

はじめに

この本『レクチャーズ オン *Mathematica*』は、数学の教育や研究に（現在もしくは将来）携わる人をおもな対象として、数式処理ソフトウェア *Mathematica* の基本と応用についてまとめたものです。

私が過去に担当した *Mathematica* の入門講義、『計算数学基礎』の講義プリントがこの本のもとになっています。数学を専門とする学部 2 年生向けに開講され、「数理科学の諸問題に対しコンピューターを活用するための基礎知識を習得する」ことが目標でした。とにかくプリントにしたがって入力していけば、自然と *Mathematica* の運用方法とセンスが身につくように、慎重に講義を組み立てました。

テーマは高校レベルから最先端の数学まで、幅広く扱いました。一方で、講義の入門的な性格から、*Mathematica* の高度な利用法には触れていません。とくに、入力の短かさや計算効率は重視せず、多少泥臭いやり方であっても「数学的に親しみやすい」方法を教えることにしました。また、教員志望の学生も多かったので、高校の授業で *Mathematica* を活用する場面も考慮して、大学の入試問題も例題として進んで取り入れられました。

その講義の内容を書籍という形で再現した結果、*Mathematica* の「使える自習書」であり、かつ「現代数学への入門書」である、という欲張りな本ができあがりました。この本と *Mathematica* を通して、積み木のように自分で数学を組み立てていく、そんな感覚を楽しんでいただけたらと思います。

謝辞. まずは本書を企画していただいたプレアデス出版の麻畑仁氏に感謝します。フルカラーで *Mathematica* の本を書くのは、抜群に贅沢かつチャレンジングな体験でした。また本書のもとになった講義を準備する段階では、同僚の糸健太郎氏に多くの助言とアイデアをいただきました。とくに氏が過去に担当された『計算数学基礎』の講義プリントはすばらしく、この本が受けた影響は計り知れません。そして執筆段階では、入出力の動作確認と初稿のチェックを大橋裕樹氏、加藤慎也氏、鈴木雄大氏にお願いしました。この三氏の力添えなしでは、執筆に限りなく時間がかかってしまったことでしょう。この場をお借りして、お礼申し上げます。

2013 年 3 月 著者記

本書の使い方

- 本書ではバージョン 8 以降の *Mathematica* がインストールされたパソコン (Windows もしくは Mac) が手元にあることを仮定している。内容はバージョン 9 とバージョン 8 で動作確認済みであるが、かなりの部分はバージョン 7 以前のものでも動作すると思われる。
- 本書は 13 章 (CHAPTER) からなる。基礎 (1~4 章)・応用 (5~8 章)・発展 (9~13 章) に応じて緑・青・赤のテーマカラーを配した。
- 各章はある程度独立しているが、やはり 1 章から順に読み、指示通りの入力式を *Mathematica* にタイプし実行 (評価) していくことをオススメする。本書にあるとおりの動作が確認できたら、次は数値や関数を独自に変えて試してみるとよいだろう。とくに関数を自作したときは、自分で具体的な値を代入してチェックする習慣をつけよう。
- *Mathematica* でエラーや予期せぬ動作があった場合には、とりあえず 1 章から 2 章あたりを読み返してほしい。とくに 1 章にはトラブルシューティング的な意味合いも込めて、一般的な注意事項がまとめられている。
- 本文中の *Mathematica* の入力・出力には「In[99]:=」「Out[99]=」といった番号付きのラベルが打たれている。これは *Mathematica* の入出力の様式を真似たものだが、あくまで本書内での参照用と考えてほしい。実際に入出力を進めると、エラーが出て修正を加えたりしているうちに番号部分が本のものからどンドンずれていくのが普通である。そのような事情もあり、問題の解答文中の入出力ラベルは番号部分を省略して「In[]:=」「Out[] =」のように表している。
- 本書は *Mathematica* の Windows 版と Mac OS X 版両方に対応している。現時点で普及度の高い Windows をメイン、Mac をサブとして扱っているが、*Mathematica* では OS によらず外観や操作法が統一されているので使い勝手はほとんどかわらない。ただし、次のような修飾キーの違い (対応) があることに留意しておこう：

Windows		Mac
Enter	⇔	return
Delete / Backspace	⇔	delete
Ctrl / Alt	⇔	command

本書で用いる数学の記号

本書では高校から大学 1, 2 年生程度の数学の知識を仮定している. 数学で一般的に用いられる基本的な記号を列挙しておく.

