらず，系 4.16 は次のように，うまく拡張されるのである：

定理 4.19 (ドゥアディ) d 次多項式 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ の非反発的周期系それぞれにたいし，相異なる分岐点を対応付けることができる．とくに，これらの周期系の個数の合計は $d-1$ 以下．[19]

この定理の証明には擬等角変形（摂動）の理論が必要である．複素力学系の理論ではスタンダードな技法だが，解析学のやや高度な知識が必要になるので，ここでは割愛する．

とくに 2 次多項式の場合，

系 4.20 2 次多項式の非反発的（吸引，放物，中立）周期系の合計は 1 個以下．とくに $c\notin M$ の場合，周期点はすべて反発的である．

証明. **(系 4.20)** 主張の前半は上の定理より明らか．後半は，$c\notin M$ より分岐点の軌道 $\mathcal{O}(0)$ が無限遠点に吸引されることから，対応すべき非反発的周期系が存在できない．■

4.3.4 2 次多項式における分岐点軌道のまとめ

以上から，2 次多項式 $f_c(z)=z^2+c$ の分岐点の軌道 $\mathcal{O}(0)$ がどのように振る舞うか，分類できる．まず，

- $\mathcal{O}(0)$ は無限遠点に吸引される $\iff$ $c\notin M$
- $\mathcal{O}(0)$ は有界である $\iff$ $c\in M$

という分類はマンデルブロー集合の定義そのものである．これは，無限遠点という超吸引的固定点が分岐点 $z=0$ を吸引するかどうか，という分類だと考えられる．

さらに $c\in\mathbb{M}$ を仮定するとき，分岐点の軌道 $\mathcal{O}(0)$ の振る舞いは次のうちひとつだけが起こる：

(A) $f=f_c$ は（超）吸引的周期系をもち，$\mathcal{O}(0)$ はこれらの周期系に吸引される．

(P) $f=f_c$ は放物的周期系をもち，$\mathcal{O}(0)$ はこれらの周期系に吸引される．

(S) $f=f_c$ は線形化可能な無理的中立周期系（ジーゲル点）をもち，$\mathcal{O}(0)$ は（少なくとも）そのジーゲル円板の境界全体に集積する．

(C) $f=f_c$ が線形化不可能な無理的中立周期系（クレーマー点）をもち，$\mathcal{O}(0)$ は（少なくとも）その周期系に集積する．

(R) $f=f_c$ は反発的周期系しかもたない．[20]

[20] さらに，$\mathcal{O}(0)$ が有限集合の場合（前周期的な場合），無限集合の場合に分かれる．

以上のことから，充填ジュリア集合 K_c について次のことがわかる：

定理 4.21 $f = f_c$ が非反発的な周期点をもつとき，すなわち (A)，(P)，(S) の場合，充填ジュリア集合 $K = K_c$ は連結であり，かつ内点をもつ．

じつは K_c が内点をもつのは上記の場合に限ることが知られている（サリバンの分類）．これについてはあとで触れるであろう．

証明. 連結性は $c \in \mathbb{M}$ よりわかる（定理 3.14）．K_c が内点をもつことは，(A) の場合吸引円板，(P) の場合吸引花弁，(S) の場合はジーゲル円板が無限の鉢 B_c に含まれないことからわかる． ■

4.4 2 次多項式の超吸引的周期系とマンデルブロー集合

超吸引的周期系をもつ 2 次多項式は，ある意味でマンデルブロー集合の体幹をなす細胞の，さらにその細胞核，といった趣をもつ．その意味を大まかに理解しておくと，次章以降の議論がスムーズに理解されるだろう．

4.4.1 超吸引的周期点

吸引的周期点のなかでも，$\lambda = 0$ の場合は特別で，**超吸引的** (superattracting) と呼ばれるのであった．この場合，軌道

$$\alpha = \alpha_0 \xmapsto{f} \alpha_1 \xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f} \alpha_{n-1} \xmapsto{f} \alpha_0$$

の中にはかならず原点 0 が含まれる．なぜか？

乗数の連鎖律より

$$\lambda = 0 = f'(\alpha_0) \cdot f'(\alpha_1) \cdots f'(\alpha_{n-1})$$

がわかる．これが 0 になるのは $f'(\alpha_i) = 0$ となる $0 \le i \le n-1$ が存在する場合に限る．$f(z) = z^2 + c$ より $f'(z) = 2z$ であったから，$\alpha_i = 0$ でなくてはならない．

逆に，原点が周期点であれば，それが超吸引的となることもわかる．すなわち，

命題 4.22 (超吸引 2 次多項式) 2 次多項式 $f = f_c$ において，超吸引的周期系とは原点 $z = 0$ を含む周期系のことである．とくに，このような周期系をもつ c は無限個存在し，しかもすべて $\mathbb{M}$ に含まれる．

証明. 後半をしめせば十分であろう．原点が n-周期的であれば，$f_c^n(0) = 0$ をみたす．いま，このような周期点をあたえるパラメーター c が有限個しかないと仮定する．こ

のとき，これらの f_c のなかに，原点の周期が最大となるものが存在するであろう．その周期を $p_0 \geq 1$ と置く．

さていま，$p > p_0$ をみたす十分大きな素数 p を取る．このとき，方程式 $f_c^p(0) = 0$ は c に関する 2^p 次方程式であり，解は重複度込みで 2^p 個存在する．そのような解のひとつ c について，f_c の力学系を考えよう．

このとき，原点の周期は p または 1 であるが，仮定より周期 p はありえない．しかし，原点の周期が 1 となるような c は $c^2 + c = c$ より $c = 0$ のみである．したがってさきほどの方程式は $f_c^p(0) = c^{2^p}$ でなくてはならない．

一方，関係式 $f_c^{m+1}(0) = \{f_c^m(0)\}^2 + c$ および数学的帰納法により，$f_c^m(0) = c + c^2 + \cdots$ $(m \geq 2)$ の形であることもわかる．これは矛盾である．

また，原点が周期的であれば $f_c^n(0)$ の絶対値は発散しないから，$c \in \mathbb{M}$ をみたす．■

原点が周期的であるような 2 次多項式 $f = f_c$ もしくはパラメーター c を**超吸引的** (superattracting) とよぶことにしよう．定理 4.21 より，超吸引的 2 次多項式 $f = f_c$ の充填ジュリア集合 $K = K_c$ は連結集合でり，かつ内点をもつ．いくつか具体例をみていこう．

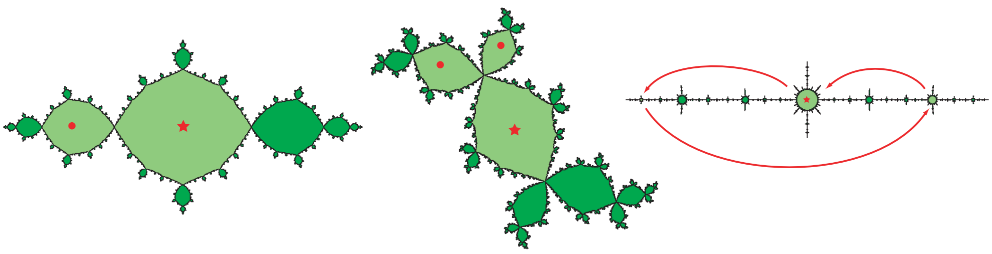


図 4.9: 超吸引的 2 次多項式の例．左は周期 2（バジリカ），中央（ウサギ）と右（飛行機）が周期 3 である．分岐点は赤い★で，周期点は赤い点で表した．ただし「飛行機」については，直接鉢が極端に小さくなるので，矢印で大まかな位置だけ示してある．

超吸引的 2 次多項式の例（その 1）． $f(z) = z^2$．このとき，原点は超吸引的固定点である．

超吸引的 2 次多項式の例（その 2）． $f(z) = z^2 - 1$．このとき，原点は超吸引的 2-周期点である（図 4.9，左）．実際，

$$0 \overset{f}{\longmapsto} -1 \overset{f}{\longmapsto} 0 \overset{f}{\longmapsto} -1 \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

となる．f^2 は原点の近傍で，次のような展開式をもつ：

$$f^2(z) \;=\; -2z^2 + z^4 \;\approx\; -2z^2$$

超吸引的2次多項式の例（その3）．超吸引的3-周期点．超吸引的3-周期点をもつ2次多項式を探してみよう．このようなパラメーターは方程式 $f_c^3(0) = c^4 + 2c^3 + c^2 + c = 0$ と解くことによって得られる．この場合，$c = 0$ は除外して，方程式 $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$ の解が実質的な3-周期点をあたえる．実係数3次方程式なので，すくなくともひとつ実数解をもつことがわかる．数値計算してみると，$c \approx -1.75488$（飛行機）および $c \approx -0.122561 \pm 0.744862i$（ドュアディのウサギとその複素共役）が得られる（図4.9, 中央と右）．ちなみにウサギの複素共役は,「反ウサギ」（anti-rabbit）という変な名前で呼ばれることがある．

同様の方法で，原理的にはすべての超吸引的 n-周期点を求めることができる．

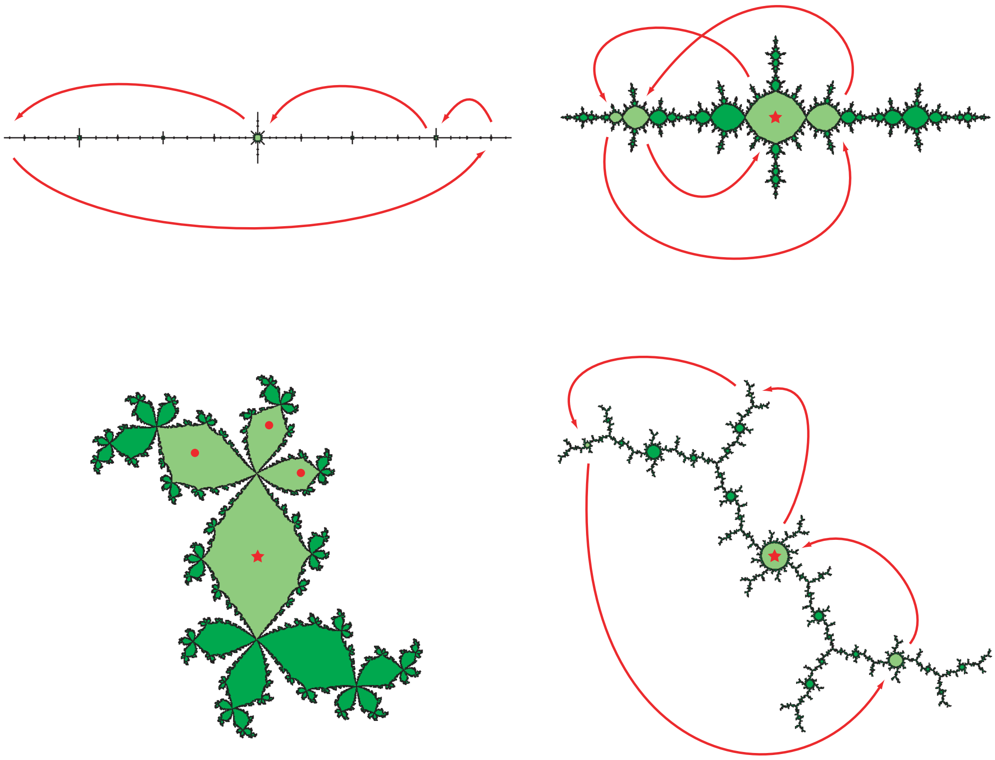


図4.10: 超吸引的4-周期点をもつ2次多項式の例．左上から右下へ，$c \approx -1.9408$，$c \approx -1.3107$, $c \approx 0.282271 + 0.530061i$，$c \approx -0.15652 + 1.03225i$．その他，これらの複素共役と合わせて，計6個存在する．

超吸引的2次多項式の分布．一般に，方程式 $f_c^n(0) = 0$ を c について解くことで，超吸引的 n-周期のある場所を特定できる．図4.11には，$\mathbb{M}$ のどこに周期 n の超吸引的2次多項式があるかが図示されている．この図から示唆されるように，$\mathbb{M}$ を構成する無数の「こぶ」の，その中心とも呼べる場所に分布していることがわかる.「こぶ」のひとつを細胞にたとえれば，超吸引的2次多項式がその細胞核だという比喩もあながち悪くはないだろう．

さてその「こぶ」の中でパラメーター c を変化させて，充填ジュリア集合を描かせ

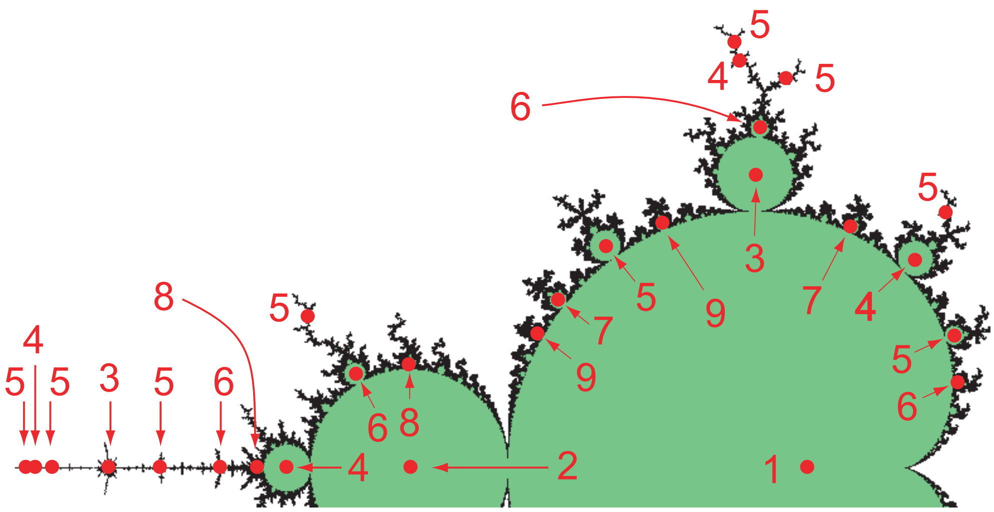


図 4.11: 超吸引的 2 次多項式の分布.

てみると，形は変化するのだけども，全体的な構造は一致していることが観測できる．たとえば，次のことが証明できる：

命題 4.23 $f_c(z) = z^2 + c$ が $c = c_0$ で（超）吸引的 n-周期点 $\alpha = \alpha(c_0)$ をもつとする．このとき，ある十分小さな $\delta > 0$ が存在して，$|c - c_0| < \delta$ であれば f_c も吸引的 n-周期点を $\alpha(c)$ をもつ．

さらに，$c \to c_0$ のとき，$f^i(\alpha(c)) \to f^i(\alpha(c_0))$ がすべての $i = 0, \ldots n-1$ で成り立つ．

証明. (**命題** 4.23) ■

4.4.2 マンデルブロー集合の双曲成分

マンデルブロー集合の内部 $\mathbb{M}^\circ$ の連結成分 H が超吸引的なパラメーター $c \in H$ をもつとき，これを $\mathbb{M}$ の**双曲成分** (hyperbolic component) とよぶ.

「双曲」という言葉の由来は，あとで明かされるであろう．ここでは次の定理が重要である：

定理 4.24 (デュアディ・ハバード・サリバンの一意化定理) 任意の双曲成分 H は単位円板 $\mathbb{D}$ と等角同型である．とくに，次のような等角同型差写像 $\Psi : H \to \mathbb{D}$ が存在する：

1. $c \in H$ とするとき，f_c は乗数 $\Psi(c) \in \mathbb{D}$ の吸引的周期系をもつ．とくに，$c_0 \in H$ を超吸引的パラメーターとするとき，$\Psi(c_0) = 0$.

> 2. $\Psi : H \to \mathbb{D}$ は $\Psi : \bar{H} \to \overline{\mathbb{D}}$ にまで同相に拡張できて，$c \in \bar{H}$ とするとき，f_c は乗数 $\Psi(c) \in \overline{\mathbb{D}}$ の周期系をもつ

この定理はある意味で，命題 4.23 の拡張である．ちょっと簡単な例を見ておこう．

メインカージオイド． $\mathbb{M}$ の内部集合で，原点を含むハート型の部分はしばしばメインカージオイド（主心臓型）とよばれる．ダブルマンデルブローを与える 2 次多項式 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ を考えてみよう（図 2.2）．$z = 0$ は固定点，かつ乗数は λ であるから，$|\lambda| < 1$ であればこれは吸引的固定点である．一方，この多項式は $f_c(z) = z^2 + c$, $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$ とアファイン共役である．じつは，写像 $\rho : \lambda \mapsto \lambda/2 - \lambda^2/4$ による λ-平面での単位円板 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ の像が $\mathbb{M}$ のメインカージオイドである．

$\rho'(\lambda) = (1 - \lambda)/2$ であるから，$\lambda = 1$ は ρ の分岐点であり，$\rho(1) = 1/4$ にうつる．とくに局所的には ρ は 2 対 1 であり，その部分がメインカージオイドの「お尻」の部分に対応する．

また，$|\lambda| = 1$ のとき，$\lambda = e^{2\pi i\theta}$ の $\theta \in [0, 1)$ が有理数の部分は放物的固定点に対応する．これらはじつはメインカージオイドに接する別の「こぶ」（双曲成分）との連結点になっている．（ただし $\theta = 0$ の場合は「お尻」なので,「こぶ」はない．しかし λ 平面で見れば，ちゃんと「こぶ」がくっついている．）

周期 2 の成分． 方程式 $(z^2 + c)^2 + c = z$ の解が周期 2 の周期点である．この方程式は $(c - z + z^2)(1 + c + z + z^2) = 0$ と書けるが，$c - z + z^2 = 0$ を満たしているのは固定点であるから，$1 + c + z + z^2 = 0$ のふたつの解 $z = (-1 \pm \sqrt{-3 - 4c})/2$ がそのまま周期 2 の周期系をなす．たとえば $\alpha = (-1 + \sqrt{-3 - 4c})/2$ について，乗数 $\lambda = (f^2)'(\alpha)$ を計算すると，$\lambda = 4(1 + c)$ という意外にシンプルな形となる．これより，$|\lambda| < 1$ に対応するのは $|c + 1| < 1/4$ という -1 中心半径 $1/4$ の開円板であることがわかる．

これがちょうどメインカージオイドの左手に接する大きめの円板に対応するバジリカ（$c = -1$）を含む双曲成分である．

周期 3 の成分． 原理的には上と同様の方法で周期 3 の 3 つの双曲成分（それぞれウサギ，反ウサギ，飛行機を含む）を決定できるはずであるが，その境界はこれまでの例のような単純な式（単位円の多項式による像）とはならない．しかし上の定理 4.24 によれば，このような双曲成分も単位円板のある等角写像による像になっているのである．

第5章　外射線の理論（前編）：ジュリア集合

外射線 (external ray) は多項式複素力学系を記述する上でもっとも基本的な道具といえる．80 年代前半，ドゥアディとハバードはカラテオドリらが 20 世紀初頭に発展させた複素関数論的手法をベースに，この外射線の理論を作り上げた．そのエッセンスは俗に『オルセー・ノート』とよばれる 2 冊のノートにまとめられている．[1]とくに 2 次多項式力学系におけるマンデルブロー集合の記述に関連する部分は，現在でも基本的文献としてその地位を失っていない．

この章と次章では，このオルセー・ノートの主結果を 2 次多項式の場合に限定して紹介する．充填ジュリア集合やマンデルブロー集合の複雑な形状（とくに「こぶ」たちの形状）が，大部分「組み合わせ的に」決定されているかが明らかになるであろう．ただし，オルセー・ノートで扱われている数学的手法は決して簡単とはいえない．しばし証明を省略（もしくは後回しに）したり，より初等的な方法で定式化したりする．

5.1　ジュリア集合の外射線と着陸可能性

5.1.1　充填ジュリア集合の外射線

新しい角度の尺度． 数学では回転量を測るのにラジアンを用いるのがふつうだが．これから定義する外射線に関していえば，ラジアンはあまり都合のよい尺度とはいえない．そこで，別の方法で角度を測ることにする．

その別の角度とは，単純に「１周」を単位とするである．単位円を反時計回りに 1 周する回転量が 2π ラジアンであった．これを「**角度** (angle) 1」とする．したがって，たとえば $\pi/2$ ラジアン，すなわち直角は,「角度 1/4」である．また，時計回りに 2 周すれば,「角度 -2」の回転，ということになる．

この角度はラジアン同様，任意の実数値 t をとる．しかし，角度 t の回転も，角度 $t+1$ の回転も回転した結果だけをみると同じである．このことから，実数を「角度」と思った場合，整数分の違いは無視したほうが自然である．

[1] A. Douady and J. H. Hubbard. *Etude dynamique des polynômes complexes I & II*. Pub. Math. d'Orsay 84–02, 85–05, 1984/85. （Hubbard の個人ウェブページから，仏語版と英語版がダウンロードできる．）

実数 t と t' について「角度 t」と「角度 t'」の回転が同じ結果を与えるとき，すなわち $t - t'$ が整数であるとき，これらは「同じ角度」とみなし，

$$t \equiv t' \mod 1$$

と表す．ただし，この mod 1 はしばしば省略される．たとえば，$1/4 \equiv 5/4 \equiv -3/4$ となる．[2]

このように実数を「角度」とみなした集合を，$\mathbb{T}$ もしくは $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ であらわす．また，$t \in \mathbb{Q}$ のときに対応する $\mathbb{T}$ の元は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で表すことにする．

角度の集合 $\mathbb{T}$ は幾何学的には単位円 $\mathbb{J}$ と思うことができる．実数 t について,「角度 t 」と単位円上の点 $e^{2\pi it}$ が対応するからである．実際，任意の整数 n にたいし $e^{2\pi it} = e^{2\pi i(t+n)}$ が成り立つので，ちゃんとつじつまがあっている．

外射線の定義（$c \in \mathbb{M}$ の場合）． まずは 2 次多項式 $f_c(z) = z^2 + c$ において，$c \in \mathbb{M}$ の場合を考えよう．すなわち，以下では

> 充填ジュリア集合 K_c は連結であり，無限の鉢 $B_c = \mathbb{C} - K_c$ には等角な同相写像
>
> $$\phi_c : B_c \to \mathbb{B} = \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$$
>
> が定義され（ベトヒャー座標），$\phi_c(f_c(z)) = \{\phi_c(z)\}^2$ が成り立つ

と仮定しておく．

さて，与えられた角度 $t \in \mathbb{T}$ にたいし，充填ジュリア集合 K_c の**外射線** (external ray) を

$$\mathcal{R}_c(t) := \phi_c^{-1}\big(\{re^{2\pi it} \in \mathbb{B} : 1 < r < \infty\}\big)$$

と定義する．これは，すでに定義した K_c もしくは B_c の等高線 (equipotential curve)

$$\mathcal{E}_c(r) = \phi_c^{-1}\Big(\Big\{w \in \hat{\mathbb{B}} : |w| = r\Big\}\Big)$$

（ただし $r > 1$ ）と直交する曲線である．なぜなら，$c = 0$ のときに対応する

$$\mathcal{R}_0(t) = \left\{re^{2\pi it} \in \mathbb{B} : 1 < r < \infty\right\} \quad \mathcal{E}_0(r) = \Big\{w \in \hat{\mathbb{B}} : |w| = r\Big\}$$

は互いに直交する曲線の族を定め，これを等角写像（したがって，局所的に角度をたもつ） ϕ_c^{-1} で写したものが外射線，等高線だからである．(図 5.1)

ベトヒャー座標は $\phi_c(f_c(z)) = \{\phi_c(z)\}^2$ を満たすことから，次の事実は簡単にわかる：

---

[2] この状況は「秒針だけからなる時計」をイメージするのが一番良い．実数が無限の過去から未来永劫に流れる時間だとすれば，われわれのいう「角度」とは，時計盤上で秒針がさす時刻にほかならない．日付や何時何分の情報は削られて,「何秒」の部分だけに着目しているのである．