数の集合

\mathbb{C} 複素数全体	\mathbb{R} 実数全体	\mathbb{Q} 有理数全体
\mathbb{Z} 整数全体	\mathbb{N} 自然数全体	\emptyset 空集合

ギリシャ文字

α アルファ / alpha	β ベータ / beta
γ, Γ ガンマ / gamma	δ, Δ デルタ / delta
ϵ イプシロン / epsilon	ζ ゼータ / zeta
η エータ / eta	θ, Θ シータ / theta
ι イオタ / iota	κ カッパ / kappa
λ, Λ ラムダ / lambda	μ ミュー / mu
ν ニュー / nu	ξ, Ξ クシー / xi
o オミクロン / omicron	π, Π パイ / pi
ρ ロー / rho	σ, Σ シグマ / sigma
τ タウ / tau	υ, Υ ウプシロン / upsilon
ϕ, Φ ファイ / phi	χ カイ / chi
ψ, Ψ プサイ / psi	ω, Ω オメガ / omega

その他

- (1) $a \leq b, c \geq d$ はそれぞれ $a \leq b, c \geq d$ と同じ意味.
- (2) $x \in X$ と書いたら, 「 x は集合 X に属する」すなわち「 x は X の元」という意味.
- (3) 「…をみたく X の元全体の集合」を $\{x \in X \mid (x \text{ に関する条件})\}$ の形で表す. たとえば $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$.
- (4) $X \subset Y$ と書いたら, 「集合 X は集合 Y に含まれる」という意味. これは $X \subseteq Y$ と同じ.

目次

はじめに	i
本書の使い方	ii
本書で用いる数学の記号	iii
CHAPTER 1 <i>Mathematica</i> 入門	1
1.1 <i>Mathematica</i> とは	1
1.2 <i>Mathematica</i> のインターフェイス	1
1.3 <i>Mathematica</i> のファイル形式	3
1.4 1セッションやってみよう	3
1.5 入力時の約束と注意点	6
1.6 値のクリア	7
1.7 シンタックス・カラーリング	8
1.8 評価の放棄	9
1.9 入力時に役立つキー操作・機能	9
1.10 ドキュメントセンターを使おう	11
1.11 セルと章見出し	12
1.12 <i>Mathematica</i> の環境設定	12
1.13 参考文献	13
CHAPTER 2 数と式	14
2.1 厳密値 vs 近似値	14
2.2 組込み定数・組込み関数	15
2.3 文字式の計算と定数の割り当て・上書き	18
2.4 式の操作（展開，因数分解，代入など）	21
2.5 大学入試問題からの例題	23
2.6 研究	24

CHAPTER 3	リストと数列	25
3.1	リストとは?	25
3.2	リストの生成	27
3.3	「リストのリスト」の行列形式・表形式	29
3.4	数列の和	32
3.5	研究	35
CHAPTER 4	方程式とグラフ	36
4.1	2 次方程式とグラフ	36
4.2	方程式の解を活用する	38
4.3	2 元連立方程式	41
4.4	グラフのオプション	43
4.5	研究: 3 元連立方程式	45
4.6	研究: 超越方程式の解の表現 (おもにバージョン 9)	47
4.7	研究	49
CHAPTER 5	微分・積分・いろんなグラフ	50
5.1	自分で関数を定義する (即時割り当て)	50
5.2	1 変数関数の微分	52
5.3	多変数関数の偏微分	54
5.4	2 変数関数の 3 次元グラフ	57
5.5	積分	61
5.6	研究	64
CHAPTER 6	行列と 1 次変換・ParametricPlot	65
6.1	行列とベクトルの演算	65
6.2	固有値・固有ベクトル	67
6.3	2 次元の 1 次変換と ParametricPlot	69
6.4	3 次元の 1 次変換と ParametricPlot3D	73
6.5	研究: 1 次変換による「向きの変化」を表現する	76
6.6	研究	78
CHAPTER 7	テイラー・フーリエ・Manipulate	79