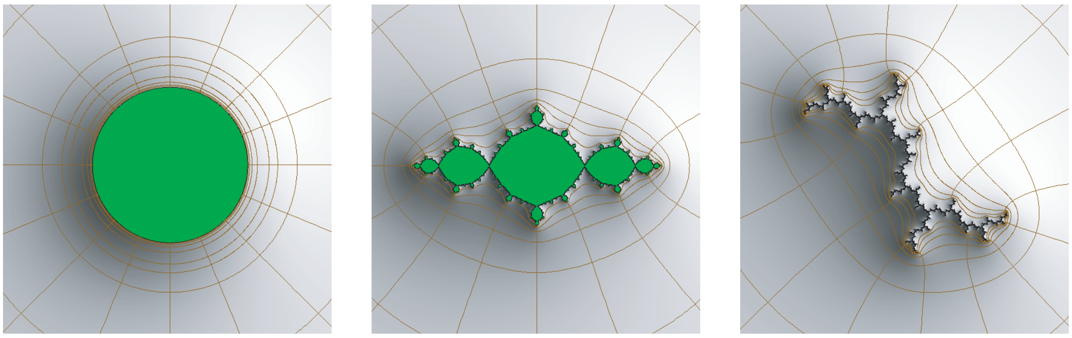


図 5.1: 外射線と等高線の例．右から，$c = 0$，$c = -1$, $c = i$ について，角度 $t = k/16$ $(0 \le k \le 15)$ の外射線と高さ $r = e^{1/2^m}$ $(0 \le m \le 6)$ の等高線が描かれている．無限の鉢には等高線（グリーン関数）にあわせた高さが立体的に与えられてるとして陰影をつけてある．

命題 5.1 $c \in \mathbb{M}$ のとき，

$$f_c(\mathcal{R}_c(t)) \ = \ \mathcal{R}_c(2t) \qquad f_c(\mathcal{E}_c(r)) \ = \ \mathcal{E}_c(r^2)$$

が任意の $t \in \mathbb{T}$ および $r > 1$ で成り立つ．

証明. 定義どおり確認しても良いが，より直感的に次のように説明できる：関係式 $\phi_c(f_c(z)) = \{\phi_c(z)\}^2$ は，f_c の作用を ϕ_c を通して眺めると，$f_0 : z \mapsto z^2$ に見える，ということを述べている．また，外射線・等高線の定義より，ϕ_c は $\mathcal{R}_c(t)$ および $\mathcal{E}_c(r)$ をそれぞれ $\mathcal{R}_0(t)$ および $\mathcal{E}_0(r)$ に 1 対 1 に対応付ける．$c = 0$ の場合求める等式は明らかであるから，それを ϕ_c^{-1} で眺めたものが求める等式である． ■

この性質は，K_c の形を調べるうえで重要な役割を果たす．

5.1.2 外射線の着陸可能性

着陸. 外射線の図を眺めていると，すべて無限遠点から伸びてきて，充填ジュリア集合 K_c に到達しているように見える．この性質をしっかり定式化しておこう．

もしある点 $z \in K_c$ が存在して，

$$\lim_{r \to 1+0} \phi_c^{-1}(re^{2\pi it}) \ = \ z$$

が成り立つとき，角度 t の外射線は**着陸する** (land) とよぶ．[3]すなわち，$r \to 1+0$ の

[3]日本人の研究者の間でも，実際には「外射線が着陸する」などとは言わず,『エクスターナル・レイがランドする』と言う．むやみにカタカナ語を増やしたくないのであえて訳語をつけているが，一方で使いもしない言葉を文章化するのもためらわれる．難しいところ．

とき外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ 上の点 $\phi_c^{-1}(re^{2\pi it})$ は K_c に近づくが，ただ近づくのではなく，それが一点に収束する場合をいう．

明らかな例としては，$f_0(z)=z^2$ の外射線 $\mathcal{R}_0(t)$ はすべて $e^{2\pi it}$ に着陸する．しかし，外射線の着陸可能性は当たり前のことではない．後で見るように，着陸しないワイルドな外射線（をもつような $c\in\mathbb{M}$ ）も無数に存在するのである．ただそのような例は特殊な部類に入るので，ここでは取り扱いに簡単な着陸する外射線だけを考えることにしよう．

外射線の着陸可能性と力学系． 外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ が着陸するとき，その着陸点 $\lim_{r\to 1+0}\phi_c^{-1}(re^{2\pi it})$ を $\gamma_c(t)$ で表すことにする．

命題 5.2 (着陸可能性は力学系で保たれる) $t\in\mathbb{T}$ にたいし，外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ が $z_0\in K_c$ に着陸するならば，$\mathcal{R}_c(2t)$ は $f(z_0)\in K_c$ に着陸する．すなわち，

$$f_c(\gamma_c(t)) \;=\; \gamma_c(2t).$$

さらに，$\mathcal{R}_c(t/2)$ および $\mathcal{R}_c((t+1)/2)$ は $f^{-1}(\{z_0\})$ の中の 1 点に着陸し，

$$f_c^{-1}(\{\gamma_c(t)\}) \;=\; \{\gamma_c(t/2),\gamma_c((t+1)/2)\}.$$

証明. 前半は f の連続性より

$$f(z_0) \;=\; f(\lim_{r\to 1+0}\phi_c^{-1}(re^{2\pi it})) \;=\; \lim_{r\to 1+0} f(\phi_c^{-1}(re^{2\pi it})) \;=\; \lim_{r\to 1+0}\phi_c^{-1}(r^2e^{4\pi it})$$

が成り立つことからわかる．

後半を示そう．$z_0\in K_c$ が分岐値でなければ（すなわち $z_0\neq c$ であれば）逆像 $f_c^{-1}(\{z_0\})$ は 2 点 $\{-w_0,w_0\}$ からなり，$f:\pm w_0\mapsto z_0$ は局所的に定義された（連続な）逆写像 $g_\pm : z_0\mapsto \pm w_0$ を持つので，前半と同様の議論で証明される．

$z_0\in K_c$ が分岐値の場合，すなわち $z_0=c$ の場合，$f_c^{-1}(\{z_0\})$ は原点 $w_0=0$ の 1 点のみである．いま仮定のように

$$f(0) \;=\; c \;=\; \lim_{r\to 1+0}\phi_c^{-1}(re^{2\pi i\cdot t}))$$

であれば，外射線上の点 $\phi_c^{-1}(re^{2\pi i\cdot t}))$ の f による逆像 2 点はともに $z=0$ に収束する．ベトヒャー座標の性質より，これらの 2 点は $\phi_c^{-1}(\sqrt{r}e^{2\pi i\cdot t/2}))$ と $\phi_c^{-1}(\sqrt{r}e^{2\pi i\cdot(t+1)/2})$ に他ならないので，これらの属する外射線 $\mathcal{R}_c(t/2)$ および $\mathcal{R}_c((t+1)/2)$ はともに $w_0=0$ に収束する． ■

外射線と「こぶ」の形状． 外射線がその力をもっとも発揮するのは，ある 1 点に 2 本以上の外射線が着陸している部分に着目したときである．これによって，充填ジュリア集合の「こぶ」が生成される仕組みが理解できる．とにかく，具体例をみてみよう．

例 1（バジリカ）． バジリカの場合，角度 1/3 と 2/3 の外射線が同じ反発的固定点 α に着陸することが知られている．したがって $f^n(z)=\alpha\ (n=1,2,\cdots)$ となる $z\in K$

においては，$2^n t \in \{1/3, 2/3\}$ を満たすような角度 t の外射線が同じく 2 本着陸する．この事実をふまえて図 5.2 左をじっくり眺めると，バジリカの「こぶ」が力学系の中でどのように生成され，写りあうのか概ね理解できる：まず，α の逆像は α 自身と $-\alpha$ であり，$-\alpha$ のほうには角度 $1/6$ と $5/6$ の外射線が着陸する．さらにその逆像は，角度 $1/12$ と $11/12$ が着陸する正の実数と，角度 $5/12$ と $7/12$ が着陸する負の実数である．さらにこれら 2 点の逆像は，実軸上にある

$$\gamma(1/24) = \gamma(23/24) \quad \text{および} \quad \gamma(11/24) = \gamma(13/24)$$

と，虚軸上にある

$$\gamma(5/24) = \gamma(7/24) \quad \text{および} \quad \gamma(17/24) = \gamma(19/24)$$

である．

以下同様に，逆像と対応する外射線を追跡していけば,「こぶ」の付け根部分と α の後方軌道[4]が対応していることが理解できるだろう（図 5.3）．直感的にいえば，バジリカの K は閉円板を風船のようにつまむ操作を無限に繰り返してできたものだと考えられる．

例 2（ウサギ）． この場合，反発的固定点 α には角度 $1/7$, $2/7$, $4/7$ の外射線が着陸する.「こぶ」が生成され，写りあう原理はバジリカとまったく同様である（図 5.2 右）．

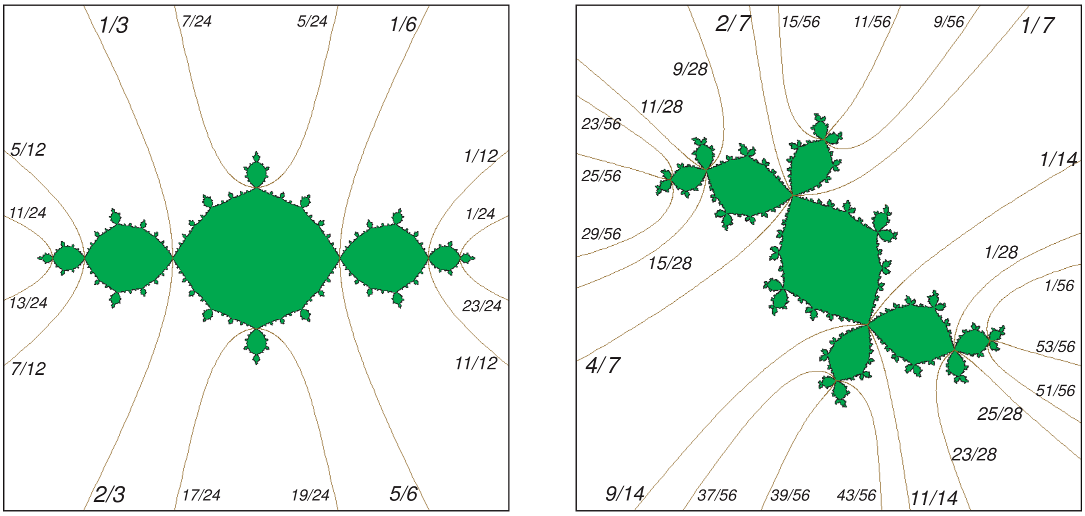


図 5.2: バジリカとウサギの外射線．同一点に着陸する角度を探し出せば，充填ジュリア集合の「こぶ」の構造が理解される．

注意． 現時点では，バジリカやウサギの例において，なぜこのような角度の外射線が固定点 α に着陸するのか，という点についてまったく説明されていない．その正当化は今後の課題（テーマ）のひとつといえるだろう．

[4]すなわち，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，$f^n(z) = \alpha$ となるような z 全体のこと．

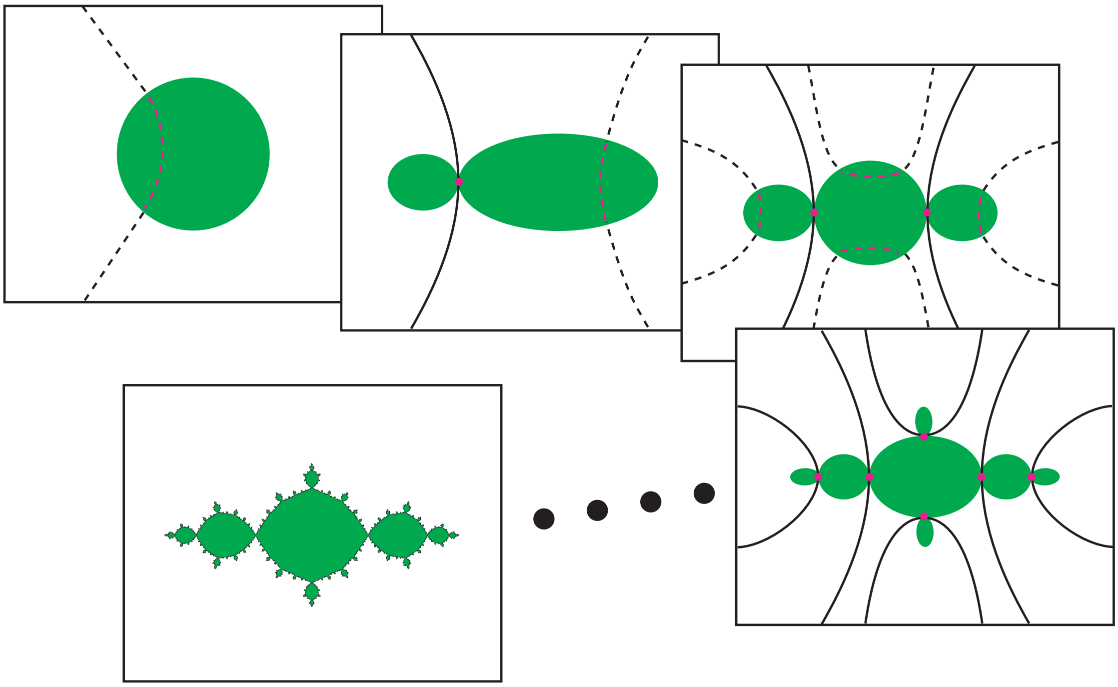


図 5.3: 固定点に着陸する外射線をもとに，バジリカの「こぶ」が帰納的に保証されていく様子.

一方で，たとえばバジリカの場合，一旦「角度 1/3 と 2/3 の外射線が固定点 α に着陸する」ことが分かれば，図 5.3 の上から 2 番目の図のように，これらの外射線と固定点によって K が少なくともふたつの部分に分割されるという事実は保証される．さらにその逆像を考えることで，3 番目のように K が分割されていることが保証され$\cdots$. 結局，数学的帰納的によって α の後方軌道上に「こぶ」の付け根（風船をつまんだ部分）があることが証明される．[5]

5.1.3 着陸しない外射線と着陸されない点

これまでは着陸する外射線のみを見てきたが，着陸しない外射線の可能性を知っておくのも，少なからず有意義であろう．今後着陸可能性を議論する際，どんなことに注意したらよいかがはっきりとするからである．

着陸しない曲線族. まず，右半平面 $\mathbb{H}_R := \{x + yi \in \mathbb{C} : x > 0\}$ において，関数 $y = 0.5\sin(1/x) \quad (x > 0)$ のグラフを考える．このグラフ上の点 $(x, \sin(1/x))$ は，$x \to +0$ のとき y 軸の上の $|y| \le 0.5$ に対応する部分にいくらでも近づくが，決して一点に収束はしない．このグラフを y 軸方向に t 平行移動させると，互いに交わらない曲線族 $y = 0.5\sin(1/x) + t$ $(t \in \mathbb{R})$ ができる（図 ??の右上）.

[5] 実際には，α の後方軌道以外にも「つままれている」部分が存在するかもしれない.「絵を信用しない」という当初の立場を思いだしておこう.

これらを写像 $q:\mathbb{H}_R \to \mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}},\ q(z):=e^{2\pi iz}$ で写した場合，曲線族の像は図 5.4 の右下のようになる．この曲線族は互いに交わらず，すべて単位円に近づくという点では $z\mapsto z^2$ の外射線に良く似ているが，いずれも着陸しない．より正確には，単位円の一部に振動しながら集積している．

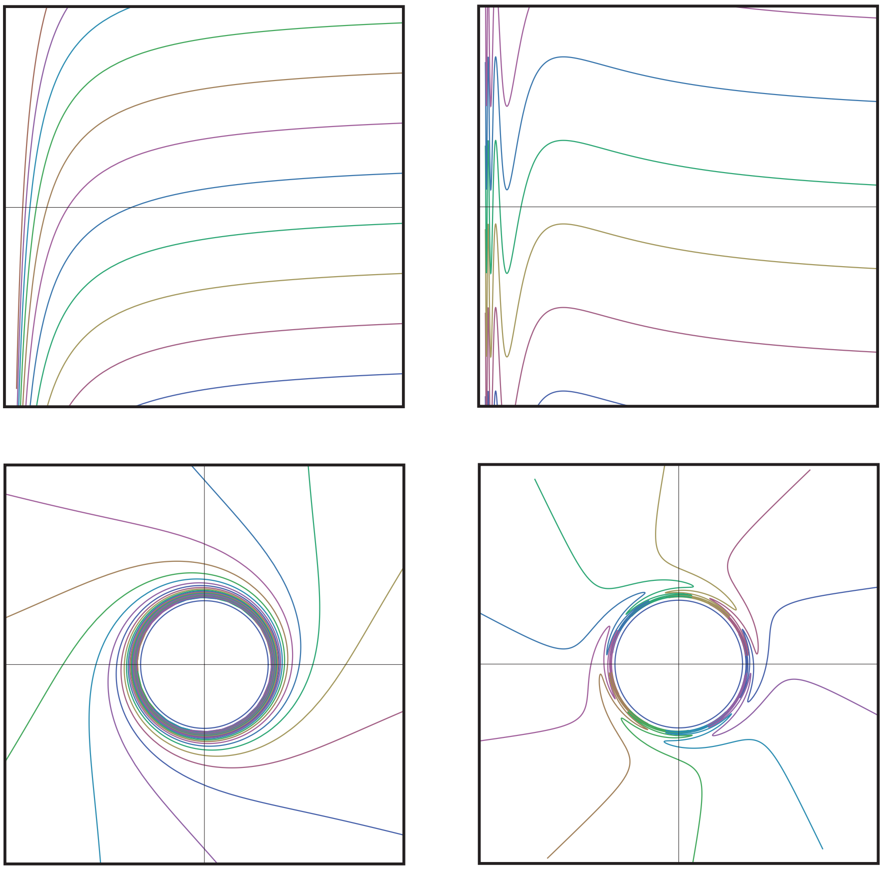


図 5.4: すべての外射線が着陸しない可能性もある？

同様に，図 5.4 の左側は，一見外射線によく似ているが，すべての曲線が単位円板に一様に巻きついている．

外射線も，われわれがコンピュータで描ける精度で一点に収束している（着陸している）ように見えたからといって，安心することはできない．見えない極微の世界で，図 5.4 のような状況が起きてないとも限らないからである．

練習問題.　図 5.4 の左側のような曲線の族を具体的に構成せよ．ヒント：グラフ族 $y=-1/x+t\ (t\in\mathbb{R})$ を考える

着陸しない外射線.　こういった状況は「絵に書いた餅」ではなく，一部の充填ジュリア集合の外射線では実際に起こるのである：

定理 5.3 (ドゥアディ・ソレンセン) 着陸しない外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ （t は無理数）をもつような f_c が存在する．

着陸されない点． 一方，どの外射線の着陸地点にもならない $z \in J_c$ が存在することもある:

定理 5.4 (ドゥアディ・サリバン) 2 次多項式 $f = f_c$ がクレーマー点 α を持つとき，α に着陸する外射線は存在しない．

証明．(定理 5.4，概略) ■

補足：「ほとんど」の外射線は着陸する． じつは「ほどんどすべての」 $t \in \mathbb{T}$ にたいし，外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ は着陸することが知られている．証明はしないが（ミルナーの教科書をみよ．ちょっとした解析学を必要とする），次のような定理がなりたつ：

定理 5.5 (ファトウ・リース・リース) $\mathbb{T}$ と区間 $[0,1)$ をみなすとき，外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ が着陸しないような t からなる集合 $A_c \subset [0,1)$ は長さ 0 の集合である．

ここで「長さ 0 の集合」とは，ルベーグ測度論の意味での零集合をさす．とくに，空集合も含むものとする．たとえば，区間 $[0,1)$ の中の有理数全体は「長さ 0 の無限集合」である．

5.2 周期的な外射線

倍角写像と周期的な外射線． 周期的な外射線は，力学系によって重要な要素である周期点との関係が深い．ここで外射線 $\mathcal{R}(t)$ が周期的であるとは，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，等式

$$f^n(\mathcal{R}(t)) \;=\; \mathcal{R}(t)$$

が集合の意味で成り立つときことをいう．

この場合，$f^n(\mathcal{R}(t)) = \mathcal{R}(2^n t)$ より角度 t は $2^n t \equiv t$ をみたしている．これは，角度 t を 2 倍にする**倍角写像** (angle doubling map)

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ t &\mapsto 2t \mod 1 \end{aligned}$$

にかんして，t が周期 n 以下の「周期角」であることを意味する．したがって，外射線が周期的であるとは，その角度が倍角写像の周期的であることにほかならない．

もうすこし詳しく，角度の周期性について見ておこう．いま t が倍角写像について周期 n であるとき，

$$2^n t \equiv t \mod 1 \iff t = \frac{m}{2^n - 1} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

が成立する．$2^n - 1$ は 2 を因数にもたないから，t を約分して $t = p/q$（p と q は互いに素）の形にした場合，q はかならず奇数となる．すなわち，周期的な外射線は，奇数分母の有理数角をもつ．

より一般に，次の命題が成立する：

命題 5.6 有理数角度 t をもつ外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ は，つぎのように分類される：

(1) 角度 t が奇数分母 $\iff$ 角度 t は周期的 $\iff$ 外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ は周期的

(2) 角度 t が偶数分母 $\iff$ 角度 t は真に周期的 $\iff$ 外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ は真に前周期的

ここで外射線 $\mathcal{R}(t)$ が真に前周期的であるとは，ある自然数 ℓ が存在して，$f^\ell(\mathcal{R}(t))$ は周期的だが，$f^i(\mathcal{R}(t))$ $(0 \leq i \leq \ell - 1)$ は周期的でない場合をいう．

例． $t = 1/28$ （偶数分母）とすれば，倍角写像により

$$\frac{1}{28} \longmapsto \frac{1}{14} \longmapsto \frac{1}{7} \longmapsto \frac{2}{7} \longmapsto \frac{4}{7} \longmapsto \frac{1}{7} \mod 1$$

となり，前周期的である．もちろん，対応する外斜線も前周期的である．

証明． **(命題 5.6)** $t = p/q$ （p と q は互いに素）の形と仮定しよう．一般に $q = 2^m q'$ （$m \geq 0$, q' は奇数）と書けるが，$2^m t = p/q'$ は奇数分母の角度となるので，$m = 0$ の場合，すなわち (1) のみを証明すれば十分である．

$t = p/q'$ のとき，周期的であることを示そう．整数論で基本的なフェルマーの小定理より，$2^n \equiv 1 \mod q'$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する．よって $2^n t = 2^n p/q' \equiv p/q' = t \mod 1$ となる．逆に，周期的であれば奇数分母であることはすでに上で確かめた． ■

有理数角度の外射線は着陸する． さて外射線が着陸するためのひとつの十分条件として，ドゥアディとハバードによる次の定理を証明しよう．

定理 5.7 (有理数角度の外射線) $c \in \mathbb{M}$ のとき，K_c の有理数角度 $t = p/q$ の外射線はかならず着陸する．また，その着陸地点は

- 奇数分母ならば，反発的周期点もしくは放物的周期点
- 偶数分母ならば，前反発的周期点もしくは前放物的周期点（すなわち，f_c を 1 回以上反復してはじめて反発的周期点もしくは放物的周期点に到達する点）

のいずれかである．

こられの点に着陸する外射線の本数は有限個となることもあとで証明する．また，$K=K_c$ には連結性のみが仮定されており，（次章であつかう）局所連結性は仮定されていないことに注意しよう．

証明．（定理 5.7，スケッチ） 着陸可能性は軌道上で保たれるから，奇数分母の場合のみ証明すれば十分である．よって，ある周期 p が存在して，$f^p(\mathcal{R}_c(t))=\mathcal{R}_c(t)$ が成り立つとしてよい．さらに，外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ の集積点全体からなる集合を E とおく．[6]この集合は，次をみたしている：

> **補題 5.8** E は $\partial K=J$ （ジュリア集合）に含まれる連結集合である．

証明． 平面集合に関するよい練習問題である． ■

さていま，適当に $z_0\in\mathcal{R}_c(t)$ を固定すれば，数列 $\{z_n\}\subset\mathcal{R}_c(t)$ を帰納的に関係式 $z_n=f^p(z_{n+1})$ によって定めることができる．このとき，次がなりたつ：

> **補題 5.9** $n\to\infty$ のとき，$|z_{n+1}-z_n|\to 0$．また，任意の $x\in E$ は z_n の集積点である．

証明． この証明には双曲軽量の概念が必要であるから，とりあえずあとまわしにする． ■

この補題より，$z_{n_i}\to x\in E$ となる数列 $n_i\to\infty$ をとると，

$$|f^p(x)-x| \le |f^p(x)-f^p(z_{n_i})|+|z_{n_i+1}-z_{n_i}|+|z_{n_i}-x|$$

をえる．f^p は連続であったから，右辺はいくらでも 0 に近くできる．すなわち $f^p(x)=x$ でなくてはならない．

周期 p 以下の周期点の数は有限個だから，E の連結性より $E=\{x\}$ でなくてはならない．また，x はジュリア集合上にあるから，反発的，放物的周期点か，もしくはクレーマー点である．[7]しかしドュアディ・サリバンの定理（定理 5.4）より，クレーマー点には外射線は着陸しない．

以上で定理が証明された． ■

反発的・放物的周期点は着陸点

> **定理 5.10（ドゥアディ・ヨコツ）** 反発的周期点，放物的周期点には 1 個以上，有限個の外射線が着陸し，その角度はすべて奇数分母の有理数である．

したがって前反発的周期点，前放物的周期点にも必ず外射線が着陸し，その角度は偶数分母である．

[6] どんなに小さくて手の短い小人でも，$\mathcal{R}_c(t)$ 上だけを歩いてタッチできるような点全体．
[7] じつはまだ証明していない..

この定理の証明は非常に難しい．ミルナーもしくはスタインメッツの教科書を参照せよ．

以上ふたつの定理（定理 5.7，定理 5.10）をまとめておこう：

> $c \in \mathbb{M}$ のとき，すなわち充填ジュリア集合 K_c が連結であるとき，外射線が有理数角度であることと，それが反発的もしくは放物的周期点の後方軌道上に着陸することは同値である．

5.3 外射線の安定性

これまではパラメーター c が $\mathbb{M}$ に含まれている場合に限って，充填ジュリア集合の外射線を考えてきた．ここからは，もう少し一般に，c が $\mathbb{M}$ の外にある場合，すなわち充填ジュリア集合がカントール集合になっている場合にも外射線を定義し，その性質をみておこう．とくに最後に述べる有理数角度の外射線がもつ安定性にかんする定理は，あとで $\mathbb{M}$ の構造を記述する上で重要な役割を果たすことになる．

5.3.1 グリーン関数と外射線

外射線の定義（カントール型ジュリア集合の場合） では $c \notin \mathbb{M}$ の場合についても，外射線とその着陸可能性を定義してみよう．この場合もベトヒャー座標 $\phi_c : \hat{B}(R) \to \hat{\mathbb{B}}$（ただし $R = \max\{2, |c|\}$）が定義されるのであった．さらに，関数 $G_c(z) = \log|\phi_c(z)|$ $(G_c(\infty) = \infty)$ は関係式

$$G_c(f_c(z)) \;=\; 2G_c(z)$$

をみたすことから，すべての $z \in \hat{B}_c = \hat{\mathbb{C}} - K_c$ について $f_c^n(z_c) \in \hat{B}_c$ となる自然数 n を選ぶことで

$$G_c(z) \;:=\; \frac{G_c(f_c^n(z))}{2^n}$$

と拡張される．こうして得られる関数 $G_c : \hat{B}_c \to (0, \infty]$ を K_c の**グリーン関数** (Green's function) とよぶのであった．また便宜的に，$z \in K_c$ であれば $G_c(z) = 0$ としておく．

$G_c(z)$ の値が一定であるような部分は，$c \in M$ の場合と同じ意味で「等高線」を定める．実際，$z \in \hat{B}(R)$ では

$$G_c(z) = \rho \iff |\phi_c(z)| = e^\rho \iff z \in \phi_c^{-1}\left(\left\{w \in \hat{\mathbb{B}} \,:\, |w| = e^\rho\right\}\right)$$

だからである．したがって一般に $r > 1$ にたいし，その等高線を

$$\mathcal{E}_c(r) \;:=\; \left\{z \in B_c \,:\, e^{|G_c(z)|} = r\right\}$$

と定義するのは自然であろう．もちろん，$c \in \mathbb{M}$ の場合でも，グリーン関数はまったく同様に定義できるし，このように等高線を定めても同じことである．

さて外射線について考えよう．十分大きな $r_0 > 0$ をとれば,「部分的な外射線」

$$\mathcal{R}_c(t : r_0) \ := \ \phi_c^{-1}\Big(\rho e^{2\pi it} \in \hat{\mathbb{B}} \ : \ r_0 < \rho < \infty\Big)$$

は自然に定義される．この曲線は，等高線の束 $\{\mathcal{E}_c(r)\}_{r>r_0}$ と直交しているから，さらに可能な限り等高線の束 $\{\mathcal{E}_c(r)\}_{1<r<r_0}$ と直交するように延長できるのではないか．実際，延長していくときに不具合が生じるのは 8 の字型の等高線を通過する際，不幸にも 8 の字のくびれ（前方軌道が分岐点に乗ってしまうような点）にぶつかってしまい，直交性が保てなくなった場合のみである．このケースを除けば,「部分的な外射線」はすべての $\mathcal{E}_c(r)$ $(r > 1)$ と直交するように延長できるから，これを「K_c の角度 t の外射線」と呼び，$\mathcal{R}_c(t)$ と表すことにしよう．

破綻角. 「部分的な外射線」を延長していく途中で 8 の字のくびれにぶつかってしまう「不幸な」角度 $t \in \mathbb{T}$ のことを，$c \notin \mathbb{M}$ の**破綻角** (break-up angles) とよぶことにする．

破綻角の全体は次のように特定される．まず，$c \notin \mathbb{M}$ のとき，角度 t_c を $\arg \phi_c(c)/2\pi$ で定めた．これはちょうど，分岐値の座標 $z = c$ に到達する「部分的な外射線」の角度である．この角度 t_c を，パラメーター $c \notin \mathbb{M}$ の**外射角** (external angle) とよぶことにする．破綻角 t とは，倍角写像 $\delta : t \mapsto 2t \mod 1$ によって $\delta^n(t) \equiv t_c$ $(n \geq 1)$ となる角度にほかならない．したがって，破綻角の集合は c に依存して変化する．

カントール型の場合の着陸可能性.

> **命題 5.11** $c \notin \mathbb{M}$ とする．角度 t が破綻角でなければ，外射線 $\mathcal{R}_(t)$ はある $\gamma_c(t) \in K_c = J_c$ に着陸する．

証明. （概略 ）ジュリア集合を取り囲む位相的円板 $U_{u_1 u_2 \cdots u_n}$ サイズは n に応じ一様に小さくなり，1 点に収束する．よって，$\mathcal{R}_c(t)$ が $t \to 1$ で定義され続けるならば,（すなわち破綻角でなければ）「先っちょ」も一様に小さくなり，1 点に収束する． ■

具体例を見ておこう．図 5.5 の左は $c = 0.7$ にたいし，角度 $k/29$ $(k = \pm 0.01, \pm 0.1, 1, 2, \ldots, 28)$ の外射線を描いたものである.（無限の鉢には，グリーン関数の等高線に応じて陰影をつけてある.）この場合破綻角は適当な $n \in \mathbb{N}$ にたいし $2^n t \equiv 0$ となるような t である．実際，$t = 0$ の外射線を「近似しようとした」のが，$k = \pm 0.01, \pm 0.1$ に対応する右側中央から伸びる 4 本の線である．

図 5.5 の右は，ウサギに比較的近い $c = 0.16 + 1.29i$ にたいし，

$$2^n t \in \{1/7, 2/7, 4/7\} \subset \mathbb{T}$$

（ただし $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ）となる角度 t の外射線を描いたものである．外射線が平面を分割していく様子が，ウサギと酷似している．これを説明するのが，次章であつかうポートレート理論である．

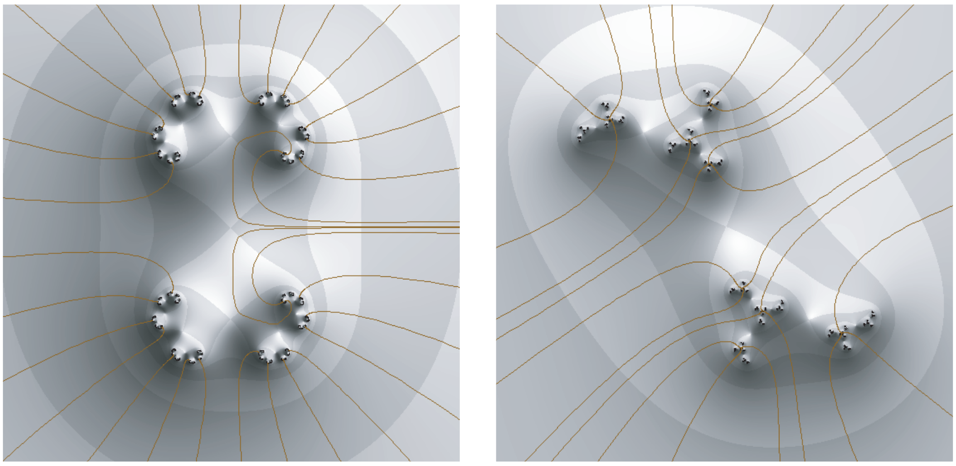


図 5.5: カントール集合の外射線．破綻角をのぞくほとんどの角度で，外射線は収束する．

5.3.2 外射線の安定性

有理数角度 t の外射線は反発的もしくは放物的周期点に着陸した（定理 5.7）．しかしこの性質は，ある $c \in \mathbb{M}$ を固定した上で証明される事実である．もし c の値をわずかに変えると,（専門用語でいえば,「c を摂動 (perturb) させると」），角度 t の外射線が着陸する周期点はもとの周期点とまったくちがった場所や周期をもつかもしれない．そのような可能性を否定し，外射線の連続性（安定性）を保証するのが，次のふたつの定理である．

まず反発的周期点に着陸する外射線は，次のような性質をもつ：

定理 5.12 (反発的周期点と外射線の安定性) パラメーター $c_0 \in \mathbb{C}$ において，角度 t の外射線がある反発的 n-周期点 $z_0 = z(c_0)$ に着陸したとする．このとき，c_0 の十分近くで定義された正則写像 $c \mapsto z(c)$ が存在して,

(1) $z(c)$ は f_c の反発的 p-周期点；かつ

(2) 角度 t の外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ は $z(c)$ に着陸する．

つぎに放物的周期点に着陸する外射線は，次のような「弱い安定性」をもつ：

定理 5.13 (放物的周期点と外射線の安定的摂動) パラメーター $c_0 \in \mathbb{C}$ において，角度 t の外射線がある放物的 n-周期点 $z_0 = z(c_0)$ に着陸したとする．また，その乗数を $e^{2\pi ip/q}$ （p と q は互いに素）としよう．このとき，十分小さな $\epsilon > 0$ にたいし，連続に変化するパラメーター $c(\epsilon) \to c_0$ $(\epsilon \to 0)$ が存在して,

(1) $f_{c(\epsilon)}$ は乗数 $(1+\epsilon)e^{2\pi ip/q}$ の反発的 n-周期点 $z_\epsilon = z(c(\epsilon))$ をもち；かつ

(2) 角度 t の外射線 $\mathcal{R}_{c(\epsilon)}(t)$ は z_ϵ に着陸する．

すなわち「弱い安定性」とは，パラメーターを変化させる際，特定の方向に限って外射線が安定して変化する，という意味である．

証明のアイディア． ふたつの定理の証明はよく似ている．最初にまず，定理 5.12 のアイディアをおおまかに述べておこう．

反発的周期点 $z_0 = f_{c_0}n(z_0)$ が与えられたとき，$f_{c_0}^n$ の作用は拡大的である．すなわち，z_0 のまわりの小円板をひとまわりおおきな円板に写す．逆に，このひとまわり大きな円板（D_0 としよう）からスタートして，局所的に $f_{c_0}^n$ の逆写像 g_{c_0} を考えれば，D_0 はその中の，ひとまわり小さな円板へ写される．この逆写像 g_{c_0} を繰り返して，縮小する円板の列 $g_{c_0}^k(D_0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を考えると，それは $f_{c_0}^n$ の（反発的）固定点 z_0 に収束するのである．

さて c_0 に十分近いパラメーター c をとると，$f_{c_0}^n$ の作用は f_c^n の作用によって好きなだけ近似できる．したがって D_0 上の逆写像 g_c も同様に定義できて，D_0 はやはりその中の，ひとまわり小さい円板へと写される．さらに，縮小する円板の列 $g_c^k(D_0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ はある f_c^n の（反発的）固定点 $z(c)$ に収束する．写像 $c \mapsto z(c)$ が正則であることはチェックが必要だが，以上で反発的周期点の安定性がおおむね説明される．

図 5.6: 反発的周期点と外射線の安定性

つぎに外射線の安定性を考えよう．まず，ベトヒャー座標 $\phi_c : \mathbb{C} - \mathbb{B}(R_c) \to \mathbb{C}$ にたいして，無限遠点の十分近くに限定する限り，逆写像 $\psi_c = \phi_c^{-1}$ が定義できる．しかも，ある $re^{2\pi it}$ (r：十分大) を固定したとき，$c \mapsto \psi_c(re^{2\pi it})$ は正則写像である．(これは自明ではないが，ϕ_c の構成方法から結論できる.)

関係式 $f_c^n(\psi_c(w)) = \psi_c(w^{2^n})$ を用いれば，充填ジュリア集合 K_c の十分近くにおいても，すなわち $r \approx 1$ であっても,「部分的な外射線」 $\mathcal{R}_{c_0}(t; r)$ が定義されている限り，$c \mapsto \psi_c(re^{2\pi it})$ は c_0 に十分近い c にかんして正則に変化する．

さていま，$\psi_{c_0}(re^{2\pi it})$ が先ほどの円板 D_0 に含まれていたとしよう．このとき,「部分的な外射線」 $\mathcal{R}_{c_0}(t; r)$ は逆写像 g_{c_0} に引っ張られるようにして，z_0 にまで延長される．それが全体の $\mathcal{R}_{c_0}(t)$ である．c が c_0 に十分ちかければ，$\psi_c(re^{2\pi it})$ もまた D_0 の中に留まっている．(この部分も自明ではないので，チェックしなければならない．) したがって,「部分的な外射線」 $\mathcal{R}_c(t; r)$ もまた，逆写像 g_c によって全体の $z(c)$ にまで延長されるのである．

定理 5.12 の証明． 上で述べたアイディアは，ほとんど証明になっているのだが，いくつか論理的に補足が必要である．

(a) $z(c)$ が c の正則関数であること．

(b) $\mathcal{R}_c(t:r)$ の端点 $\psi_c(re^{2\pi it})$ が D_0 内にあるとき，$c \approx c_0$ であれば $\mathcal{R}_c(t:r)$ の端点 $\psi_c(re^{2\pi it})$ も定義でき，かつ D_0 内にあること．

それぞれチェックしていこう．まず反発的周期点 z_0 は，方程式 $f_{c_0}^n(z) = z$ の解であった．その乗数を $\lambda_0 = (f_{c_0}^n)'(z_0)$ とする．一般に $F(c,z) = f_c^n(z) - z$ という 2 変数の関数を考えると，この関数は (c_0, z_0) において $F(c_0, z_0) = 0$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial z}(c_0, z_0) = (f_{c_0}^n)'(z_0) - 1 \neq 0$ をみたす（反発的周期点であることがここで使われている）．したがって陰関数の定理の仮定をみたすから，c_0 中心の十分小さな円板上で定義定義された正則写像 $c \mapsto z(c)$ が存在して，$F(c, z(c)) = 0$ をみたす．このとき，$z(c)$ は $f_c^n(z(c)) = z(c)$ をみたす周期 n の周期点であり，そこでの乗数 $\lambda(c) = (f_c^n)'(z(c))$ は $\lambda_0 = (f_{c_0}^n)'(z_0)$ に十分近いので，やはり絶対値が 1 より大きいとしてよい．以上で，(a) が正当化された．

次に (b) を正当化しよう．仮定から，$\mathcal{R}_{c_0}(t)$ は反発的周期点 $z_0 = z(c_0)$ に着陸する．とくに，十分に小さな $r_0 > 1$ を固定して，外射線上の点 $\psi_{c_0}(re^{2\pi it})$ は $r \leq r_0$ であればすべて先ほどの円板 D_0 に含まれているとよう．

まず $c_0 \notin \mathbb{M}$ のとき．$\mathcal{R}_{c_0}(t)$ が定義できているという事実から，t は c_0 の破綻角ではない．すなわち，すべての自然数 n について，$2^n t \neq t(c_0)$ がなりたつ．実際は t は有理数角であったから，結局ある有限個の角 $2t, \cdots, 2^p t = t$ （p は t の角周期）がすべて c_0 の外射角 $t(c_0)$ でない，ということになる．さて c を c_0 の十分近くで変化させた場合，外射角 $t(c)$ は連続に変化するので，うえの p 個の角 $2t, 2^2 t, \cdots, 2^p t = t$ とぶつからない．すなわち，t はこのような c については破綻角とならないので，外射線 $\mathcal{R}_c(t)$ が定義される．外射線上の点 $\psi_c(re^{2\pi it})$ は c について連続（正則）に変化するので，外射線上の $\sqrt{r_0} \leq r \leq r_0$ に対応する部分はすべて先ほどの円板 D_0 に含まれているとしてよい．

つぎに $c_0 \in \mathbb{M}$ のとき，そのまわりの十分小さな円板 V_0 を選んで，$c \in V_0 - \mathbb{M}$ であれば $|\Phi(c)| = |\phi_c(c)| < \sqrt{r_0}$ となるようにできる．[8] このとき，$\phi_c^{-1} = \psi_c$ は少なくとも $\mathbb{B}(\sqrt{r_0})$ で定義されており，c が $\mathbb{M}$ にあるかどうかに関わらず，$r \geq \sqrt{r_0}$ であれば $\psi_c(re^{2\pi it})$ は c について連続（正則）に変化する．とくに，$\sqrt{r_0} \leq r \leq r_0$ に対応する部分はすべて先ほどの円板 D_0 に含まれているとしてよい．

あとは上の「スケッチ」の議論によって，$\mathcal{R}_c(t)$ が反発的周期点 $z(c)$ に着陸することがわかる．以上で定理 5.12 が示された． ■

定理 5.13 の証明（スケッチ）． 放物的周期点を扱うにはかなり慎重に計算をすすめないといけないので，ここでは簡単なスケッチのみを記しておく．興味のある方はぜひ，オルセー・ノートやミルナーの論文を参照していただきたい．

まず，定理の (1) は次のように示される：もし $\lambda(c_0) := e^{2\pi ip/q} \neq 1$ であれば，反発的周期点のときと同様の議論によって $c \approx c_0$ において n-周期点 $z(c)$ が存在して $z(c) \to z(c_0)$ を満たす．とくに，$(f_c^n)'(z(c))$ は c の正則関数なので，$\lambda(c) := (f_c^n)'(z(c))$ を展開すると $\lambda(c) = e^{2\pi ip/q} + (c - c_0)^m + \cdots \approx e^{2\pi ip/q} + (c - c_0)^m$ の形となる．（実際は $m = 1$ となることが知られている．）すなわち，この写像は $c = c_0$ 中心の十分小さな円板を，「λ

[8] すなわち，$V_0 \subset \mathbb{C} - \Phi^{-1}(\{|w| \leq \sqrt{r_0}\})$ となるように選べばよい．

平面」の，$e^{2\pi ip/q}$ 中心の小さな円板へ m 重に「ほぼ」写す．この「ほぼ」にあたる誤差部分がないとすれば，十分小さな正の数 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ で表現される「λ 平面」上の曲線 $\left\{(1+\epsilon)e^{2\pi ip/q}\right\}$ の写像 $c \mapsto \lambda(c)$ による逆像として，連続に変化するパラメーターの $c(\epsilon)$ を選ぶことができる．じつは誤差部分があっても，そのような $c(\epsilon)$ が存在することが示される．

さて $\lambda(c_0) = 1$ のときは若干難しい．このとき，z_0 の放物的周期点としての重複度は 2 となることが示される.（もし 1-花弁でなければ，2 つ以上の分岐点が放物的吸引鉢に存在しなければならない．これは 2 次多項式という仮定に反する.）このときは，$c - c_0 = u^2$ となるように複素数のパラメーター u をとると，ちょうど z_0 は，$u = 0$ のまわりで正則に変化するふたつの n-周期点 $\alpha(u)$ と $\beta(u)$ が $u = 0$ で偶然交差したかのように見える．たとえば $\alpha(u)$ のほうで上と同様の議論をすれば，連続するパラメーター $u(\epsilon)$ で $\alpha(u(\epsilon))$ の乗数が $1+\epsilon$ となるものが見つかるので，それを用いて $c(\epsilon) = c_0 + u(\epsilon)^2$ とし，$z_\epsilon = z(c(\epsilon)) = \alpha(u(\epsilon))$ すればよい．

つぎに (2) である．反発的周期点のときと同様に，$0 \le \epsilon \le \epsilon_0$ のとき，$f^n_{c(\epsilon)}$ は，z_ϵ を固定する逆写像 g_ϵ をもつ．

$z = z_0$ のまわりで適当な局所座標（等角写像）$\zeta = h_0(z)$ を選ぶと，

$$G_0(\zeta) := h_0 \circ g_0^n \circ h_0^{-1}(\zeta) \ = \ e^{2\pi ip/q}\zeta(1 - \zeta^q + O(\zeta^{q+1}))$$

の形に変形できることが知られている.（もちろん，$0 = h_0(z_0)$.）さらに $z = z_\epsilon$ についても，適当な局所座標 $\zeta = h_\epsilon(z)$ で $\epsilon \to 0$ のとき一様に $h_\epsilon(z) \to h(z)$ となるものが存在して，

$$G_\epsilon(\zeta) := h_\epsilon \circ g_\epsilon \circ h_\epsilon^{-1}(\zeta) \ = \ e^{2\pi ip/q}\zeta(1 - \epsilon - \zeta^q + O(\zeta^{q+1}))$$

となるように取ることができる．

さて十分小さな $\rho > 0$ を固定し，

$$E_0 \ := \ \{\zeta \,:\, 0 < |\zeta| < \rho, \ |\arg \zeta^q| < \pi/3\}$$

とおく．このとき $\overline{G_0(E_0)} \subset E_0 \cup \{0\}$ がなりたつから，E_0 の点はすべて G_0 の反復により原点（z_0 に対応する）に収束する．

さらに

$$E_\epsilon \ := \ E \cup \left\{\zeta \,:\, |\zeta| < \epsilon^{2/(2q-1)}\right\}$$

とすれば,（必要なら ρ を小さく取り直すことで）$\overline{G_\epsilon(E_\epsilon)} \subset E_\epsilon$ とできる．このことから，E_ϵ の点はすべて G_ϵ の反復により原点（z_ϵ に対応する）に収束する．

図 5.7: 放物的周期点の安定な摂動

さて外射線 $\mathcal{R}_{c(0)}(t)$ である．放物的周期点の局所的な力学系を観察すれば，ある r_0 が存在して，外射線上の点 $\psi_{c(0)}(re^{2\pi it})$ の $1 < r \le r_0$ の部分はすべて ζ-座標を用いて記述される集合 $E_0' = h_0^{-1}(E_0)$ 内に含まれるとしてよい．

いま，E_0' をふくむ十分ゆとりのある集合上で，局所座標について $h_\epsilon \to h_0$ が成り立つとしてよい．したがって反発的周期点の場合と同様の議論により，外射線 $\mathcal{R}_{c(\epsilon)}(t)$ の $\sqrt{r_0} \le r \le r_0$ の部分はすべて定義でき，しかも $E_\epsilon' = h_\epsilon^{-1}(E_\epsilon)$ 内に含まれるとしてよい．ζ-座標でみると，外射線のこの部分に対応する曲線は原点まで「引っ張られるように」延長され，着陸する．すなわち，$\mathcal{R}_{c(\epsilon)}(t)$ は z_ϵ に着陸する． ■

定理 5.13 と逆方向の安定性.