7.1	関数の定義 (即時割り当て vs 遅延割り当て)	80
7.2	マニピュレート (Manipulate) : 動く式	82
7.3	マニピュレート (Manipulate) : 動くグラフ	84
7.4	テイラー展開	86
7.5	フーリエ展開	89
7.6	研究	92
CHAPTER 8 複素級数・複素関数の可視化		95
8.1	必要な関数の準備	96
8.2	方程式の虚数解をプロットする	97
8.3	Manipulate でロケータを使う	99
8.4	テイラー級数・オイラーの等式 $e^{\pi i} = -1$ の可視化	101
8.5	複素関数の「グラフ」	104
8.6	複素関数による正方形の像	107
8.7	研究	109
CHAPTER 9 確率実験とランダムウォーク		112
9.1	必要な関数の準備	113
9.2	乱数を作る関数	114
9.3	確率実験 (コイン投げ)	115
9.4	1次元ランダムウォーク	117
9.5	2次元ランダムウォーク	120
9.6	研究: モンテカルロ法	123
9.7	研究: 3次元ランダムウォーク	125
9.8	研究: 2次元ランダムウォークいろいろ	126
CHAPTER 10 ベクトル場と微分方程式		128
10.1	勾配ベクトル場	128
10.2	一般の2次元ベクトル場	131
10.3	微分方程式を解く (厳密解)	133
10.4	微分方程式を解く (数値解)	134
10.5	研究: ロトカ-ヴォルテラ方程式	138
10.6	研究: ローレンツ・アトラクター	141
10.7	研究: 3次元勾配ベクトル場	144

10.8	参考文献	145
CHAPTER 11 数列・漸化式と素数のふるまい 146		
11.1	コラッツの予想	146
11.2	漸化式による数列の定義	147
11.3	<code>Rsolve</code> で漸化式を微分方程式のように解く	149
11.4	偶数の判定 (ア)	150
11.5	<code>If</code> を用いた条件分岐 (イ)	151
11.6	関数と <code>Nest</code> による数列の生成 (ウ)	153
11.7	コラッツの予想を確かめる	154
11.8	研究：双子素数を探そう	156
11.9	研究：素数の分布	157
11.10	研究	158
CHAPTER 12 セル・オートマトン 160		
12.1	セル・オートマトンとは	160
12.2	<code>ArrayPlot</code> による行列の表現	162
12.3	パスカルの三角形	163
12.4	<code>If</code> による条件分岐の応用	166
12.5	セル・オートマトンを自作する	167
12.6	組み込み関数によるセル・オートマトン	170
12.7	研究	172
12.8	参考文献	172
CHAPTER 13 フラクタル 173		
13.1	フラクタルとは?	173
13.2	<code>Nest</code> 以外のループ処理 (<code>Do</code> , <code>For</code> , <code>While</code>)	174
13.3	リストをほどく, 置換する	176
13.4	複素数を折れ線で結ぶ	177
13.5	多角形を描く	178
13.6	コッホ曲線を描く: 方法 (A)	180
13.7	IFS によるコッホ曲線: 方法 (B)	184
13.8	研究: その他のフラクタル	188
13.9	研究: カントールの 3 進集合と悪魔の階段関数	191

13.10 参考文献	193
索引	194