定理 5.13 とほぼ同様の議論により，次の定理も証明される：

定理 5.14 (放物的周期点と外射線の安定的摂動，その 2) 定理 5.13 の仮定のもと，同じく十分小さな $\epsilon > 0$ にたいし，連続に変化するパラメーター $c(\epsilon) \to c_0$ $(\epsilon \to 0)$ が存在して，

(1) $f_{c(\epsilon)}$ は乗数 $(1-\epsilon)e^{2\pi i p/q}$ の吸引的 n-周期点 $z_\epsilon = z(c(\epsilon))$ をもち；

(2) $f_{c(\epsilon)}$ は z_ϵ の近くに反発的 nq-周期点を q 個もち；さらに

(3) 角度 t の外射線 $\mathcal{R}_{c(\epsilon)}(t)$ は上の q 個の反発的周期点のうちいずれかに着陸する．

証明は練習問題としよう．

第6章　外射線の理論（後編）：マンデルブロー集合

前章の結果を踏まえて，マンデルブロー集合の外射線について調べていこう．かつてドゥアディは,

> *You first plow in the dynamical plane, and then harvest in the parameter plane.*

とのべた．すなわち,「力学系の平面で耕し，パラメーター平面で収穫すべし」．この言葉をモットーに，マンデルブロー集合の「こぶ」が生成される仕組みを記述するのが本章の目標である．

マンデルブロー集合の外射線・等高線． 詳細な議論にはいる前に，この章の主定理を述べておく．その証明を与える過程で，マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ の諸性質が明らかになる，という流れで話をすすめたい．

まず $\mathbb{M}$ の連結性を示すのにつかった，等角写像 $\Phi : \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M} \to \hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$ を思い出そう．この写像をもちいて，角度 $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ にたいし，マンデルブロー集合の外射線を

$$\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t) \ = \ \Phi^{-1}\Big(\Big\{re^{2\pi it} \in \hat{\mathbb{B}} \ : \ 1 < r \leq +\infty\Big\}\Big)$$

により定める．また，$R > 1$ にたいし，マンデルブロー集合の等高線を

$$\mathcal{E}_{\mathbb{M}}(R) \ = \ \Phi^{-1}\Big(\Big\{w \in \hat{\mathbb{B}} \ : \ |w| = R\Big\}\Big)$$

により定める．

以降の議論では，実際に力学系のある世界と，$\mathbb{M}$ の棲むパラメーターの世界をまたいで，同時並行的に話が進んでいく．これらを明解に区別するために，いくつか便利な用語を導入しておこう．

まず，与えられた $c \in \mathbb{C}$ にたいして，その充填ジュリア集合 $K = K_c$ の外射線を **K-線** (K-ray, or dynamic ray) と呼び，マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ の外射線は **$\mathbb{M}$-線** ($\mathbb{M}$-ray, or paremeter ray) と呼ぶ．たとえば同じ角度 t でも，$\mathcal{R}_c(t)$ は角度 t の K-線，$\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t)$ は角度 t の $\mathbb{M}$-線と使い分ける．

放物的パラメーターと前周期的パラメーター． パラメーター c が定める f_c の力学系が放物的周期点をもつとき，c を**放物的（パラメーター）**(parabolic parameter) と呼ぶ．

また，パラメーター c が定める f_c の力学系において，c の軌道が真に前周期的であるとき,（すなわち c 自身は周期的でないが，ある $f_c^l(c)$ $(l \geq 1)$ が周期的であるとき）c

を**前周期的（パラメーター）**(preperiodic parameter) と呼ぶ．これらはミシュレヴィッチ・パラメーター (Misiurewicz parameter) とよばれるのが普通だが，過剰なカタカナ表記を避けるために，便宜的に「前周期的」という名称を用いることにする．

ドゥアディ・ハバードの着陸定理． これからの目標は，ドゥアディとハバードによる次の定理を示すことである：

> **定理 6.1 (有理数角度の $\mathbb{M}$-線)** 角度 t は閉区間 $[0,1]$ に含まれるが有理数角とする．このとき，$\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t)$ は $\mathbb{M}$ に着陸する．さらに詳しく，
>
> (P1) t が周期的なとき，$\mathbb{M}$-線 $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t)$ の着陸点 $c = c(t)$ は放物的パラメーターである．
>
> (P2) 逆に，任意の放物的パラメーターには，ちょうど 2 本の $\mathbb{M}$-線が着陸する．[1]
>
> (M1) t が真に前周期的なとき，$\mathbb{M}$-線 $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t)$ の着陸点 $c = c(t)$ は前周期的パラメーターである．
>
> (M2) 逆に，$c \in \mathbb{M}$ が前周期的であるとき，c にはある前周期的な角度 t の $\mathbb{M}$-線が着陸する．また，そのような t の集合は，c に着陸する K-線の角度全体の集合と一致する．

図 6.1: 有理数角度の $\mathbb{M}$-線は着陸する．

以下では，ミルナーおよびシュライヒャーによるふたつの論文[2] をベースにして，上の定理を証明しよう．まず直感的でわかりやすいミルナーの「ポートレート理論」による方法を概説し，マンデルブロー集合の「こぶ」と放物的パラメーターの関係を記述する．その部分的結論として，(P1) および (P2) が証明される．次にシュライヒャーによる議論を活用して，(M1) および (M2) を証明する．ドゥアディ・ハバードによるオリジナルの証明にくらべ解析的な道具は最低限に抑えられているので，大学生 2 年生程度の数学力があれば議論を追うことができるであろう．（もちろん，それなりの根気が必要だが，根気も数学力の一部である．）

6.1 ポートレート理論と主定理の証明

ポートレート理論の要点は，以下のようにまとめることができる．

- 「ポートレート」と呼ばれる，特定の性質をもつ周期的角度の組（族）を考える．たとえば，ひとつのポートレートに含まれる角度はすべて共通の周期をもつ．

[2] J. Milnor. Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set: An expository account, および D. Schleicher. Rational external rays of the Mandelbrot set. ともに *Asterisque* **261** (2000) に収録されている．

- すべてのポートレート $\mathcal{P}$ は，放物的パラメーター $c(\mathcal{P}) \in \mathbb{M}$ をひとつ定める．
- さらに $c(\mathcal{P})$ には（少なくとも）2 本の $\mathbb{M}$-線が着陸し，その角度は $\mathcal{P}$ に含まれる「特性角」と呼ばれるふたつの角度である．
- 逆に，放物的パラメーター $c \in \mathbb{M}$ はポートレート $\mathcal{P}(c)$ をひとつ定める．
- ポートレート $\mathcal{P}(c)$ 内の角度がもつ共通の周期がちょうど n となる放物的パラメーター c の数は，倍角写像についてちょうど周期 n となる角度の数の半分である．このことから，ポートレートと放物的パラメーターは 1 対 1 で対応し，任意の放物的パラメーターにはちょうど 2 本の $\mathbb{M}$-線が着陸することが結論される．
- とくに，放物的パラメーターは $\mathbb{M}$ の双曲成分（「こぶ」）のつけ根に対応する．双曲成分には,「プリミティブ」と「サテライト」の 2 種類がある．

ではさっそく,「ポートレート」とは何かみていこう．

6.1.1 反発的・放物的周期点のポートレート

型とポートレート． まず，$c \in \mathbb{C}$ を固定し，$f = f_c$ の充填ジュリア集合 $K = K_c$ とそのジュリア集合 $J = J_c = \partial K_c$ を考える．$z \in J$ にたいし，この点に着陸するような外射線の角度 $t \in \mathbb{T}$ 全体からなる集合を z の**型** (type) とよび，$A(z)$ と表す．[3]もし c への依存性を強調したい場合は，$A_c(z)$ とも表すことにしよう．

たとえば，$c = -1$ のとき，角度 1/3 と 2/3 の外射線は同じ固定点 $\alpha(= (1-\sqrt{5})/2)$ に着陸し，それ以外の角度の外射線は着陸しないことが知られているので，

$$A(\alpha) \;=\; \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} \;\subset\; \mathbb{T}$$

が成り立つ．一方，f_{-1} のもうひとつの固定点 $\beta(= (1+\sqrt{5})/2)$ には角度 0 の外射線しか着陸しないことが知られているので,

$$A(\beta) \;=\; \{0\} \;\subset\; \mathbb{T}$$

となる．

さてこれから，f の n-周期点の軌道

$$\mathcal{O} \;:=\; \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

を考える．このとき，対応する型を組にした

$$\{A(\alpha_1), \ldots, A(\alpha_n)\}$$

[3] この A は Angle の A である．

を周期軌道 $\mathcal{O}$ の**ポートレート** (portrait) とよび，$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$ で表す．

いくつか例を挙げよう．

例 1（単位円・カリフラワー）． $c = 0$ のとき，$\mathcal{R}_c(0)$ のみが固定点 $\gamma_c(0)(= 1)$ に着陸する．したがって $A(\gamma_c(0)) = \{0\}$．さらに軌道 $\mathcal{O} = \{\gamma_c(0)\}$ のポートレートは $\mathcal{A} = \{\{0\}\}$ となる．$c = 1/4$ のときも，$\mathcal{R}_c(0)$ のみが固定点 $\gamma_c(0)(= 1/2)$ に着陸するので同じポートレートとなる．

例 2（バジリカ）． $c = -1$ のとき，固定点 $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/2$ には $\mathcal{R}_c(1/3)$ と $\mathcal{R}_c(2/3)$ のみが着陸する．すなわち，

$$\alpha \ = \ \gamma_c(1/3) \ = \ \gamma_c(2/3).$$

したがって，$A(\alpha) = \{2/3, 2/3\}$．さらに軌道 $\mathcal{O} = \{\alpha\}$ のポートレートは $\mathcal{A} = \{\{2/3, 2/3\}\}$ となる．

例 3（飛行機）． $c \approx -1.75488$（飛行機）では，

$$(\alpha := \ ) \ \gamma_c(1/7) \ = \ \gamma_c(6/7) \ \approx \ 1.2826.$$

が成り立つ．この点は周期 3 の反発的周期点であり，

$$f(\alpha) \ = \ \gamma_c(2/7) \ = \ \gamma_c(5/7).$$

かつ

$$f^2(\alpha) \ = \ \gamma_c(4/7) \ = \ \gamma_c(3/7).$$

をみたす．この場合，周期軌道 $\mathcal{O} = \{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha)\}$ のポートレートは

$$\mathcal{A} \ = \ \left\{\left\{\frac{1}{7}, \ \frac{6}{7}\right\}, \ \left\{\frac{2}{7}, \ \frac{5}{7}\right\}, \ \left\{\frac{4}{7}, \ \frac{3}{7}\right\}\right\}.$$

図 6.2: 飛行機の軌道 $\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha)\}$ $(\alpha \approx 1.2826)$ ポートレート．

例 5． 最後に，乗数 $e^{2\pi i/3}$ の放物的 2-周期点をもつような f_c を考えよう．このような c の値は $e^{2\pi i/3} = 4(1 + c)$ で一意的に与えられるのであった（前章の定理 4.24 参照）．

この 2 周期軌道に対応するポートレートは，

$$\mathcal{A} \ = \ \left\{\left\{\frac{11}{63}, \ \frac{44}{63}, \ \frac{50}{63}\right\}, \ \left\{\frac{22}{63}, \ \frac{25}{63}, \frac{37}{63}\right\}\right\}$$

となることが知られている．

図 6.3: ある周期 2 の放物的周期点のポートレート．

6.1.2 ポートレートの基本性質と実現定理

以下では，ある $c \in \mathbb{C}$ とその周期系 $\mathcal{O} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ を固定する．また，すくなくともひとつの $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が存在して，$\mathcal{R}_c(t)$ が $\mathcal{O}$ のいずれかの点に着陸しているものとする．すなわち，$A_i := A(z_i)$ とするとき，ポートレート

$$\mathcal{A} \;=\; \{A_1, \ldots, A_n\}$$

は空でない．[4]

基本性質.

命題 6.2 (ポートレートの基本性質) 上の条件のもと，次が成り立つ：

(1) 各 A_i はすべて有限個の有理数からなる．

(2) 任意の i にたいし，倍角写像 $\delta : t \mapsto 2t$ は A_j を A_{i+1} に全単射で写す．とくに，角度の順番を保つ．[5]

(3) $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ の任意の元は倍角写像で周期的である．さらにその周期は共通で，n の倍数である．

(4) 各 A_i は互いに交差しない．すなわち，$A_i \neq A_j$ であれば，A_i は $\mathbb{T} - A_j$ のあるひとつの区間に含まれる．

証明. 仮定より，ある A_i には有理数角度（すなわち前周期的角度）が含まれている．したがって倍角写像を何度か反復すれば，ある A_j は周期的な角度 t_0 を含むことがわかる．その角周期を n とする．すなわち，$2^n t_0 \equiv t_0$ としよう．命題 5.2 より，倍角写像の n 回反復 $\delta^n : A_j \to A_j$ は全単射であり，角度の順番をたもっている．

もし， δ^n で固定されない角度 t が A_j の中に存在したと仮定しよう．このとき，$t_0 < t < \delta^n(t) < t_0 + 1$ もしくは $t_0 < \delta^n(t) < t < t_0 + 1$ が成り立つとしてよい．前者の場合，δ^n が t_0 を固定し角度の順番を保つことから $t_0 = \delta^n(t_0) < \delta^n(t) < \delta^{2n}(t) < t_0 + 1$ がなりたつ．同様にして

$$t_0 < t < \delta^n(t) < \delta^{2n}(t) < \delta^{3n}(t) < \cdots < t_0 + 1$$

が成立する．よって数列 $\delta^{kn}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ は単調増加かつ有界であり，極限 s をもつ．これは

$$|s - \delta^{kn}(t)| > |s - \delta^{(k+1)n}(t)| \to 0 \ (k \to \infty)$$

を意味するが，一方で $\delta^n(t) = 2^n t$ であるから，

$$|s - \delta^{(k+1)n}(t)| = |\delta^n(s) - \delta^n(\delta^{kn}(t)))| = 2^n |s - \delta^{kn}(t)|$$

[4] 以下，周期点とその型にたいする添え字は，mod n で考える．すなわち，$z_{n+1} = z_1$, $A_{5n+3} = A_3$ など．

となり，矛盾である．$t_0 < \delta^n(t) < t < t_0 + 1$ の場合も同様に矛盾が生じ，結局 $\delta^n : A_j \to A_j$ は全ての元を固定する（すなわち恒等写像である）ことがわかった．

いま $\delta^n(t) = 2^n t \equiv t$ をみたす角度は $t = \frac{m}{2^n - 1}$ $(m \in \mathbb{Z})$ の形の有理数であり，$\mathbb{T}$ の有限集合となる．したがって，A_j は共通の周期 n をもつ有限集合である．再び命題 5.2 より，他の A_i も A_j と同じ性質をもつことがわかる．以上で (1),(2),(3) が示された．

(4) を示そう．z_i と A_i に属する角度の外射線の和集合によって $\mathbb{C}$ を分割すると，外射線同士が互いに交差しないことから，他の z_j $(i \neq j)$ と A_j に属する角度の外射線はこの分割された領域のひとつに完全に含まれなくてはならない．したがって (4) がなりたつ． ■

形式的ポートレート． ここで，命題 6.2 の (1)—(4) をみたすような $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_p\}$ を**形式的ポートレート** (formal orbit portrait) とよぶことにしよう．当面は，このポートレートがどの周期軌道に由来するかは考えないことにして，その性質を調べることにする．

じつは，いかなる形式的ポートレート $\mathcal{P}$ にたいしても，適当な $f = f_c$ とその周期系 $\mathcal{O}$ が存在して，$\mathcal{P} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$ を満たすことが証明される．逆にいえば，形式的ポートレートが満たす（解析性とはあまり縁のない）組み合わせ的な性質が，2 次多項式の力学系に強く影響していることがわかるのである．

価数と補弧. 与えられた形式的ポートレート $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_p\}$ にたいし，各 A_i に含まれる角度の個数は i によらず一定である（基本性質 (2)）．この数を $\mathcal{P}$ の**価数** (valence) とよび，これを $\mathrm{val}(\mathcal{P})$ と表す．以下，$v := \mathrm{val}(\mathcal{P}) \geq 1$ とする．

さて角度の集合 $\mathbb{T}$ は写像

$$\mathbb{T} \ni t \quad \longmapsto \quad e^{2\pi i t} \in \mathbb{J} \;=\; \{|z| = 1\}$$

によって単位円 $\mathbb{J}$ の別名だと思うこともできる．その意味で，各 A_i は円 $\mathbb{T}$ を v 個の弧（円弧）に分割しているとも考えられる．$\mathbb{T} - A_i$ を構成する v 個の円弧たちをそれぞれ A_i の**補弧** (ほこ，complementary arc) と呼ぶことにしよう．[6]

また，補弧 $I \subset \mathbb{T}$ の**長さ** (length) を，角度の集合としての長さとして定義し，$|I|$ で表すことにしよう．[7]

分岐弧と分岐値弧．

A_i $(i = 1, \cdots, p)$ の補弧の中で最大の長さを持つものを**分岐弧** (critical arc) とよぶ．

> **命題 6.3** A_i の分岐弧 C の長さは $1/2$ より大きい．また，A_i の分岐弧以外の補弧は，倍角写像により A_{i+1} のある補弧へ全単射に写る．一方，C の倍角写像による像は $\mathbb{T}$ をひとまわり以上覆い，その重なった部分もまた A_{i+1} のひとつの補弧をなす．

[6]「補集合」と同じノリでつけた訳．
[7]補弧は角度の集合 $\mathbb{T}$ の開区間と考える．(端点を加えても長さは替わらないが.)

証明. まず A_i の補弧で，長さがちょうど 1/2 のものが存在したとすると，その端点の倍角写像による像は同一の点になる．これは，A_i の元が A_{i+1} の元に全単射に写っていないことを意味するから，基本性質 (2) に矛盾する．したがって，補弧の長さは 1/2 より大きいか小さいかである．もし 1/2 より大きければ，自動的にひとつしか存在しえないので，それが分岐弧 C となる．

実際，長さが 1/2 より大きい補弧が存在することを示そう．A_i の補弧で，長さが 1/2 未満のもの I をひとつ固定しよう．このとき，$\delta(I)$ は長さ $2|I|$ の A_{i+1} の補弧であり，その端点は A_{i+1} の元である．倍角写像は A_i たちの順番を保つから（基本性質 (2)），$\delta(I)$ の中に他の A_{i+1} の補弧が含まれることはない．したがって，他に長さが 1/2 未満の A_i の補弧 I' があっても，$\delta(I)$ と $\delta(I')$ は互いに交わらない．すなわち，長さ 1/2 未満の補弧全体を δ で写しても，トータルの長さは 1 以下になってしまう．補弧全体の像の長さはトータルの長さ 2 であるから，A_i の補弧の中にはひとつだけ長さ 1/2 以上の補弧が存在しなくてはならない．これが分岐弧 C である． ■

A_i の分岐弧 $C = C_i$ の δ による像が重なり合う部分（1 対 1 とならない部分）は A_{i+1} の補弧のひとつである．これを A_{i+1} の**分岐値弧** (critical value sector) とよび，V_{i+1} と表す.（図 6.4 も参照せよ.）

特性弧 形式的ポートレート $\mathcal{P} = \{A_1, \cdots, A_p\}$ を本質的に決定しているのが，次のようにして定まる「特性弧」とよばれる補弧である：

> **命題 6.4 (特性弧)** $A_1, \cdots, A_p$ が生成する補弧の中で，最小の長さのものがただひとつ存在し，それはある A_j の分岐値弧 V_j である．しかも，他の分岐値弧はかならずこれを含む．すなわち，ある $j \in \{1, \ldots p\}$ が存在して，$|V_j| < |V_i|$ かつ $V_j \subset V_j$ $(i \neq i_0)$.

この V_{i_0} を形式的ポートレート $\mathcal{P}$ の**特性弧** (characterisic arc) とよび，$I_{\mathcal{P}}$ で表す．また，特性弧の端点にあたるふたつの角度を，**特性角** (characterisic angle) とよぶ.

証明. (命題 6.4) $A_1, \cdots, A_p$ が生成する有限個の補弧の中から，最小の長さ ℓ をもつもの（現時点ではふたつ以上あるかもしれない）$V \subset \mathbb{T} - A_j$ をひとつ選ぶことができる．もしそれが分岐値弧でないとすると，倍角写像によって $\delta(I) = V$ となる A_{j-1} の補弧 I が存在し，長さは $\ell/2$ となり V より短くなってしまう．これは矛盾である．したがって，A_{j-1} の分岐弧 $C = C_{j-1}$ が存在して，$\delta(C)$ が 2 重におおう部分が $V = V_j$ となる．さてこの補弧の中には $\mathcal{P}$ を構成するいかなる角度（すなわち $\bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i$ の元）も含まれない．実際，もし含まれるならば，ポートレートの基本性質 (4) よりある A_k がまるごと含まれていなければならず，$|V|$ の最小性に反するからである．したがって，$\delta^{-1}(V) \subset C$ にも $\mathcal{P}$ の角は含まれない．ここで $\delta^{-1}(V)$ はふたつの連結成分 I と $I' = I + 1/2$ にわかれていて，それぞれ長さが $\ell/2$ であるから，$|C| = (|\mathbb{T}| + |V|)/2 = (1 + \ell)/2$ であることに注意すると $|C - I \cup I'| = (1 - \ell)/2$ である.

以上を踏まえて，$k \neq j$ （正確には $k \equiv j \mod p$ ）としたとき，A_k の分岐値弧が $V = V_j$ を含むことを示そう．基本性質 (4) より，A_{k-1} は C もしくは $\mathbb{T} - C$ のいずれ

かにまるごと含まれる．前者の場合は，先ほどの考察より長さ $(1-\ell)/2 < 1/2$ の区間 $C - I \cup I'$ に含まれる．後者の場合も，長さはちょうど $|\mathbb{T}-C| = 1-(1+\ell)/2 = (1-\ell)/2$ となることに注意しよう．

命題 6.3 より A_{k-1} の分岐弧 C_{k-1} の長さは 1/2 より大きい．C_{k-1} の端点は A_{k-1} の角であり $C - I \cup I'$ もしくは $\mathbb{T} - C$ に含まれるから，A_{k-1} の補弧はこの分岐弧 C_{k-1} を除いてすべてが $C - I \cup I'$ もしくは $\mathbb{T} - C$ に含まれることになる．その倍角写像による像は

$$\delta(C - I \cup I') \ = \ \delta(C - I \cup I') \ = \ \mathbb{T} - V$$

に含まれるから，C_{k-1} の像は V を真に含む区間を 2 重に覆っている．(図 6.4 をみよ.) すなわち，V_k は V 全体を真に含むことが示された．

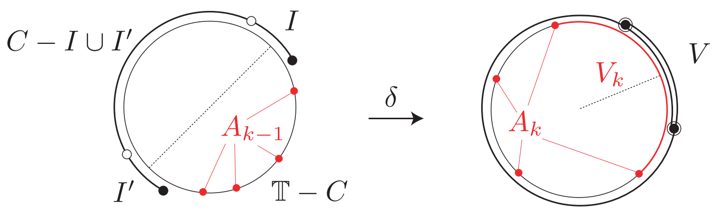


図 6.4: 左の黒い端点をもつ区間を分岐弧 C とすれば，倍角写像による像 $\delta(V)$ は分岐値弧 V の部分だけを 2 重におおう．図では $A_{k-1} \subset \mathbb{T}-C$ の場合を表しており，A_k の分岐値弧 V_K は V を含む．

もし V 以外にも最小の長さ ℓ をもつものがあれば，同じ議論によりそれはある分岐値弧 V_k となるが，これは V_k が V を含むという事実に反する．よって，最小の長さをもつ V はただひとつだけである． ■

プリミティブとサテライト． 形式的ポートレート $\mathcal{P} = \{A_1, \cdots, A_p\}$ において価数が $v \geq 2$ となることを仮定しよう．いま，$\mathcal{P}$ は計 vp 個の周期的な角度から構成されていることに注意しよう．しかも基本性質 (3) より，ある共通の，p の倍数周期 n をもつのであった．

じつは，その周期には次のような二通りの可能性しかない：

命題 6.5 $\mathcal{P}$ を価数 v が 2 以上の形式的ポートレートとする．このとき，次のいずれかが成り立つ．

- **プリミティブ：** $\mathcal{P}$ 内の角度はすべて周期 p かつ $v = 2$．とくに，$\mathcal{P}$ 内の角度はふたつの周期系に分かれる．
- **サテライト：** $\mathcal{P}$ 内の角度はすべて周期 vp．とくに，$\mathcal{P}$ 内の角度はすべてひとつの周期系に属する．

この「プリミティブ」（原始的，基本的）と「サテライト」（付随的）という言葉の意味は，少しあとで正当化されるであろう．

証明. **(命題 6.5)** $\mathcal{P}$ の角度に共通の周期 n は p の倍数であるから，$n = rp$ とおいてよい．$\mathcal{P}$ に含まれる角度の数は vp であるから，$\mathcal{P}$ に含まれる角度の周期系の数は $vp/rp = v/r \geq 1$ となる．

いま，$v/r > 1$ および $v \geq 3$ と仮定する．また，$I_\mathcal{P}$ を特性弧とする．命題 6.4 より，これはある A_i の分岐値弧 V_i と一致するのであった．さて A_i の補弧の中で，$I_\mathcal{P}$ の左どなり（反時計まわり方向）にあるものを I_-，右どなりにあるものを I_+ とする．($v \geq 3$ を仮定しているので，A_i の補弧は 3 つ以上ある．したがって，$I_- \neq I_+$ である.）

ここで $|I_+| \leq |I_-|$ と仮定してみよう．(以後，$|I_-| \leq |I_+|$ の場合もまったく同様である.）このとき，ある m とある A_j の分岐値弧 V_j が存在して，倍角写像により $\delta^m(V_j) = I_+$ をみたすことを示そう：I_+ は A_i の分岐値弧 V_i ではないから，命題 6.3 より，ある A_{i-1} の補弧 I_+^1 が存在して，$\delta : I_+^1 \to I_+$ は全単射となる．もし I_+^1 が分岐値弧でなければ，ふたたび命題 6.3 より，ある A_{i-2} の補弧 I_+^2 が存在して，$\delta : I_+^2 \to I_+^1$ は全単射となる．同様に続けていくと，A_{i-k} の補弧 I_+^k は長さが $|I_+^k| = |I_+|/2^k$ なので，最短の補弧であるはずの $I_\mathcal{P}$（命題 6.4）より短くなる前にこの操作は終了する．すなわち，ある $k = m$ において，I_+^m は A_{i-m} の分岐値弧 V_{i-m} でなくてはならない．以後，$j \equiv i - m \mod p$ とする．倍角写像により $\delta^m(V_j) = I_+$ をみたすので，$|V_j| < 2^m|V_j| = |I_+|$ が成り立つことにも注意しておこう．

つぎに，V_j は特性弧 $I_\mathcal{P}$ ではないことを示そう：まず，$I_\mathcal{P}$ の端点（すなわち特性角 $t_- < t_+$）が同じ周期系に属すると仮定する．このとき，ある自然数 s が存在して，$\delta^{sp}(t_-) = t_+$ をみたす．$\delta^p : A_i \to A_i$ はポートレートの角度の順序を保ち（ポートレートの基本性質 (2)），しかも t_- と t_+ は A_i 内で隣り合う角度なので，$A_i = \left\{t_-, \delta^{sp}(t_-) = t_+, \delta^{2sp}(t_-), \cdots, \delta^{(v-1)sp}(t_-)\right\}$ がなりたつ．このことから，$\mathcal{P}$ 内の任意の角度は同じ t_- の倍角写像による軌道として得られることになり，($\mathcal{P}$ 内の周期系の数) $v/r > 1$ という仮定に反する．よって，$I_\mathcal{P}$ の端点はそれぞれ別の周期系に属する．V_j の左の端点は δ^m により I_+ の左の端点（$= I_\mathcal{P}$ の右の端点）に写ることから，V_j の左の端点と $I_\mathcal{P}$ の左の端点はそれぞれ別の周期系に属する．これは $V_j \neq I_\mathcal{P} = V_i$（よって $i \neq j$）を意味する．

いま，特性弧の性質（命題 6.4）から，V_j は $I_\mathcal{P}$ を真に含んでいる．しかし，$I_\mathcal{P}$ の隣にある I_+ まで含めて，$I_\mathcal{P} \cup I_+ \subset V_j$ とまではできない．これは両者の長さを比べれば明らかである．しかし I_+ の $I_\mathcal{P}$ と接する端点（これは A_i に属する）は V_j に含まれているから，ポートレートの基本性質 (4) より，V_j は A_i の角度をすべて含んでいなければならない．すなわち，I_+ のもう一方の端点までもが V_j に含まれるということになる．しかしこれは I_- が V_j に含まれることを意味し，これまで見てきた角度の関係 $|V_j| < |I_+| \leq |I_-|$ に矛盾している．

よって $v/r > 1$ であれば $v \leq 2$ でなくてはならない．これを満たすのは $v = 2$ かつ $r = 1$ の場合に限る．とくに，$\mathcal{P}$ 共通の周期は $n = p$ となる．これが「プリミティブ」の場合である．

それ以外の場合，すなわち $v/r = 1$ であれば $\mathcal{P}$ 共通の周期は $n = pv$ となり，$\mathcal{P}$ の角度の数と一致する．すなわち，$\mathcal{P}$ の角度はすべてひとつの周期系に属する．これが「サテライト」の場合である． ■

上の証明では「プリミティブ」と「サテライト」が実際に存在することまでは確認していないことに注意しよう．しかしこれらの例は，実際に存在する．

例． 「プリミティブ」な形式的ポートレートが実現されている例として,「飛行機」があげられる．この場合，価数 $v=2$，周期 $p=3$ であり，ポートレート内の角度はふたつの周期系 $\{1/7, 2/7, 4/7\}$ と $\{3/7, 5/7, 6/7\}$ をもつ．

一方,「ウサギ」や「バジリカ」では「サテライト」の形式的ポートレートが実現されている．

形式的ポートレートの実現定理． 以上の準備を踏まえて，次の定理を証明する：

定理 6.6 (実現可能性のいいかえ) $\mathcal{P}$ を価数 v が 2 以上の形式的ポートレートとし，$I_{\mathcal{P}} = (t_-, t_+)$ をその特性弧とする．[8] このとき，次は同値：

(1) 2 次多項式 f_c は $\mathcal{P} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$ となる周期軌道 $\mathcal{O}$ をもつ．

(2) f_c の角度 t_-，t_+ の外射線が K_c の同一の点に着陸する．

すなわち，形式的ポートレート $\mathcal{P}$ が実際にある 2 次多項式のポートレートとして実現されるかどうかは，特性角 t_-, t_+ の外射線が同一点に着陸することがあるかどうかで決まっている．(「特性角」という言葉も十分に正当だといえるだろう.)

証明． (1) ならば (2) が成り立つことはポートレートの定義より明らかなので，逆を示そう．

まず，$\mathcal{P} = \{A_1, \cdots, A_p\}$ を価数 $v \geq 2$ の形式的ポートレートとし，$\mathcal{P}$ 内の角度に共通の角周期を rp とおく．また，特性角 $t_\pm$ は A_1 に含まれるとしてよい．

さて，ある $f = f_c$ において，外射線 $\mathcal{R}_c(t_-)$ と $\mathcal{R}_c(t_-)$ が同一の周期点 α_1 に着陸したと仮定する．このとき，周期系 $\mathcal{O}(\alpha_1)$ のポートレート $\mathcal{A}(\mathcal{O}(\alpha_1))$ を $\mathcal{P}' = \left\{A'_1, \cdots, A'_{p'}\right\}$ とおく．ただし，$A'_1 = \Theta(\alpha_1)$ である．さらに，$\mathcal{P}'$ の価数を v'，$\mathcal{P}'$ 内の角度に共通の角周期を $r'p'$ とおく．$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ はともに特性角 $t_\pm$ を含むので，$rp = r'p'$ が成り立つことに注意しておこう..

プリミティブの場合． まず $r=1$ の場合を示す．命題 6.5 より，このとき $v=2$ かつ $\mathcal{P}$ に共通の角周期はすべて p である．また，$A_1 = \{t_-, t_+\}$ であり，これらは別の周期系に属する．もし $1 < r'$ と仮定すると，$\mathcal{P}'$ は形式的ポートレートとしてサテライトとなる．しかしこの場合，t_- と t_+ は共通の周期系に属するので，矛盾である．よって $r = r' = 1$，したがって $p = p'$ が成り立つ．この場合，$\mathcal{P}'$ はプリミティブであり，$\{t_-, t_+\}$ のなすふたつの周期系として完全に決定され，しかも $\mathcal{P}$ と一致する．よって，(1) が成立する．

サテライトの場合． 次に $r > 1$ の場合を示す．命題 6.5 より，$v = r$ かつ $\mathcal{P}$ 内の角度はすべて同一の周期系に属する．とくに $\delta^{sp}(t_-) = t_+$ となる自然数 s が存在する．もし $\mathcal{P}'$ がプリミティブであれば，同じく命題 6.5 より $A'_1 = \{t_-, t_+\}$ でなくてはならず，これら特性角はそれぞれ別の周期系をなすことになり矛盾である．よって $\mathcal{P}'$ もサ

テライトであり，$v' = r' > 1$ が成り立つ．いま，命題 6.5 と同様の議論により，A_1 の角度はすべて t_- の δ^{ksp} $(0 \le k < v)$ の像として得られる．角度 t_- と $t_+ = \delta^{sp}(t_-)$ の外射線が α_1 に着陸することから，命題 5.2 より，A_1 に属する角度はすべて α_1 に着陸する．すなわち，$A_1 \subset A'_1$ である．このことから，$r = v \le v' = r'$，よって $p \ge p'$ を得る．また，$A_1 \subset A'_1$ より $f^p(\alpha_1) = \alpha_1$ であるから，p は p' の倍数である．

ここで $p > p'$ と仮定する．このとき，$A_{1+p'}$ は $A_{1+p'} = A'_1$ に含まれることになる．ポートレートの基本性質 (3) より，（p は p' の倍数なので）$\delta^p : A'_1 \to A'_1$ は順序を保つ全単射であるが，同時に部分集合に制限した $\delta^p : A_1 \to A_1$ および $\delta^p : A_{1+p'} \to A_{1+p'}$ も順序を保つ全単射となる．ポートレートの基本性質 (4) より，A_1 と $A_{1+p'}$ は交差しないことから，$\delta^p : A'_1 \to A'_1$ は恒等写像以外ありえない．これは $\delta^p : A_1 \to A_1$ が恒等写像であることを意味するから，$\mathcal{P}$ 内の角度が同一の周期系に属するというサテライトの性質に反する．よって $p = p'$ であり，$\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ が結論される． ■

では，実際に与えられた形式的ポートレートを周期系のポートレートとして実現する 2 次多項式が存在することを示そう．とりあえず， $c \notin \mathbb{M}$，すなわち，K_c がカントール集合になっている場合を考える．このとき，分岐値 $z = c$ はある（部分的な）外射線 $\mathbb{R}_c(t_c, r_0)$ 上に乗っているのであった．この $t_c \in \mathbb{T}$ を，$c \notin \mathbb{M}$ の**外射角** (external angle) と呼ぶことにする．任意の $t \in \mathbb{T}$ について，$t_c = t$ となる $c \notin \mathbb{M}$ が存在することに注意しよう．その上で，以下が成り立つ．

定理 6.7 (実現定理) $\mathcal{P}$ を価数 v が 2 以上の形式的ポートレートとし，$I_{\mathcal{P}}$ をその特性弧とする．$c \notin \mathbb{M}$ とき，次は同値：

(1) 2 次多項式 f_c は $\mathcal{P} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$ となる反発的周期系 $\mathcal{O}$ をもつ．

(2) c の外射角 t_c は $\mathcal{P}$ の特性弧 $I_{\mathcal{P}}$ に含まれる．

とくに，(1) を満たす $c \notin \mathbb{M}$ が存在する．

証明の前準備として，次の補題を示す：

補題 6.8 (同一点への着陸条件) 2 次多項式 $f = f_c$ は $c \notin \mathbb{M}$ をみたし，t_c をその外射角とする．このとき，$\mathbb{T}$ から $\delta^{-1}(t_c) = \{t_c/2, (t_c+1)/2\}$ を除いて得られるふたつの弧をそれぞれ T_c^0，T_c^1 とおく．

このとき，ともに破綻角ではない t と t' の K-線が同一の点 $z \in K_c$ に着陸するための必要十分条件は，任意の $n \ge 0$ にたいし，$2^n t$ と $2^n t'$ が両方とも T_c^0 もしくは T_c^1 のいずれかに含まれることである．

証明. **(補題 6.8)** ■

証明. 定理 6.7 ■

注意． この定理より,「形式的ポートレート」という用語は「ある 2 次多項式の，ある周期軌道のポートレート」として意味をもつことがわかった．今後は上で「形式的ポートレート」と呼んでいたものを，単に「ポートレート」と呼んでも差し支えないであろう．

6.1.3 ポートレートから放物的パラメーターへの対応

次に，任意のポートレート $\mathcal{P}$ は，ある放物的パラメーター $c = c(\mathcal{P}) \in \mathbb{M}$ を定めることを示そう．

ウェイク．

補題 6.9 $\mathcal{P}$ をポートレートとし，$I_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{T}$ をその特性弧とする．このとき，$I_{\mathcal{P}}$ は角度 0 を含まない．

よって，以下では $0 < t_- < t_+ < 1$ と仮定してよい．

定理 6.10 (特性弧) $\mathcal{P}$ を価数 2 以上のポートレートとする．その特性弧を (t_-, t_+) とするとき，マンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ の角度 t_- および t_+ の外射線は，同一点 $c \in \partial M$ に着陸する．しかも，f_c は放物的周期点をもつ．

この 2 本の外射線 $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t_-)$ および $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t_+)$ の着陸点 c を $\gamma_{\mathcal{P}}$ で表そう．このとき，これらの外射線と $\gamma_{\mathcal{P}}$ の和集合は，パラメーター平面を二つの領域に分割する．そのうち，$t_- < t < t_+$ をみたす全ての角度の外射線を含むほうの領域をポートレート $\mathcal{P}$ に対応する**ウェイク** (wake，もしくは単に $\mathcal{P}$-**ウェイク**) とよび，$W_{\mathcal{P}}$ と表す．また，$\gamma_{\mathcal{P}}$ を $W_{\mathcal{P}}$ の**つけ根** (root) とよぶ．[9]

定理 6.11 (ウェイクとポートレート) $\mathcal{P}$ を価数 2 以上のポートレートとするとき，以下は同値である：

(1) $c \in W_{\mathcal{P}}$

(2) f_c は $\mathcal{P}$ をポートレートとする反発的周期系をもつ．

放物的パラメーターの数え上げ．

補題 6.12 (放物的パラメーターの数)

[9] ウェイクとは，船が通ったあと水面にできる航跡のことである．付け根を船に見たてた，風情のあるネーミング．

6.1.4 放物的パラメーターからポートレートへの対応

定理 6.13 (放物的パラメーターからポートレートへの対応，その1) $\mathcal{P}$ を（価数2以上の）ポートレートとし，$\mathcal{P}$-ウェイクのつけ根である放物的パラメーターを $c = \gamma_{\mathcal{P}}$ とする．このとき，2次多項式 f_c の放物的周期系のポートレートは $\mathcal{P}$ である．
逆に，任意の放物的パラメーター $c \in \mathbb{M}$ にたいしその放物的周期系のポートレートを $\mathcal{P}$ とすると，c は $\mathcal{P}$-ウェイクのつけ根となる．

さらに，次がなりたつ：

定理 6.14 (放物的パラメーターからポートレートの対応への，その2) 放物的パラメーター $c \neq 1/4$ に着陸する $\mathbb{M}$-線は，ちょうどふたつである．

これより，次の定理を得る：

系 6.15 (放物的パラメーターとポートレートの完全対応) 放物的パラメーター $c \in \mathbb{M}$ とそれをつけ根にもつポートレート $\mathcal{P}$ は一対一に対応する．

以上のおさらいとして，定理 6.1 の (P1) および (P2) を証明しよう：

証明．(定理 6.1 の前半，放物的パラメーターに関する部分) 有理数角度 t を決めると，定理 6.10 と同様の議論により角度 t の $\mathbb{M}$-線はある放物的固定点に着陸する．よって (P1) を得る．(P2) は定理 6.14 よりわかる．($c = 1/4$ のときは，角度 0 と 1 を区別することで主張とのつじつまがあう.) ■

6.1.5 偶数分母角の着陸可能性

次に，主定理（定理 6.1）の後半，(M1) と (M2) を証明しよう．主にシュライヒャーによる方法を用いる．オリジナルの証明では双曲計量を多用する．オルセーノート，もしくは Carleson-Gamelin の本を参照せよ．

証明．(定理 6.1，(M1) と (M2)) ■

6.2 くりこみ理論と $\mathbb{M}$ のコピー

6.2.1 双曲成分

プリミティブとサテライト

6.2.2 くりこみ

くりこみ.

チューニング定理.

6.3 角度の計算：ハバード・ツリー

6.4 局所連結性とカラテオドリの定理

6.4.1 局所連結性とカラテオドリの定理.

局所連結性.

カラテオドリの定理.

6.4.2 マンデルブロー集合の局所連結性予想

予想１. 任意の角度 t について，$\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(t)$ は着陸し，その着陸地点は t について連続に変化する.

カラテオドリの理論により，予想１は次の二つの予想と同値であるこがわかる：

予想２. 等角写像 $\Psi := \Phi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}} \to \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M}$ は境界まで拡張できて，$\Psi : \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{D} \to \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{M}^{\circ}$ は連続写像となる.

予想 (MLC). $\mathbb{M}$ は局所連結である．[10]

さらに，次の予想は１次元複素力学系理論における最重要課題といってもよい：

予想 (HD). H は $\mathbb{M}$ の中で稠密な開集合をなすであろう．すなわち，$\overline{H} = \mathbb{M}$ が成り立つであろう．[11]

もしこの予想が正しければ，任意の２次多項式は双曲的な２次多項式で近似できることがわかる．すなわち，不安定な力学系があっても，ごくわずかなパラメーターの変化で,（安定した）双曲的力学系へと転移できるのである．この観点でいえば，次の定理は重要であろう.

定理 6.16 (マニエ・サド・サリバン) $\mathbb{M}$ の内部 $\mathbb{M}^\circ$ は $\mathbb{M}$ のなかで稠密．したがって，上の予想は $H = \mathbb{M}^\circ$ であることを示せば証明される．

$\mathbb{M}^\circ$ の連結成分で双曲成分でないものは，**クイアー成分** (queer component) とよばれている．予想 (HD) は，クイアー成分が存在しないことを主張している．たとえば，次のような結果がある：

定理 6.17 (マクマレン) $\mathbb{M}^\circ$ のある成分が実軸と交わるならば，それは双曲成分である．

したがってもしクイアー成分が存在するならば，それは実軸とは交わらない．このことから，実軸上に限れば（すなわち，実 2 次多項式に限れば）双曲的力学系は稠密なのではないか，と予想される．[12]この予想は，リュービッチと Graczyk-Świątek により独立に，肯定的に解決された：

定理 6.18 (実 HD 定理) $H \cap \mathbb{R}$ は $\mathbb{M} \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$ 上で稠密である．すなわち，双曲稠密性予想は実数の世界では正しい．

最後にもう一度，予想 (MLC) に立ち返っておこう．この予想が重要なのは，次のような定理が知られているからである：

定理 6.19 (ドゥアディ・ハバード) 予想 (MLC) が正しければ，予想 (HD) は正しい．

われわれの最終目標は，あくまで予想 (HD) である．ドゥアディ・ハバードによる上の定理がひとつの布石となり，$\mathbb{M}$ の局所連結性研究はは 2 次多項式力学系の重要なテーマとなった．

さてわれわれは，予想 (MLC) にどの程度近づいているのだろうか？

ヨコッツの不等式.

ヨコッツの定理.

ノート.

[12]本当は実力学系理論の観点からそのような予想が立てられ，あとから複素力学系による稠密性予想が定式化されたのである．

第7章　正規族による複素力学系の定式化

われわれのいう複素力学系とは，複素平面 $\mathbb{C}$ とその上の正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ のペア $(\mathbb{C}, f)$ のことであった．これまでは主に f を 2 次多項式に限って扱ってきたが，このように写像の形を限定するようになったのは，歴史的に見るとごく最近のことである．

この章では，20 世紀初頭にファトウとジュリアが発展させたオリジナルの理論に近い形で，複素力学系を定式化する．とくに，これまで見てきたジュリア集合とマンデルブロー集合がどのような位置づけにあるのか，やや包括的な視点から捉えなおしてみよう．

一般的な教科書としては，付録の読書ガイドを参照されたい．ただしこのノートでは若干の個性は発揮させていただいて,「モンテルの定理」を主体にした理論構成のかわりに，1970 年代に生まれた「ザルクマンの補題」をベースに理論を構成する．

7.1　有理写像の力学系：古典から現代理論へ

複素力学系理論の歴史を大雑把に振り返っておこう．

1. ニュートン法から有理関数の反復合成へ．複素力学系理論の源泉と言われているのが，次のニュートン法による力学系である．f を多項式とするとき，

   $$N_f(z) \;=\; z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

   はニュートン写像と呼ばれる．この写像は有理関数（多項式の多項式による商）の形をしており，あとでみるように，リーマン球面上の正則写像 $N_f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ とみなすのが良い．

2. フランス科学アカデミーのグランプリ：「モンテルの正規族理論をもちいて有理関数の反復合成理論を構成せよ.」

3. ファトウとジュリア.

4. 近代的理論へ：マンデルブロー集合の発見，サリバン，ドゥアディ・ハバードの登場.

5. 現代的理論としての 2 次多項式複素力学系.

7.2 正規族と同程度連続性

7.2.1 正規族

球面距離.

コンパクト一様収束.

正規族.

7.2.2 同程度連続性

マーティーの定理.

7.2.3 ザルクマンの補題

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域とし，$\mathcal{F}$ を D 上で定義された正則関数族とする．ザルクマンの補題は，このような関数族の**非**正規性に対し必要十分条件を与える：

> **補題 7.1 (ザルクマンの補題)** 関数族 $\mathcal{F}$ がある $z_0 \in D$ で正規族をなさないことは，次と必要十分である：関数列 $F_k \in \mathcal{F}$，$\rho_k \to 0$ を満たす列 $\rho_k \in \mathbb{C}^*$，および $z_k \to z_0$ を満たす列 $z_k \in D$ が存在して，関数 $\psi_k(w) = F_k(z_k + \rho_k w)$ が定数でない有理形関数 $\psi : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する.

ここで，実際は $\rho_k > 0$ とできるのだが，後の応用に備えて複素数のままにしておくことにする．たとえば複素力学系は関数族 $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考えるが，この場合 z_0 としてジュリア集合の点を，F_k としては $F_k = f^{n_k}$ の形のものを取ればよい.

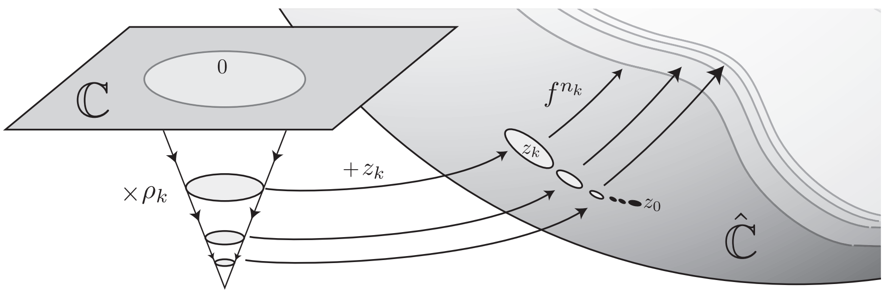


図 7.1: ザルクマンの補題を $\mathcal{F} = \{f^n\}$ （f は有理関数）に適用したイメージ図.

証明. ■

7.2.4 モンテルの定理とピカールの定理

7.3 正規族と有理関数の複素力学系

球面上の正則写像としての有理関数．

7.3.1 ジュリア集合の定義（再）

ジュリア集合の諸性質．

7.3.2 反発的周期点の稠密性

ここでは，次の古典的な定理（1910 年代）を証明する：

定理 7.2 (ファトウ，ジュリア) 反発的周期点全体の集合は J_f の中で稠密である．

ファトウとジュリアの証明はそれぞれ異なっているが（Milnor の教科書をみよ），どちらも有理関数特有の性質を用いており，たとえば整関数や有理形関数による力学系でそのまま通用するような議論ではない．その点，次のシュウィックによる証明は，若干の変更で整関数や有理形関数の力学系にも適用できる．[1]

証明．(シュウィック) まず定理を $\deg f \geq 5$ の場合に帰着させよう．Julia 集合の定義からさほど遠くない事実として，任意の $n \geq 1$ について J_f と J_{f^n} は一致することが知られている．f の周期点は f^n の周期点でもあるから，f を f^3 に置き換えて定理を証明すればよい．

次に，$E = \{\infty, f(\infty), f(c_1), \ldots, f(c_N)\}$ という有限集合を考える．ただし，c_i は f の分岐点（$f'(c_i) = 0$ となる点）である．Julia 集合は孤立点を持たないので，以下，任意に $z_0 \in J_f - E$ を固定し，反発的周期点の列 ζ_k が存在して，$k \to \infty$ のとき $\zeta_k \to z_0$ とできることを示そう．

ザルクマンの補題を $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n\geq 0}$ に適用して，収束する関数族 $\psi_k(w) = f^{n_k}(z_k + \rho_k w) \to \psi(w)$ を得る．ただし，収束は $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合上で一様であり，極限 ψ は定数でない有理形関数である．

いま，$z_0 \notin E$ であったから，少なくとも 5 つの点 $p_1, \ldots, p_5$ で $f(p_i) = z_0$ を満たすものが存在する．さらにネヴァリンナの全分岐値 (totally ramilied values) に関する定理から，ある $w_0 \in \mathbb{C}$ が存在して，$\psi'(w_0) \neq 0$ かつ $\psi(w_0) = p_i$ がある $i \in \{1, \ldots, 5\}$ について成り立つ．(たとえば野口の教科書 18 ページをみよ．）ここで

$$f \circ f^{n_k}(z_k + \rho_k w) - (z_k + \rho_k w) \;\to\; f \circ \psi(w) - z_0 \quad (k \to 0)$$

[1] 上田・谷口・諸沢『複素力学系序説』も参照せよ．

であるが，右の極限は $w = w_0$ のとき 0 である．よってフルヴィッツの定理から，ある $w_k \to w_0$ が存在して

$$f \circ f^{n_k}(z_k + \rho_k w_k) \ = \ z_k + \rho_k w_k$$

を満たす．$\zeta_k := z_k + \rho_k w_k$ とおけば，とりあえず z_0 に収束する周期点の列は得られた．

あとは ζ_k が反発的であることを示さなくてはならない．$\lambda_k := (f^{n_k+1})'(\zeta_k)$ とおくと，じつは

$$\rho_k \cdot \lambda_k \ = \ (f \circ \psi_k)'(w_k) \ \to \ (f \circ \psi)'(w_0) \ \neq \ 0 \ \ (k \to \infty)$$

が成り立つ．$\rho_k \to 0$ であったから，十分大きな k で ζ_k は反発的である． ■

「ネヴァリンナの定理」を使うのがややマニアックだ，という方もあるかもしれない．この点を改良した証明が，バーグマン（Bargmann）およびベルトルー-デゥバル（Berteloot-Duval）により与えられている．ここでは教科書（Berteloot-Mayer）にしたがって証明を与える：

証明．（改） こんどは $C := \bigcup_{f'(c_i)=0} \bigcup_{n \geq 0} f^n(c_i)$ として，$z_0 \in J_f - C$ に補題を適用する．（C は可算集合だが，$z \in J_f$ の任意の近傍には J_f の点が非可算個存在することに注意．）ピカールの定理から，つぎの 3 点を満たす開集合 $U \subset \mathbb{C}$ が存在する：

$$(1)\ \psi(U) \cap J \neq \emptyset \qquad (2)\ \psi(U) \subset \mathbb{C} \qquad (3)\ \forall w \in U,\ \psi'(w) \neq 0.$$

(1) より $J_f \subset f^m(\psi(U))$ となるような $m \geq 0$ が存在することがわかるので，ある $w_0 \in U$ について $f^m \circ \psi(w_0) = z_0$ が成り立つ．よって，上の証明と同様にして $w_k \to w_0$ で

$$f^m \circ f^{n_k}(z_k + \rho_k w_k) \ = \ z_k + \rho_k w_k$$

を満たすものが存在する．さらに $k \to \infty$ のとき

$$\rho_k \cdot (f^{m+n_k})'(z_k + \rho_k w_k) \ = \ (f^m)'(\psi_k(w_k)) \cdot \psi_k'(w_k) \ \to \ (f^m)'(\psi(w_0)) \cdot \psi'(w_0).$$

よって $(f^m)(\psi(w_0)) = z_0 \notin C$ および $w_0 \in U$ よりこの値は 0 でない．

■

7.3.3 マンデルブロー集合の定義（再）

7.3.4 マンデルブロー集合とジュリア集合の類似性

以下では，ザルクマンの補題中の関数族 $\mathcal{F}$ が 2 次多項式の反復合成 $\{f_c^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ （ただし c はマンデルブロー集合の境界上の点）の場合を考える．

マンデルブロー集合と Misiurewicz 点． 2 次多項式族

$$\left\{ f_c(z) = z^2 + c \,:\, c \in \mathbb{C} \right\}$$

を考えよう．さてマンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ は次のように定義される集合であった：

$$\mathbb{M} \ := \ \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \le 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

また，もし $c \in \mathbb{M}$ であれば，f_c のジュリア集合は次のように特徴づけることができるのであった：

$$\begin{aligned} K_c \ &:= \ \{z \in \mathbb{C} : |f_c^n(z)| \le 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\} \\ J_c \ = \ J_{f_c} \ &:= \ \partial K_c. \end{aligned}$$

さて $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ について，次の性質を持つものは **Misiurewicz 点**と呼ばれる：

> 「ある $l, p \in \mathbb{N}_+$ が存在して，$a_0 = f_{c_0}^l(c_0)$ は周期 p の（反発的）周期点となる.」

要するに c_0 が前周期的である場合をいう．括弧つきの（反発的）という部分は 2 次多項式の特殊事情で，$c_0 \in \partial\mathbb{M}$ かつ前周期的であれば自動的に満たされる性質である．このことから，c_0 自身は周期的ではないことがわかる．さらに

$$c_0 \ \in \ J_{c_0} \ = \ K_{c_0}$$

がなりたつ．とくに，K_{c_0} は内点をもたない．

マンデルブロー集合とジュリア集合の類似性． さて以下では，タン（Tan L.) による次の定理についておおまかな証明を述べたい：

> **「タンの定理」**$c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が Misiurewicz 点の場合，$z = c_0$ のあたりでジュリア集合 J_{c_0} を拡大していくと，$c = c_0$ のあたりでマンデルブロー集合 $\mathbb{M}$ を拡大していったときに見える絵と極めて似たものが得られる．

この「定理」を数学的に正当な主張に直していこう.（もちろん，オリジナルの主張はちゃんと数学的に正当である.）まず古典的な結果として知られる，次の定理 (ミルナーの教科書，Cor.8.12) を用いる：

> **定理 7.3 (ポアンカレ関数の存在定理，ケーニヒス)** $\lambda_0 := (f_{c_0}^p)'(a_0)$ とする．このとき，関数列
>
> $$w \ \longmapsto \ f_{c_0}^{kp}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_0^k}\right) \qquad (k \in \mathbb{N})$$
>
> は，有理形関数 $\psi(w)$ で
>
> $$\psi(\lambda_0 w) \ = \ f_{c_0}^p \circ \psi(w)$$
>
> を満たすものに $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する．とくに，$\psi(0) = a_0$, $\psi'(0) = 1$ である．

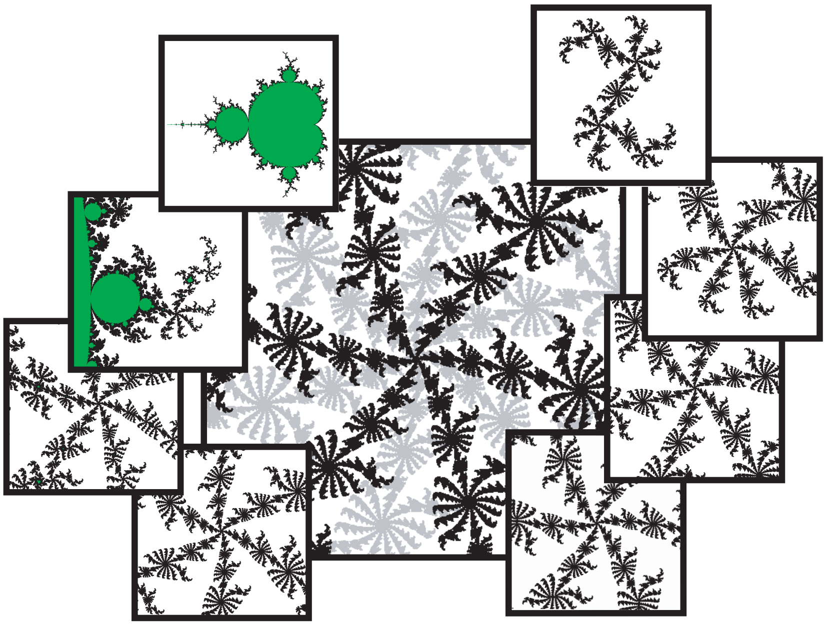


図 7.2: 中央の絵は，ある Misiurewicz 点 c_0 の周りでマンデルブロー集合（グレー）とジュリア集合 J_{c_0}（黒）を同じ座標系で描いたもの．それぞれの描画領域を広げていくと，一方はマンデルブロー集合（左 4 枚）に，一方はジュリア集合（右 4 枚）になる．

定理の主張するところは，$\mathbb{C}$ 上の力学系 $w \mapsto \lambda_0 w$ を $\psi : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ という「レンズ」を通して 眺めることで，反発的周期点 $z = a_0$ 近傍の力学系が得られる，ということである．このような ψ は**ポアンカレ関数** (Poincaré function) と呼ばれる．

さてわれわれが目標とする定理は $z = c_0$ における局所的性質の関するものであるから，上の結果をそのように言い替えてみよう．$A_0 := (f_{c_0}^l)'(c_0)$ とおくと，$z = c_0$ からの微小変化 Δz について

$$f_{c_0}^l(c_0 + \Delta z) \ = \ a_0 + A_0 \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

がなりたつ.（c_0 が周期点でないことから $A_0 \neq 0$ もわかる.）ここで $\Delta z = w/(A_0\lambda_0^k)$ とすれば，$k \to \infty$ のとき

$$f_{c_0}^{kp}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_0^k}\right) \ \sim \ f_{c_0}^{kp+l}\left(c_0 + \frac{w}{A_0\lambda_0^k} + o(\lambda_0^{-k})\right) \ \sim \ f_{c_0}^{kp+l}\left(c_0 + \frac{w}{A_0\lambda_0^k}\right) \ := \ \psi_k(w)$$

が $\mathbb{C}$ のコンパクト集合上で成立することがわかる．結果として，$n_k := kp + l$, $z_k := c_0$, $\rho_k := 1/(A_0\lambda_0^k)$ とおけば

$$\psi(w) \ = \ \lim_{k \to 0} \psi_k(w) \ = \ \lim_{k \to 0} f_{c_0}^{n_k}(z_k + \rho_k w)$$

を得る．まさに，ザルクマンの補題から生成される関数の形をしている．

ハウスドルフ位相. 次に，集合が「似ている」ことを厳密に表現するための設定を行おう．$\mathbb{C}$ 上の（空でない）コンパクト集合全体を $\mathrm{Com}(\mathbb{C})$ で表す．そこでの列 $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ について，K_k が $k \to \infty$ のとき $K \in \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ に収束するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$k \geq k_0$ のとき $K \subset \mathrm{N}_\epsilon(K_k)$ かつ $K_k \subset \mathrm{N}_\epsilon(K)$ が成り立つこととする．ただし，$\mathrm{N}_\epsilon(\cdot)$ は $\mathbb{C}$ 内での ϵ-開近傍である．

さていま，原点中心半径 $r > 0$ の開円板を $\mathbb{D}_r$ で表そう．閉集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対し，記号 $[K]_r$ で集合 $(K \cap \mathbb{D}_r) \cup \partial\mathbb{D}_r \in \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ を表すことにする．また，$a \in \mathbb{C}^*$ および $b \in \mathbb{C}$ に対し，記号 $a(K-b)$ で集合 $\{a(z-b) : z \in K\} \in \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ を表すことにする．

以上で，定理を述べる準備が整った．

定理 7.4 (ジュリア集合とマンデルブロー集合の類似性) 上記の設定で，$\mathcal{J} := \psi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$ とする．このとき，ある複素定数 $q \neq 0$ が存在し，任意に大きな $r > 0$ について次が Hausdorff 位相の意味で成り立つ：

(a) $\left[\rho_k^{-1}(J_{c_0} - c_0)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$

(b) $\left[q\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$

証明の鍵となるのは，次の補題である：

補題 7.5 $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ を Misiurewicz とするとき，ある複素定数 $Q \neq 0$ が存在して，関数列

$$\Phi_k(w) \ := \ f^{n_k}_{c_0+\rho_k w}(c_0 + Q\rho_k w)$$

は Poincaré 関数 $\psi(w)$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する．

ここで，実際は $Q = q^{-1}$ である．この補題を一旦認めて，定理の証明をしてみよう．

■ (a) の証明. $f^n_{c_0}(J_{c_0}) = J_{c_0}$ であるから，$\left[\rho_k^{-1}(J_{c_0} - c_0)\right]_r = \left[\psi_k^{-1}(J_{c_0})\right]_r$ を得る．定義 $[\mathcal{J}]_r = [\psi^{-1}(J_{c_0})]_r$ および $\psi_k \to \psi$ の $\mathbb{C}$ におけるコンパクト一様収束性から，主張が得られる． ■

■(b) の証明. $\mathcal{M}_k := q\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)$ とおく．定義どおりに，任意に小さい $\epsilon > 0$ に対し $k \to \infty$ のとき

$$[\mathcal{M}_k]_r \ \subset \ \mathrm{N}_\epsilon([\mathcal{J}]_r) \quad \text{かつ} \quad [\mathcal{J}]_r \ \subset \ \mathrm{N}_\epsilon([\mathcal{M}_k]_r)$$

を示そう．

まず集合 $\overline{\mathbb{D}}_r - \mathrm{N}_\epsilon(\mathcal{J})$ はコンパクトであるから，ある自然数 $N = N(\epsilon)$ が存在して $|f^N_{c_0} \circ \psi(w)| > 2$ がすべての $w \in \overline{\mathbb{D}}_r - \mathrm{N}_\epsilon(\mathcal{J})$ で成り立つようにできる．$\Phi_k(w)$ が $\psi(w)$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束することから (補題 7.5),

$$|f^{N+n_k}_{c_0+Q\rho_k w}(c_0 + Q\rho_k w)| \ > \ 2$$

が $k \gg 0$ で成り立つ．これは $c_0 + Q\rho_k w \notin \mathbb{M}$ を意味する．言い換えれば，$w \notin \mathcal{M}_k$ ということである．したがって，最初の包含関係 $[\mathcal{M}_k]_r \subset \mathrm{N}_\epsilon([\mathcal{J}]_r)$. が得られた．

次に，$[\mathcal{J}]_r$ を有限集合 $E \subset [\mathcal{J}]_r$ で近似し，E の $\epsilon/2$-近傍が $[\mathcal{J}]_r$ を含むようにできる．したがって，任意の $w_0 \in E$ について，列 $w_k \in [\mathcal{M}_k]_r$ を見つけてきて，$|w_0 - w_k| < \epsilon/2$ が $k \gg 0$ のとき成り立つようにできればよい．

Δ を w_0 中心半径 $\epsilon/2$ の円板とする．もし $\Delta \cap \partial\mathbb{D}_r \neq \emptyset$ であれば，w_k として $\partial\mathbb{D}_r$ の点をとればよい．したがって，$\Delta \subset \mathbb{D}_r$ の場合を考えよう．

いま $\psi(w_0) \in J_{c_0}$ かつ J_{c_0} 内で反発的周期点は稠密なので，適当な w_0' で $|w_0 - w_0'| < \epsilon/4$ かつ $\psi(w_0')$ が周期 m の反発的周期点となるものがとれる．すなわち，関数 $\chi : w \mapsto f_{c_0}^m(\psi(w)) - \psi(w)$ は $w = w_0'$ において零点をもつ．そこで関数 $\chi_k : w \mapsto f_{c_0+Q\rho_k w}^m(\Phi_k(w)) - \Phi_k(w)$ を考えよう．Φ_k は ψ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束するから，χ_k は $k \gg 0$ のとき $|w_k - w_0'| < \epsilon/4$ を満たすある $w_k \in \Delta$ で零点をもつ．とくに，$c_k := c_0 + Q\rho_k w_k$ は $f_{c_k}^{n_k+m}(c_k) = f_{c_k}^{n_k}(c_k)$ を満たす．すなわち $c_k \in \mathbb{M}$ である．よって期待通り，$|w_k - w_0| < \epsilon/2$ を満たす $w_k \in \mathcal{M}_k$ が得られた． ■

補題 7.5 の証明． $Q \in \mathbb{C}^*$ を定数とし，$c := c_0 + Q\rho_k w$ とする．また，$\Phi_k(w) := f_c^{n_k}(c) = f_c^{pk+l}(c)$ とおく．さらに，$b(c) := f_c^l(c)$，$a(c)$ を f_c の反発的 p-周期点で，$a(c_0) = a_0$ となるものとしよう．その乗数を $\lambda(c) := (f_c^p)'(a(c))$ とおく．このとき，ケーニヒスによるポアンカレ関数の存在定理により，関数の列 $\psi_k^c(w) := f_c^{pk}(a(c) + w/\lambda(c)^{pk})$ はある有理形関数 $\phi^c(w)$ に複素平面上コンパクト一様収束する．とくに，もし $w \in \mathbb{C}$ を固定した場合，関数 $c \mapsto \phi^c(w)$ は $c = c_0$ のまわりで正則である．

ドゥアディ・ハバードによる結果[2]により，ある $B_0 \neq 0$ が存在して $b(c) - a(c) = B_0(c - c_0) + o(c - c_0)$ となることがわかる．したがって，

$$b(c) \;=\; a(c) + B_0 Q\rho_k w + o(\rho_k) \;=\; a(c) + \frac{B_0 Q}{A_0} \cdot \frac{\lambda(c)^{pk}}{\lambda_0^{pk}} \cdot \frac{w}{\lambda(c)^{pk}} + o(\rho_k).$$

ここで，$Q := A_0/B_0$ と定めよう．$\lambda(c)$ は c の正則関数であり $\lambda(c) = \lambda_0 + O(c - c_0)$ であるから，$|\lambda(c)/\lambda_0 - 1| = O(c - c_0)$ がなりたつ．これより，

$$\log \frac{\lambda(c)^{pk}}{\lambda(c_0)^{pk}} = k \cdot O(c - c_0) = O\left(\frac{k}{\lambda(c_0)^{pk}}\right) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

いま $\Phi_k(w) = f_c^{pk}(b(c))$ かつ $\mathbb{C}$ のコンパクト集合上一様に $\lim_{c \to c_0} \phi^c(w) = \phi(w)$ であったから，

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k(w) \;=\; \lim_{k\to\infty} f_c^{pk}\left(a(c) + \frac{w}{\lambda(c)^{pk}} + o(\rho_k)\right) \;=\; \phi(w)$$

が任意のコンパクト集合上で成り立つ． ■

注意． じつは c_0 が**半双曲** (semi-hyperbolic) と呼ばれる Misiurewicz よりも広いクラスでも同様の補題が成立し，マンデルブロー集合と Julia 集合の類似性も証明できる．ここで c_0 が半双曲であるとは，c_0 の f_{c_0} による軌道が，自分自身に集積しないときをいう．

[2] Polynoial-like の論文.

7.4 ハウスドルフ次元と面積にまつわる話

第8章　付録：描画アルゴリズム

8.1　DEMによるジュリア集合の描画

8.2　DEMによる $\mathbb{M}$ の描画

8.3　ジュリア集合の外射線を描くアルゴリズム

8.4　マンデルブロー集合の外射線を描くアルゴリズム

いま $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を固定して，この角度に対応するマンデルブロー集合の**外射線** (external ray) $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(\theta)$ を描く大雑把なアルゴリズムを紹介する．

まず，等角写像 $\Phi : \mathbb{C} - \mathbb{M} \to \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$ の定義を思い出しておこう．$c \in \mathbb{C} - \mathbb{M}$ とするとき，$c \in \mathbb{C} - K_c$ であるから $\Phi_c(c)$ が定義できる．そこで，

$$\Phi(c) \ := \ \phi_c(c)$$

と定義するのであった．さて今．$c \in \mathcal{R}_{\mathbb{M}}(\theta)$ となるようなパラメーター $c \in \mathbb{C} - \mathbb{M}$ をもとめたいとしよう．このとき，ある $r > 1$ が存在して

$$\Phi(c) \ = \ \phi_c(c) \ = \ re^{2\pi i\theta}$$

となることを意味する．したがって，$f_c(z) = z^2 + c$ とすれば

$$\phi_c(f_c^n(c)) \ = \ f_0^n(re^{2\pi i\theta}) \ = \ r^{2^n} e^{2\pi i \cdot 2^n\theta}$$

をみたす．いま，∞ の十分近くでは $\phi_c(c)/c \approx 1$ であった（定理 3.18）．これは，相対誤差が比較的小さい，ということである．ここで n が十分大きければ $f_c^n(c)$ は十分 ∞ に近いので，大胆に，

$$f_c^n(c) \ \approx \ \phi_c(f_c^n(c)) \ = \ r^{2^n} e^{2\pi i \cdot 2^n\theta} \ =: \ t$$

と仮定し，方程式 $f_c^n(c) = t$ を解くことを考えよう.（この部分が「大雑把」の意味である．あとで精密化の方法も考える.）

一般に $n \in \mathbb{N}$ と $t \in \mathbb{C}$ を定数とし，方程式

$$P_n(c) \ := \ f_c^n(c) - t \ = \ 0$$

を解きたい．いま，$P_n(c)$ は c に関する 2^n 次多項式である．n が大きいと代数的に解くことは不可能なので，ここではたいへん効率の良いニュートン法を用いることを考える．すなわち，

$$N(c) \;=\; N_{n,t}(c) \;:=\; c - \frac{P_n(c)}{P_n'(c)}$$

（ただし $P_n'(c) := \dfrac{dP_n}{dc}(c)$）を適当な初期値のもとで反復合成するのである．もし，初期値 c_0 が $P_n(c)$ の零点に十分近ければ，数列

$$c_0 \xmapsto{N} N(c_0) \xmapsto{N} N^2(c_0) \xmapsto{N} N^3(c_0) \xmapsto{N} \cdots$$

はその零点に高速で収束することが知られている．

いま，c があたえられれば $P_n(c) = f_c^n(c) - t$ の計算は $f_c(z) = z^2 + c$ の反復合成に帰着されるので簡単である．では，P_n' をどう計算すればよいだろうか？以下記号 $'$ は $\dfrac{d}{dc}$ だと約束すると，

$$\begin{aligned}
P_n'(c) \;&=\; \{f_c^n(c)\}' \\
&=\; \left\{\left(f_c^{n-1}(c)\right)^2 + c\right\}' \\
&=\; 2\big\{f_c^{n-1}(c)\big\}' f_c^{n-1}(c) + 1 \\
&=\; 2P_{n-1}'(c) f_c^{n-1}(c) + 1
\end{aligned}$$

が成立する．一般に $1 \le k \le n$ にたいして $C_k := f_c^k(c)$ とおき，$D_k := \big\{f_c^k(c)\big\}'$ とすれば，漸化式

$$\begin{cases} C_1 \;=\; c, \;\; C_k \;=\; C_{k-1}^2 + c \\ D_1 \;=\; 1, \;\; D_k \;=\; 2D_{k-1}C_{k-1} + 1 \end{cases}$$

より $P_n(c) = C_n - t$ および $P_n'(c) = D_n$ が計算できる．したがってニュートン法は

$$N:\; c \;\mapsto\; c - \frac{C_n - t}{D_n}$$

という形でアルゴリズム化できるわけである．

具体的な描画方法． いま D (depth) を自然数，$R > 1$ として，

$$\mathcal{R} \;:=\; \left\{\Phi^{-1}(re^{2\pi i\theta}) \;:\; R^{1/2^D} \le r < R\right\}$$

を描くことを考えよう．これは $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}(\theta)$ の一部であり，R が十分大きければ ∞ の近くまで伸びており，D が十分大きければ $R^{1/2^D}$ は 1 に近く，$\mathbb{M}$ の境界近くまで $\mathcal{R}$ が伸びていると考えられる．

さて外射線の描画といっても，基本的には点をうち，それらを線分で結ぶだけである．そこで，点を打つ細かさのパラメータとして S (sharpness) という自然数を導入し，$\mathcal{R}$ 上からトータル SD 個の点を選び上のようなアルゴリズムで計算する．具体的な点

の取り方だが，$\mathbb{M}$ に近いほど精巧さが要求されると予想されるので，半径パラメータ $r \in [R^{1/2^D}, R)$ を

$$[R^{1/2^D}, R^{1/2^{D-1}}),\ [R^{1/2^{D-1}}, R^{1/2^{D-2}}), \ldots, [R^{1/2^2}, R^{1/2}),\ [R^{1/2}, R)$$

と D 個に分割し，それぞれに属する S 個の点を計算することにする．指数部分に着目して，各 $k = 1, 2, \cdots, D$ にたいし，区間 $[R^{1/2^k}, R^{1/2^{k-1}})$ から

$$R^{1/2^k},\ R^{1/2^{k-1+(S-1)/S}},\ \ldots\ , R^{1/2^{k-1+1/S}}$$

を S 個の r として定めよう．これらの r 全体の通し番号を，値が大きい順番に並ぶように

$$\begin{cases} m \ := \ (k-1)S + j \quad (1 \leq j \leq S) \\ r_m \ := \ R^{1/2^{m/S}} \ = \ R^{1/2^{k-1+j/S}} \end{cases}$$

とし，$c_m := \Phi^{-1}(r_m e^{2\pi i\theta})$ $(1 \leq m \leq DS)$ をそれぞれもとめることを考える．[1]

さて，われわれが用いるのはニュートン法のアルゴリズムであるから，写像 $N = N_{n,t}$ を適用するための t と n の値を計 DS 個指定しなくてはならない．$r_m \in [R^{1/2^k}, R^{1/2^{k-1}})$ のとき，$r_m^{2^k} \in [R, R^2)$ であるから，

$$\phi_{c_m}(f_{c_m}^k(c_m)) \ = \ r_m^{2^k} e^{2\pi i\theta\cdot 2^k}$$

の右辺（既知の値）を t_m とおけば，$|t_m| \geq R$ をみたす．したがって，R が十分におおきければ一様に（相対誤差の意味で）

$$t_m \ = \ \phi_{c_m}(f_{c_m}^k(c_m)) \ \approx \ f_{c_m}^k(c_m)$$

と解釈できる．あとは $f_{c_m}^k(c_m) = t_m$ となる c_m を上記のニュートン写像 N_{k,t_m} の反復で計算すればよい．初期値の取り方は，以下の手順に従う：

- まず R が十分大きいことから相対誤差の意味で $\Phi^{-1}(Re^{2\pi i\theta}) \approx Re^{2\pi i\theta}$ である．この値を c_0 とする．[2]

- ニュートン法の最大反復回数を $L = L_m$ とする．[3]初期値 c_0 を用いて，ニュートン法 N_{1,t_1} を L 回反復しその結果を c_1 とする．すなわち

$$c_1 \ := \ N_{1,t_1}^L(c_0).$$

- 以下同様に，$1 \leq m \leq DS$ にたいし，初期値 c_{m-1} を用いて

$$c_m \ := \ N_{k,t_m}^L(c_{m-1})$$

とする．ただし，$m = (k-1)S + j$ $(1 \leq J \leq S)$ である．(c_{m-1} は $\mathcal{R}$ 上で c_m と隣り合う点であり，初期値として使うには最良である．)

[1] この m は描画時に用いる便宜上の通し番号で，実際の c_m の計算には k と j によるループを用いることになる．

[2] この部分は級数展開 $\Phi^{-1}(z) = z + 1/2 - 1/(8z) + \cdots$ を用いて改良できる．

[3] この数は，必要に応じ m とともに変化（増加）させてもよいが，ここでは簡単のため固定してある．

あとは $\{c_m : 1 \le m \le DS\}$ を結ぶ線分を描画すれば，外射線を描くことができる．

誤差の評価． 上のアルゴリズムでは，相対誤差の意味で $\phi_c(f_c^n(c)) \approx f_c^n(c)$ となる部分を等号とみなして計算した．この近似によって生じる誤差は，以下のように評価できる．

いま．$\mathbb{M} \subset \overline{\mathbb{D}(2)}$ であったから，適当に $r > 2$ を取れば $\mathbb{D}(r)$ は $\mathbb{M}$ を含む開集合（近傍）である．以下，$|c| \le r$ と仮定しよう．このとき，次が成り立つ．

定理 8.1 いま，t を十分大きい絶対値 $|t| = R \gg 0$ をもつ複素数とする．また，c は方程式 $f_c^n(c) = t$ の解のひとつとする．このとき，方程式 $\phi_{\hat{c}}(q_{\hat{c}}^n(\hat{c})) = t$ の解 $\hat{c}$ で，

$$|\hat{c} - c| \;=\; O\left(\frac{1}{2^n R^{2-1/2^n}(R^{1/2^n} - 1)}\right).$$

をみたすものが存在する．また，$n > \log_2 \log R$ のとき，

$$|\hat{c} - c| \;=\; O\left(\frac{1}{R^2 \log R}\right).$$

をみたす.

ここで $R \gg 0$ とは，比 r/R が一定以上小さいことを意味する．この定理によれば，R を大きくすれば誤差はかなり小さくできることがわかる．

しかし，ニュートン法に伴う丸め誤差はまったく考慮されていないことに注意しておこう．実際，R を大きく取るにはある程度 n を大きくとる必要がある．ニュートン法の反復計算にともなう計算量は n にしたがって大幅に増えるから，計算途中の丸め誤差も蓄積していることは覚悟しなくてはならない．実際，depth を大きくしてマンデルブロー集合の十分近くの点を近似するのは難しい．とくに，外射線が放物的パラメーターに着陸するときはうまくいかないことが多い.

練習問題（アルゴリズムの改良）． より正確に絵を描くには，方程式 $\phi_c(f_c^n(c)) = t$ をより正確に解くことが必要である．そこで，$\phi_c(z)$ の近似を 3 次までに高めて，

$$\phi_c(f_c^n(c)) \;\approx\; f_c^n(c) + \frac{c}{2f_c^n(c)} \;=\; t$$

という方程式を考えよう．このとき，上の相対誤差はどのように評価されるか？さらに，この式を用いるとニュートン法の反復写像は

$$N:\; c \;\mapsto\; c - \frac{2C_n^3 - 2tC_n^2 + cC_n}{2C_n^2 D_n + C_n - cD_n}$$

となることを確かめよ．ただし，$C_n = f_c^n(c),\ D_n = \{f_c^n(c)\}'$ である．

練習問題（アルゴリズムの改良その２）． 今度は，方程式 $f_c^n(c) = \phi_c^{-1}(t)$ をニュートン法で解くことを考えてみよう.

(1) まず，$\phi_c^{-1}(t)$ は

$$\phi_c^{-1}(t) \;=\; t - \frac{c}{2t} + \frac{c(3c-8)}{4t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right)$$

と展開されることをしめせ.

(2) 近似 $f_c^n(c) = t - c/(2t)$ を用いると，ニュートン法の反復写像は

$$N:\; c \;\mapsto\; c - \frac{2tC_n - 2t^2 + c}{2tD_n - 1}$$

となることを確かめよ.

(3) 上の改良法とくらべて，どちらが計算誤差がすくないと考えられるか？

等高線の描画. このアルゴリズムを応用すれば，等高線（等ポテンシャル線）を描くこともさほど難しくない．興味のある読者は試されてみてはどうだろうか？[4]

[4]等高線を描くアルゴリズムとしては，ニュートン法を使わないより簡単な方法も知られている．いずれの方法にしても，$\mathbb{M}$ の境界近くの等高線を近似することは難しくなる．等高線の形状自体が非常に複雑になり，高い精度が要求されるからである．

第9章　付録：複素数・複素関数についての覚書

ここでは大学初年級の読者を意識して，複素数と複素関数の基本事項についてごく簡単にまとめておく．

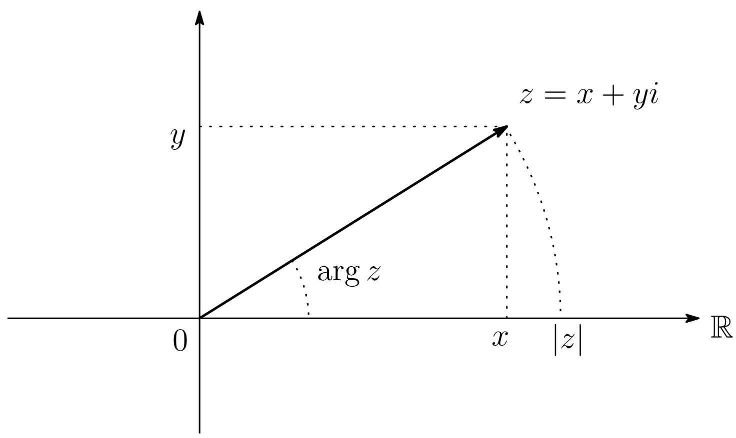
9.1　複素数の四則演算

複素数 (complex number) z とは，2つの実数 x, y を $i^2 = -1$ をみたす「数」i で結んだ，

$$z = x + yi$$

という形の「数」をいう．$y = 0$ のときこれは実数 x であるから，複素数全体は実数全体を含む大きな集合（数の集まり）である．複素数全体を記号 $\mathbb{C}$ で表す．複素数は実数と文字 i の文字式として計算する．もし i^2 が現れたら，それを -1 で置き換えるのである．とにかく，これで全てがうまく行く．

複素数 $z = x + yi$ は xy **平面上の点** (x, y) **の別名だと思うことにする．**その意味で，複素数全体のことを**複素（数）平面** (complex plane) とよぶ．したがって，x 軸は実数の全体 $\mathbb{R}$ の別名である．これをさらに，**実軸** (real axis) ともよぶ．複素数 z にたいし，z と原点 0 を結んだ線分の長さ $\sqrt{x^2 + y^2}$ を $|z|$ で表し，複素数の**絶対値** (absolute value) もしくは**長さ** (modulus) とよぶ．また，z と実軸のなす角を，やや仰々しいが $\arg z$ と表し，z の偏角 (argument) とよぶ．[1]

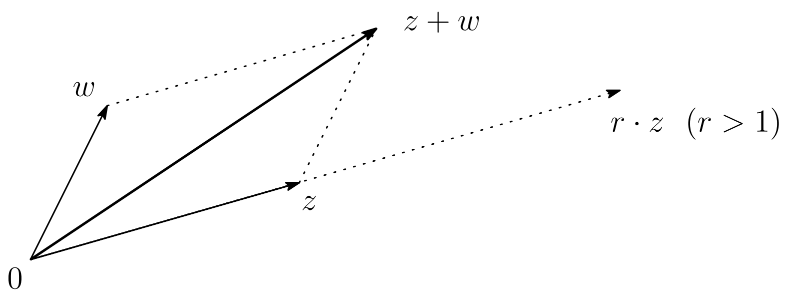


[1] $z = 0$ のときは $\arg z$ は意味を持たないので，便宜的に 0 としておく．

複素数の足し算． 2つの複素数 $z = x + yi,\ w = u + vi$ にたいし，

- $z + w = (x + u) + (y + v)i$
- $z - w = (x - u) + (y - v)i$

と定義する．和は次のような平行四辺形の作図により得られる．



複素数 $z = x + yi$ は複素数 x と複素数 yi の和であるから，つじつまが合う．

複素数の掛け算公式． 2つの複素数 $z = x + yi,\ w = u + vi$ にたいし，

- $zw = (xu - yv) + (xv + yu)i$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$ (ただし $z \neq 0$)
- $\dfrac{z}{w} = z \cdot \dfrac{1}{w} = \dfrac{(xu + yv) + (-xv + yu)i}{u^2 + v^2}$ (ただし $w \neq 0$)

と定義する．とくに，積 zw の図形的意味は以下のようあたえられる：

複素数の実数倍． 複素数 $z = x + yi$ と実数 r にたいし，

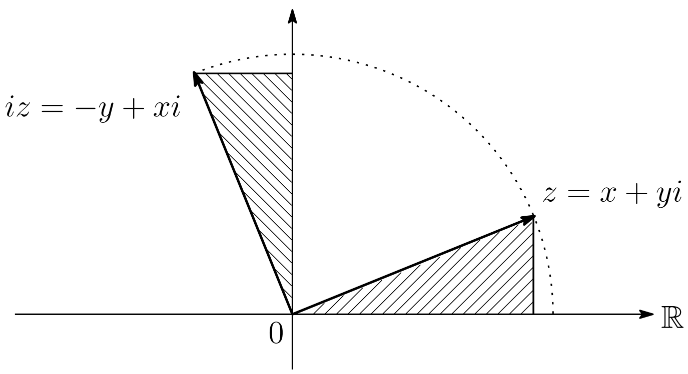
$$r \cdot z = r(x + yi) = rx + ryi$$

と定める．平面上でいうと，原点中心に r 倍の拡大をしていることになる．もちろん，r が負の場合は「矢印」は逆向きになる．(上の図参照)

複素数の i 倍． まず，i を普通の数のように思って $z = x + yi$ にかけると，

$$i \cdot z = i(x + yi) = xi + yi^2 = -y + xi$$

となる．これは平面でいうと，90 度の回転である．



思えば

> 実数の -1 倍＝数直線上で 180 度回転

であったから，$i \cdot i = -1$ とは

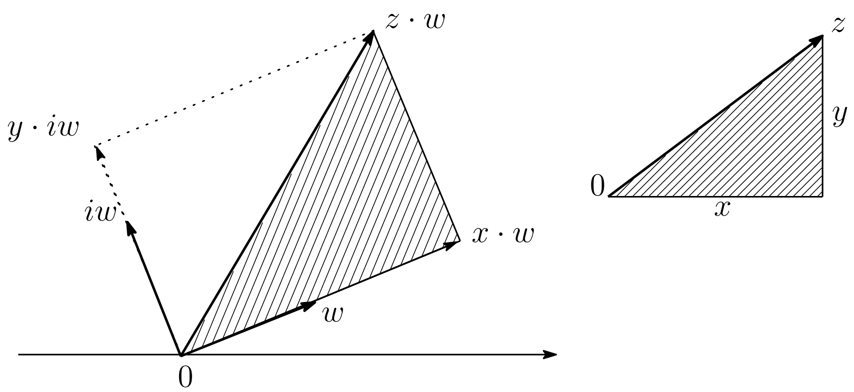
> -1 倍＝ i 倍× i 倍＝ 90 度回転＋ 90 度回転=180 度回転

となって，つじつまが合う．

複素数の複素数倍． 2 つの複素数 $z = x + yi,\ w = u + vi$ にたいし，

$$z \cdot w = (x + yi)w = xw + y(iw).$$

これより，以下のような図をえる．



ぢっと眺めると，次のような性質をえる．

- $|zw| = |z||w|$．すなわち,「積の長さ＝長さの積」．
- zw は w の長さ $|w|$ を $|z|$ 倍し，さらに $\arg z$ 分回転させた点．記号で書くと，

$$\arg zw = \arg z + \arg w.$$

すなわち,「積の偏角＝偏角の和」．ただし，この等式は 360 度×整数回転分のズレを許す．

9.1.1 極表示とオイラーの公式

複素数 z にたいし，$r = |z|$，$\theta = \arg z$ と書くと，

$$z \;=\; x + yi \;=\; r\cos\theta + (r\sin\theta)i \;=\; r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

をえる．ただし，$z = 0$ のときは便宜的に $\arg z = 0$ としておく．最後の式を，複素数 z の**極表示** (もしくは極座標表示，polar form) とよぶ．この記号の良いところは，$w = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ のような別の複素数があるとき，単純な式変形と三角関数の加法定理により

$$zw \;=\; rR(\cos(\theta + \Theta) + i\sin(\theta + \Theta)) \tag{1}$$

と書ける点にある．これは上で幾何学的に説明された積に関する法則を見事に表現している．

さらに便利な記号を導入しよう．有名な**オイラーの公式** (Euler's formula)

$$e^{i\theta} \;=\; \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いる．ここで，左辺は自然対数の底 e の複素数 $i\theta$ 乗である．また，右辺は長さ 1，偏角 θ の複素数であることはあきらかであろう．この記号の正当化は後に述べる複素解析の教科書をみていただくことにして，ここでは無批判的に，単なる記号として用いよう．すると，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ にたいし，

$$z \;=\; re^{i\theta} \;=\; r\exp(i\theta)$$

と表現できる．さきほどの w は $Re^{i\Theta}$ であるから，これらの積は（さらに無批判的に指数法則を適用すると）

$$zw \;=\; (re^{i\theta})(Re^{i\Theta}) \;=\; rRe^{i(\theta+\Theta)} \tag{2}$$

と書き表される．とくに，式 (1) と極形式の式 (2) とで，つじつまがあっていることに注意しよう．少なくとも，記号としては何の矛盾も生じないことがわかる．

ド・モアブルの公式. 複素数 $z = re^{i\theta}$ にたいし，その n 乗（$n \in \mathbb{Z}$）を考えてみよう．とりあえず,「指数法則」によれば

$$z^n \;=\; (re^{i\theta})^n \;=\; r^n e^{in\theta} \;=\; r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

となり,「長さは n 乗され，偏角は n 倍される」 というルールが得られる．

複素数の累乗根． まず，複素数の平方根が何か考えてみよう．すなわち，あたえられた複素数 z について，方程式

$$w^2 \;=\; z$$

をみたす w をもとめるのである．$z = 0$ のときは $w = 0$ とすればよいだろう．では一般に $z \neq 0$ のとき，解 $w \neq 0$ が存在するのだろうか？ここで，極形式とオイラーの公式を援用しよう．$z = re^{i\theta}, w = Re^{i\Theta}$ と書くと，上の方程式は

$$(Re^{i\Theta})^2 \;=\; re^{i\theta} \iff R^2e^{i2\Theta} \;=\; re^{i\theta}$$

となる．両辺の表す数の絶対値（原点からの距離）に着目すれば,

$$\iff R^2 \;=\; r \iff R \;=\; \sqrt{r} \quad (R>0)$$

をえる．あとは $e^{i2\Theta}=e^{i\theta}$ となる Θ を探せばよい．ここで単純に $2\Theta=\theta$ と考えてはいけない．偏角は 2π ラジアンの整数倍分のずれを許すから

$$2\Theta \;=\; \theta+2\pi\times m \quad (m\in\mathbb{Z})$$

すなわち

$$\Theta \;=\; \frac{\theta}{2}+\pi\times m \quad (m\in\mathbb{Z})$$

をえる．結局，w は

$$w \;=\; \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi\times m)} \;=\; \sqrt{r}e^{i\theta/2}(e^{i\pi})^m$$

の形をしていることがわかったが，$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ となることから実質的に

$$w \;=\; \pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

と表されることがわかった．

同様の議論を行えば，方程式 $w^n=z$ を満たす w （ただし n は自然数）もすべて求めることができる．実際に計算すると，

$$w \;=\; r^{1/n}e^{i\theta/n}\cdot(e^{2\pi i/n})^m \quad (m\in\mathbb{Z})$$

となるが，最後の $e(e^{2\pi i/n})^m$ $(m\in\mathbb{Z})$ の部分のバラエティーは実質 n 個しかないので，$w_0=r^{1/n}e^{i\theta/n}$，$\omega=e^{2\pi i/n}$（1 の n 乗根のひとつ）とおくと

$$w \;=\; w_0,\ w_0\cdot\omega,\ w_0\cdot\omega^2,\ \ldots,\ w_0\cdot\omega^{n-1}$$

という n 個の複素数となる．これらは，複素平面上で原点中心の正 n 角形上に配置される.（$z=0$ のときは正 n 角形がつぶれてしまい，1 個だけになる.）

9.1.2 代数学の基本定理

n 乗根の存在は，w の方程式 $w^n=z$ の形の方程式が解けて，n 個の解を持つことをしめしている．一般に，複素数を係数とする方程式

$$a_nw^n+a_{n-1}w^{n-1}+\cdots+a_1w+a_0 \;=\; 0 \quad (a_n\neq 0)$$

は解を持つだろうか？これを保証するのが，ガウスによる次の定理である：

定理 9.1 (代数学の基本定理) 上の方程式はかならず，重複度込みで n 個の複素数解をもつ．すなわち，互いに異なる複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \le n)$ と自然数 $d_1, \ldots, d_k$ で $d_1 + \cdots + d_k = n$ をみたすものが存在して，上の方程式は

$$a_n(w-\alpha_1)^{d_1}\cdots(w-\alpha_k)^{d_k} = 0$$

と書ける．

9.2 数列と級数の収束

複素数列の収束と極限． 複素数の列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ がある $\alpha \in \mathbb{C}$ に**収束** (converge) するとは，任意に小さい $\epsilon > 0$ にたいし，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \ge N$ であれば

$$|a_n - \alpha| < \epsilon$$

が成立するときをいう．すなわち，α 中心半径 ϵ の円板内に数列の a_N 以降がすべて含まれる状態をいう．この α を $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**極限** (limit) とよび，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ もしくは $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ と表す．

級数の収束． ある複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ があるとき,「n 項目までの和」の列

$$a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 + a_2, \quad \cdots$$

の極限を考えよう．たとえば $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ のとき,

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \ = \ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

の極限はたしかに存在する．しかし $a_n = n$ などとおけば,

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \ = \ 1 + 2 + \cdots + n \ = \ \frac{n(n-1)}{2}$$

となり発散してしまう．ともあれ，極限値が存在するかしないかは分からないが，式として

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ = \ a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

を極限 $\lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ と定義してみる．これを $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に関する**級数** (series) とよぶ.

極限が存在するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は**収束** (converge) するといい，存在しないとき**発散** (diverge) するという.

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ とは，複素平面で考えると 0 から $+a_1$ 進み，さらに $+a_2$ 進み，さらに $+a_3$ 進み…と無限に続けたものだと考えられる．これらを矢印で結び折れ線を描けば，その様子が幾何学的に見て取れるようになる．

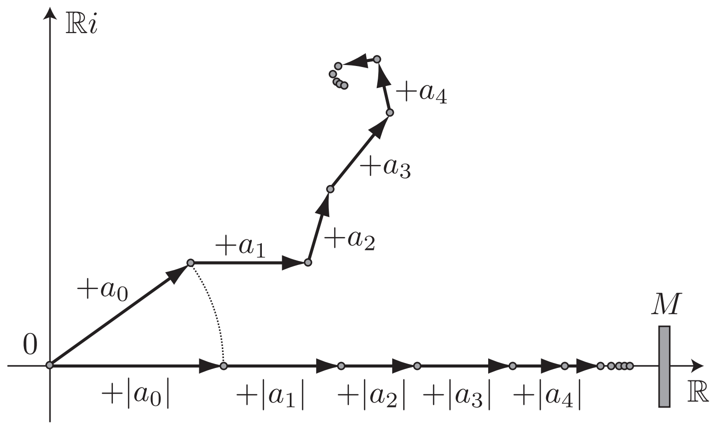


図 9.1: 級数は複素平面上の折れ線である．

さて，級数に対応する折れ線の長さを考えてみよう．折れ線は数列を足すごとに増加していくが，もし，永遠に続けて，そのトータルの長さが有限だった場合はどうだろう．直感的に，その級数は収束するに違いない（というか，発散のしようがない）．折れ線のトータルの長さは級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \;=\; |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots$$

によって表される．この値が有限ということは，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束することを意味する．すなわち，

定理 9.2 (絶対収束) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する．

級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は**絶対収束** (absolute convergence) すると呼ばれる．上の定理は「絶対収束する級数は収束する」と言い換えられる．[2]

---

[2] この定理の逆は成立しない．すなわち，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するからといって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとはかぎらない．たとえば，

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \;=\; \log 2$$

9.3 冪（べき）級数に関する覚書（もっと具体例を入れる）

級数の中でも，関数の形をした

$$f(z) \;=\; a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + a_3(z-\alpha)^3 + \cdots$$

は，α 中心の z に関する**冪級数** (power series) とよばれる．

多項式のお化けのような形をしていて，関数としての性質は直感が効かないかもしれない．だが実際には，$|z-\alpha|$ が非常に小さい場合を考えることが多く，イメージとしては $|z|<1$ における展開

$$\frac{1}{1-z} \;=\; 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

に近い．無理数を $\pi = 3.141592\ldots$ のように十進小数展開するのと同じアイディアで，左辺の関数をより細かいピースにわけて表現するのである．

以下では，冪級数に関する重要な性質をまとめておく．表記をシンプルにするため，級数は平行移動させて $\alpha = 0$ の場合で書き下すことにする．すなわち，

$$f(z) \;=\; a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

である．基本的に，$|z|$ がある程度小さい場合（$|z| < 0.1$ など）をイメージすればよい．

収束性の保証． さていま，$f(0)$ がつねに意味をもつことは明らかであろう．しかし，何の条件もなく $z \neq 0$ をあたえたとき，$f(z)$ の級数が収束する保証はまったく無い．しかも，仮にある z で収束したからといって，その近くの z' で収束するかどうかわからない．ところが，次のことが知られている：

> **冪級数の性質１（絶対収束性）．** ある $z_0 \neq 0$ において $f(z_0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が収束したと仮定する．このとき，$|z_0|$ よりも少しでも小さな $r>0$ を選べば，$\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は（絶対）収束する．

ここで，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ はたんに収束だけしていればよく，絶対収束性まで知る必要はない．それだけで，円板 $\{|z| < |z_0|\}$ における収束性が保証されるのである．じつは，ある正定数 $M = M_r$ が存在して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \le M$ をみたすこともわかる．すなわち，折

であるが，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \;=\; \infty\ \text{（発散）}$$

が知られており，これは絶対収束していない．すなわち，長さの無限大の折れ線が $\log 2$ に向かって折りたたまれていく感じである．

れ線の長さは一定以下なのである．このような状況を,「冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $\mathbb{D}(r)$ 上で一様に絶対収束する」という．

関数としての連続性． 性質 1 より，$f(z)$ は関数 $f : \overline{\mathbb{D}}(r) \to \mathbb{C}$ として意味をもつことがわかった．では，この関数はどのような性質をもつのだろうか？:

> **冪級数の性質 2（連続性と正則性）．** $\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が一様に絶対収束するとき，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上で連続，しかも正則である．

導関数の存在． つぎに，右辺の級数を忘れて $f(z)$ だけ，関数としての作用だけを考えてみよう．このとき導関数 $f'(z)$ はどのような性質をもつのだろうか？

> **冪級数の性質 3（微分可能性）．** 性質 2 の条件のもと，$\mathbb{D}(r)$ 上で導関数 $f'(z)$ が存在して，$f'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ がなりたつ．とくに，右辺の級数は $\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上で一様に絶対収束しており，連続かつ正則である．

この性質はたいへん都合がよい．われわれは無批判的に $f(z)$ の右辺の級数を項ごとに微分して，その和を $f'(z)$ としてよいのである．しかも，項ごとに微分してえられた級数もまた，連続性・正則性をもつ．すなわち，$f(z)$ は何度でも好きなだけ微分できるのである．

ちょっとだけ，幾何学的なイメージも膨らませておこう．いま，$f(z)$ は z に依存する長さ有限の折れ線であった．その n 番目の線分を表すのが $+a_n z^n$ であり，これらは z に依存して一斉に，速度 $n a_n z^{n-1}$ で動く．性質 3 は折れ線の端点に当たる $f(z)$ のスピードが，これら線分の速度の和（有限の値）であたえられる，と主張しているのである．

有限項での近似． 次に述べる性質は，ものすごくよく使われる重要な性質である．そのわりに証明を見かけないので，証明つきで述べることにしよう．まずは条件をできるだけ緩くして述べてみる：

> **冪級数の性質 4（有限項での近似）．** ある $z_0 \neq 0$ において $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が収束したと仮定する．このとき，$|z_0|$ よりもすこしでも小さな半径 $r > 0$ をとれば，
> すべての $N \geq 0$ にたいし，ある定数 $C = C(N, r, |z_0|) > 0$ が存在して，$\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上
> $$|f(z) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N)| \;\leq\; C|z|^{N+1}$$

とできる．すなわち，

$$f(z) \;=\; a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N + O(z^{N+1}) \;\; (z \to 0)$$

である．

主張の仮定にあたる部分は性質 1 と同じであるから，$\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上でこの級数が収束することはわかっている．しかし証明では性質 1 を使う必要はなく，収束性まで込みで教えてくれる：

性質 4 の証明. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ は収束するので，$a_n z_0^n \to 0 \ (n \to \infty)$ でなくてはならない．[3] したがってある $M > 0$ が存在して，$|a_n z_0^n| \le M$ がすべての $n \ge 0$ で成り立つとしてよい．

ここで，$0 < r < |z_0|$ としよう．$z \in \overline{\mathbb{D}}(r)$ のとき，

$$|a_n z^n| \;=\; |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \;\le\; M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
\left|f(z) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N)\right| \;&=\; \left|a_{N+1} z^{N+1} + a_{N+2} z^{N+2} + \cdots\right| \\
&\le\; \left|a_{N+1} z^{N+1}\right| + \left|a_{N+2} z^{N+2}\right| + \cdots \\
&\le\; M\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^{N+1} + \left|\frac{z}{z_0}\right|^{N+2} \cdots\right) \\
&\le\; M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^{N+1} \left(1 + \left|\frac{z}{z_0}\right| + \left|\frac{z}{z_0}\right|^2 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

いま，$|z/z_0| \le r/|z_0| < 1$ であるから，$\delta := r/|z_0|$ とおけば

$$|f(z) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^N)| \le M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^{N+1} \left(1 + \delta + \delta^2 + \cdots\right) \le \frac{M}{|z_0|^{N+1}(1-\delta)} \cdot |z|^{N+1}$$

をえる．あとは，最後の $|z|^{N+1}$ の前の係数を C とすればよい．

蛇足の感もあるが，性質 1 の証明もかねて，$f(z)$ が絶対収束することをみておこう．上の一連の不等式において $N = 0$ とすると，$z \in \overline{\mathbb{D}}(r)$ のとき

$$|f(z) - a_0| \;\le\; |a_1 z| + \left|a_2 z^2\right| + \cdots \;\le\; C|z| \;\le\; C|z_0|$$

である．したがって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \le |a_0| + C|z_0|$ であり，右辺は z に依存しない数であるから，$f(z)$ は絶対収束しているのである． ■

[3] $S_n = a_0 + \cdots + a_n z_0^n$ とすれば，S_n と S_{n-1} は同じ数に収束する．したがって $a_n z_0^n = S_n - S_{n-1}$ は 0 に収束．

冪級数の四則. 関数には四則演算が考えられるが，級数の場合はどうであろうか？例えば関数の和 $f(z)+g(z)$ の冪級数が，冪級数の和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ であたえられる保証は，収束性のチェックなしでは得られない．以下で述べる性質は一見あたりまえのようだが，実際にはかなりデリケートなのである．

冪級数の性質５（四則演算）. $\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上で $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ と $g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ が一様に絶対収束すると仮定する．このとき，以下がなりたつ：

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ も絶対収束して，$f(z)+g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}a_ib_j\right)z^n$ も絶対収束して

$$f(z)g(z) \;=\; a_0c_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots.$$

3. $a_0 \neq 0$ のとき，ある正の数 $r' < r$ と円板 $\mathbb{D}(r')$ 上で絶対収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \quad (c_0=1/a_0)$ が存在して

$$\frac{1}{f(z)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

をみたす．

すなわち，和，積，商の操作は冪級数の範囲内でかなり無批判的にできるわけである．

逆関数の性質. さて $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が原点のある近傍で収束するとき，これは関数を定めている．適当な条件のもとで，その逆関数を考えることができる：

冪級数の性質６（逆関数）. $\overline{\mathbb{D}}(R)$ 上で $w=f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が一様に絶対収束すると仮定する．さらに $f'(0)=a_1\neq 0$ と仮定するとき，ある $r<R$ が存在して，$f:\overline{\mathbb{D}}(r)\to f(\overline{\mathbb{D}}(r))$ は同相写像である．

また，ある円板 $\overline{\mathbb{D}}(a_0,R')\subset f(\overline{\mathbb{D}}(r))$ において一様に絶対収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n(w-a_0)^n$ が存在して，$z=f^{-1}(w)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n(w-a_0)^n$ を満たす．

この性質は逆関数の定理の特別な場合であり，証明もほとんど同様である．逆関数も局所的であれば冪級数の範疇で構成できてしまうという事実にも注目しておこう．

性質 6，単射性の証明． f の像のほうで適当に平行移動による座標変換をして，$f(0)=0$ としてよい．また，$f(z)/a_1$ をあらためて $f(z)$ とおいて，これについて単射性をしめせば十分である．これで $f(z)=z+\sum_{n\geq 2}a_nz^n$ となり，すっきりと書けた．

さて，$0<r<R$ なる r を任意に固定し，$z_1,z_2\in\mathbb{D}(r)$ としよう．$n\geq 2$ のとき，三角不等式より

$$\begin{aligned}|a_nz_1^n-a_nz_2^n| &\leq |a_n||z_1-z_2|(|z_1|^{n-1}+|z_1|^{n-2}|z_2|+\cdots+|z_2|^{n-1})\\ &\leq |z_1-z_2|\cdot n|a_n|r^{n-1}\end{aligned}$$

をえる．$f(z_1)=w_1, f(z_2)=w_2$ とおくと，再び三角不等式より

$$|(w_1-w_2)-(z_1-z_2)| = \left|\sum_{n\geq 2}a_n(z_1^n-z_2^n)\right| \leq |z_1-z_2|\left(\sum_{n\geq 2}n|a_n|r^{n-1}\right)$$

をえる．ここで，r が十分小さいとき $n|a_n|r^{n-1}<1/2$ とできることを示そう．まずは級数 $g(z)=\sum_{n\geq 2}na_nz^{n-1}$ を考える．右辺の級数は冪級数の性質 3 より $f'(z)$ を与える級数から 1 を引いたものである．したがって，$\overline{\mathbb{D}}(R)$ 上で一様に絶対収束している．すなわち，$|z|\leq R$ のとき，ある定数 $M>0$ が存在して一様に $\sum_{n\geq 2}n|a_n||z|^{n-1}<M$ をみたす．よって冪級数の性質 2 から，級数 $G(z)=\sum_{n\geq 2}n|a_n|z^{n-1}$ も一様に絶対収束し，連続な関数をさだめることがわかる．$r>0$ のとき $G(r)=\sum_{n\geq 2}n|a_n|r^{n-1}\geq 0$ であるが，$G(0)=0$ および G の連続性より，r が十分小さいとき $G(r)<1/2$ とできる．

したがって，

$$\begin{aligned}&|(w_1-w_2)-(z_1-z_2)| \leq |z_1-z_2|/2\\ \iff\ &|z_1-z_2|/2 \leq |w_1-w_2| \leq 3|z_1-z_2|/2\end{aligned}$$

であるが，この式は $z_1=z_2 \iff w_1=w_2$ を示している．とくに，関数 $w=f(z)$ は $\mathbb{D}(r)$ 上で単射であり，これから定まる逆関数 $z=f^{-1}(w)$ は明らかに連続である．

最後に，$z=f^{-1}(w)$ が解析的であることを示そう．正則性を示せば十分であるから，$w=0$ に近い任意の w_1 で微分可能であることをチェックしよう．

まず f は $\mathbb{D}(r)$ 上で微分可能であるから，等式

$$\frac{w_1-w_2}{z_1-z_2}=1+\sum a_n\frac{z_1^n-z_2^n}{z_1-z_2}$$

において $z_2\to z_1$ とした極限として等式

$$f'(z_1)=1+\lim_{z_2\to z_1}a_n\frac{z_1^n-z_2^n}{z_1-z_2}$$

が成り立つ．$f'(z)$ の連続性および $f'(0)=1$ より（必要があれば r を小さく取り直して）$z_1 \in \mathbb{D}(r)$ のとき $f'(z_1) \neq 0$ としてよい．$w_2 \to w_1$ とすれば，$z_2 \to z_1$ であるから，上の式の逆数の極限として

$$\lim_{w_2 \to w_1} \frac{z_1 - z_2}{w_1 - w_2} \ = \ \lim_{z_2 \to z_1} \left(1 + \sum a_n \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} \right)^{-1} = 1/f'(z_1)$$

が定まる．すなわち $w_1 \in f(\mathbb{D}(r))$ であれば f^{-1} は微分可能であり，したがって正則である．とくに解析的であるから,（場合によっては収束半径を小さく取り直すことで）級数展開をもつ． ■

冪級数の合成． 最後に，冪級数の合成についてまとめておく．われわれは写像の反復合成をあつかうのだから，多少厄介とはいえ触れないわけなにはいかないだろう．

$f(z), g(z)$ が冪級数のかたちで与えられていて，かつ $g(f(z))$ が定義できたとしよう．そのとき，その展開公式はどのようになるのだろうか？

冪級数の性質 7（合成）． 原点の近くで $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ および $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ が一様に絶対収束しているとする．このとき，ある十分小さな $r > 0$ が存在して，$\mathbb{D}(r)$ 上で

$$g(f(z)) \ = \ b_0 + b_1 f(z) + b_2 f(z)^2 + \cdots$$

が収束して，

$$g(f(z)) \ = \ b_0 + b_1 a_1 z + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2) z^2 + (a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3) z^3 + \cdots$$

を満たす．ただし，z^n の係数は $f(z)$ と $g(z)$ の n 次以下の係数のみで決定される．

以下で証明するように，$g(z)$ と $f(z)$ が冪級数であたえられた場合，その n 次以下の係数が分かっていれば，有限回の計算で $g(f(z))$ の n 次以下の係数が計算できる．すなわち合成関数の冪級数も，収束性などさほど気にすることなく，無批判的にそのまま計算できるわけである．

性質 7 の証明． $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ は $\overline{\mathbb{D}}(R)$ 上で一様に絶対収束し，連続な関数をさだめてるとしよう．$f(z)$ は $z=0$ の近傍で定義された連続関数となるから，$f(0)=0$ より r が小さければ $f(\mathbb{D}(r)) \subset \overline{\mathbb{D}}(R)$ とできる．このとき $g(f(z))$ 自体は意味をもつわけである．したがって，$g(f(z))$ の z^n の係数は g と f の n 次以下の部分で決定されることをチェックすればよい．

ここではもう少し精密に，次のこともあわせて証明しよう：

$f(z)$ の最初の n 項目までを $p(z) = a_1 z + \cdots + a_n z^n$ とおくとき，ある $M = M(f, g, n) > 0$ が存在して，

$$\left| g(f(z)) - \left\{ b_0 + b_1 p(z) + b_2 p(z)^2 + \cdots + b_n p(z)^n \right\} \right| \ \leq \ M |z|^{n+1}$$

この式からも，左辺の絶対値記号の中身には z^n 以下が含まれないことがわかる．

いま $g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots + b_n w^n + E(w)$ とおき，$\overline{\mathbb{D}}(R)$ において $|E(w)| \leq K|w|^{n+1}$ がなりたつとしてよい（冪級数の性質４）．今後記号として，冪級数の $n+1$ 次以上からなる部分を $[w^{n+1}]$ と表すことにすれば，$E(w) = [w^{n+1}]$ である．

同様に，

$$f(z) \ = \ a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + e(z)$$

とおき，$\overline{\mathbb{D}}(r)$ において $|e(z)| \leq L|z|^{n+1}$ がなりたつとしてよい．もちろん $e(z) = [z^{n+1}]$ である．さて

$$g(f(z)) \ = \ b_0 + b_1 f(z) + b_2 f(z)^2 + \cdots + b_n f(z)^n + E(f(z))$$

を考えよう．いま r は十分に小さく，$\mathbb{D}(r)$ 上ある定数 $C > 0$ が存在して，$|f(z)| \leq C|z| < Cr < R$ が成り立つとしてよい（ふたたび性質４）．したがって，$|E(f(z))| \leq KC^{n+1}|z|^{n+1}$ がなりたつ．とくに $f(z) = [z]$ であるから，$|E(f(z))| = [z^{n+1}]$ である．

つぎに各 $k = 1, 2, \ldots n$ について，ある $M_k > 0$ が存在して，$f(z)^k = (a_1 z + \cdots + a_n z^n)^k + e_k(z)$ とおくと，$e_k(z) = [z^{n+1}]$ かつ $|e_k(z)| \leq M_k |z|^{n+1}$ をみたすことしめそう．

$p(z) = f(z) - e(z)$ は多項式であるから，$|p(z)|$ には $\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上の最大値 P が存在する．一方 $e(z)$ は級数であるが，$\overline{\mathbb{D}}(r)$ 上 $|e(z)| \leq Lr^{n+1}$ を満たしている．右辺の値を Q としよう．二項定理より

$$f(z)^k \ = \ (p(z) + e(z))^k \ = \ p(z)^k + kp(z)^{k-1}e(z) + \cdots + e(z)^k \ = \ p(z)^k + [z^{n+1}]$$

であるから，$e_k(z) = [z^{n+1}]$．さらに精密に，三角不等式より

$$\begin{aligned} |e_k(z)| \ = \ |f(z)^k - p(z)^k| \ &\leq \ |e(z)|\bigl(k|p(z)|^{k-1} + \cdots + |e(z)|^{k-1}\bigr) \\ &\leq \ |e(z)|(kP^{k-1} + \cdots + Q^{k-1})| \\ &\leq \ L(kP^{k-1} + \cdots + Q^{k-1})|z|^{n+1} \end{aligned}$$

がわかる．最後の $|z|^{n+1}$ の係数を M_k とすればよい．

いま上の $g(f(z))$ の式を変形すると

$$\begin{aligned} & g(f(z)) - \bigl\{b_0 + b_1 p(z) + b_2 p(z)^2 + \cdots + b_n p(z)^n\bigr\} \\ = \ & b_1 e_1(z) + b_2 e_2(z) + \cdots + b_n e_n(z) + E(f(z)) \end{aligned}$$

であり，下側の式は $[z^{n+1}]$ であるから，$g(f(z))$ の n 次以下の項が $b_0 + b_1 p(z) + b_2 p(z)^2 + \cdots + b_n p(z)^n$ のそれと一致するということを意味する．よって，これらの項が f および g の n 次以下の係数によって決定されることがわかった．また，これまでの計算と三角不等式により，下側の式の絶対値は

$$\bigl(|b_1|M_1 + \cdots + |b_n|M_n + KC^{n+1}\bigr)|z|^{n+1}$$

以下である．この係数を M とすれば主張を得る． ■

読書ガイド

このノートではおもに 2 次多項式の力学系とマンデルブロー集合の性質についてまとめてきました．もちろん，複素力学系理論の範疇はこれだけにとどまりません．高次の多項式や有理写像から生成される力学系にはいまだ未知の部分が多いですし，高次元複素多様体上の力学系になると，さらにわからないことだらけ，といった状況です．

この分野についてもっと勉強したい，もっと知りたいという読者のために，いくつか参考文献をあげておきます．個人で入手することの難しい本もありますが，いずれも大学の図書館（もしくは数学科の図書室）に行けば手に取ることができると思います．

複素数，複素関数論の入門書． 1 変数の複素関数や正則写像の性質は,「複素関数論」もしくは単に「関数論」（函数論）とよばれる分野であつかわれます．大学の理学部や工学部に所属する学生のみなさんはすでにおなじみでしょう．

この分野の教科書は数え切れないほどあって，好みも分かれるところでしょうが，ここでは

(1) 志賀浩二『複素数 30 講』朝倉書店（1989）

(2) L. アールフォルス『複素解析』現代数学社（1982）

(3) 志賀啓成『複素解析学 I，II』培風館 (1998?)

(4) 谷口雅彦『もう一つの函数論入門』京都大学学術出版会 (2002)

を挙げてみます．(1) は初学者にはとっつきやすい『30 講シリーズ』のひとつです．まずさっと眺めて，複素数の世界を概観するにはちょうどよいのではないでしょうか．一方，(2) はもはや古典の域にある，本格的かつ標準的な教科書です．ちなみに著者アールフォルス (Lars Ahlfors) は第 1 回目のフィールズ賞受賞者であり，幾何学的関数論とよばれる分野を開拓し，整備しました．あとのふたつの本は，応用として複素力学系理論が登場するのが特徴的です.（その意味では，下の「複素力学系の教科書」の項に含めるべきかもしれません.）(3) では，II 巻の後半に複素力学系についての解説があります．(4) は関数論の教科書の体裁をとりながら並行して複素力学系の解説をする，たいへんユニークな本です.

リーマン球面上の幾何学． 有理関数により力学系は球面上の力学系として自然に定式化できるのでした．多くの場合は平面に射影することで複素平面上の関数として表現しますが，球面上の幾何学も理解しておくと，もとの力学系を豊かにイメージできるようになります．リーマン球面上の幾何学やそれに関連する非ユークリッド幾何（双曲幾何など）の入門書も数多くありますが,

(5) 谷口雅彦，奥村善英『双曲幾何学への招待』培風館（1996）

は複素数との関連が明確です．ただし，後半登場するタイヒミュラー空間についての記述は研究者レベルの内容で，難しいと思います．他はこの本の巻末にある参考文献を参照するとよいでしょう．

複素力学系の教科書（日本語）． 複素力学系理論について書かれた日本語の本はあまり多くありません．たとえば

(6) 上田哲生，谷口雅彦，諸澤俊介『複素力学系序説』培風館（1995）

(7) 宇敷重広『フラクタルの世界–入門・複素力学系』日本評論社（1987）

(8) R.L.Devaney『カオス力学系入門・第 2 版（新訂版）』共立出版 (2003)

(9) デヴァニー『カオス力学系の基礎』アジソン・ウェスレイ (1997)

等があります．(6) は 1 次元から高次元の複素力学系理論までが概説されており，盛りだくさんの内容です．そのため辞典的な価値は高いのですが．記述は研究者レベルで，読み進めるにはたいへん多くの知識と経験が要求されます．(7) は雑誌『数学セミナー』の連載記事を本にまとめたものです．ＣＧが多く，眺めるだけでも楽しめる本ですが，理論的な側面にも簡潔ながら明解な説明がなされています．80 年代当時，複素力学系の研究が爆発的に進んでいたころの雰囲気が感じ取れます．(8) は力学系理論の入門書として，広く読まれている本です．(9) は，(8) の内容を数値実験の例とともに易しく解説した本です．(8)，(9) とも，後半が複素力学系にあてられています．

複素力学系の教科書（英語・仏語）．

(10) A.F. Beardon. *Iteration of Rational Functions.* Springer-Verlag, 1991.

(11) L. Carleson and T. Gamelin. *Complex Dynamics* . Springer-Verlag, 1993.

(12) J.Milnor. *Dynamics in one complex variables. (3rd Edition).* Princeton University Press, 2006.

(13) N.Steinmetz. *Rational iteration.* De Gruyter, 1993.

(14) A. Douady and J. H. Hubbard. *Etude dynamique des polynômes complexes I & II.* Pub. Math. d'Orsay 84–02, 85–05, 1984/85.

(10) はきっちりと書かれていて，初学者にも読みやすい本です．その分，くどく感じる人もあるようですが．

(11) は解析学（不等式）の扱いにかなり慣れている人むけ．擬等角写像の使い方を覚えながら読み進める必要があり，大学院生でも苦労するでしょう．しかし，現代的な複素力学系理論のエッセンスが，少ないページ数でエレガントにまとまっています．

(12) の著者はトポロジーで有名な J. ミルナー．彼の他の著作同様，持ち前の明晰な筆致で，たいへんすっきりと書かれている本．(11) とは対照的に，どこか幾何学的な香りがただよいます．前半は，ファトウ・ジュリア時代の古典的複素力学系理論が，現代風の言葉でまとめられています．後半は 80 年代初頭に展開された多項式の力学系，とくにジュリア集合の形状についての結果がまとめられています．版が進むごとに最新の結果も取り入れられていますが，擬等角写像についてはあいかわらず付録で登場するだけで，研究者にとっては物足りなさも残ります．

(13) は，内容的には (11) に近いのですが，記述のセンスは (10) に近く，そのぶん簡明に書かれている印象を受けます．

(14) はドュアディ・ハバード理論の原典．オリジナルのフランス語版も，その英訳版も，ハバードのホームページからダウンロードできます (2009 年 3 月現在)．

複素力学系の道具立て． 擬等角写像の本．リーマン面の本．タイヒミュラー空間論の本．

フラクタル理論． **一般の力学系理論．**

おわりに

—L'espoir, c'est de savoir, dit Reb Mendel. —Mais ses disciples n'étaient pas tous d'accord avec lui.
「希望，それは知るということへの希望だ.」とレブ・マンデルが言った．だが弟子たち皆が同意見ではなかった.

—Encore faut-il nous entendre sur le sense que tu donnes au mot ≪ savoir ≫, dit le plus ancien d'entre eux.
「われわれはまず，先生が『知る』という言葉に与えておられる意味について合意せねばなりません.」と一番年長の弟子が言った.

—Savoir, c'est questionner, répoindit Reb Mendel.
「知るとは問うことだ」とレブ・マンデルが答えた.

—Que tirerons-nous de ces questions ? Que tirerons-nous de toutes les réponses qui nous entraîneront à poser d'autres questions, puisque toute question ne peut neître que d'une réponse insatisfaisante ? dit le seconde disciple.
「これらの問いから，何が得られるのです？さらなる問いにしかつながらないこれらの答から，何が得られるのです？そもそも問いというものは，不十分な答から生まれるものです.」と二番目の弟子が訊ねた.

—La promesse d'une nouvelle question, répondit Reb Mendel.
「新しい問いへの約束だ」とレブ・マンデルが答えた.

—Il arrivera bien un moment, reprit le plus ancien disciple, où il nous faudra cesser d'interroger, soit parce qu'à notre question il ne pourra être donné aucune réponse, soit parce que nous ne saurons plus formuler nos questions, alors à quoi bon commencer ?
「問うことをやめねばならぬ時がやがて訪れるでしょう」と一番年長の弟子がふたたび言った.「もはやいかなる答も可能でなくなるから，あるいは，もうそれ以上問いを作れなくなるから．ならば，なぜそもそもはじめるのです？」

—Tu vois, dit Reb Mendel, au bout du raisonnement, il y a toujours, en suspens, une question décisive.
「いいかね」レブ・マンデルは言う.「議論の終わりには，いつもある決定的な問いが問いのまま残される.」

—Questionner, reprit le second disciple, c'est s'engager dans la voie du désespoir puisque jamais nous ne saurons ce que nous cherchons à apprendre.
「問いとは」と二番目の弟子がふたたび言った.「絶望への道を歩むことです自分たちが何を学ぼうとしているのか，われわれは決して知りえないでしょう.」

— E.Jabès "*Le livre des questions*" ジャベス『問いの書』より