CHAPTER 4

方程式とグラフ

Mathematica に方程式を解かせ，その解を活用する方法を学ぼう．
また，*Mathematica* に備わっている強力なグラフィックス機能を活用することで，方程式の解の幾何学的な意味を表現しよう．

4.1　2 次方程式とグラフ

普通の**方程式**（連立方程式もふくむ）は組込み関数 Solve で解くことができる．ただし，答えは「置換規則のリストのリスト」という特殊な形で返ってくるので，扱いにはそれなりの注意と工夫が必要である（くわしくは次節参照）．また解の様子をグラフで確認するには，グラフを描く関数 Plot を使うとよい．

[1] Solve で $x^2 - x - 1 = 0$ を解き，結果を sol とおく：

```
In[1]:= sol = Solve[x^2 - x - 1 == 0, x]
```

Out[1]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right\}\right\}$

Solve[...] の中の方程式は == で結ばれていることに注意しよう．（うっかり = と間違いやすい．）出力の x →... の部分が**置換規則**とよばれるものであった（2 章 2.4 節）．

[2] N で厳密解から数値解へ：

```
In[2]:= N[sol]
Out[2]= {{x → -0.618034}, {x → 1.61803}}
```

[3] NSolve で直接数値解を求める：

```
In[3]:= NSolve[x^2 - x - 1 == 0, x]
```

Out[3]= {{x → -0.618034}, {x → 1.61803}}

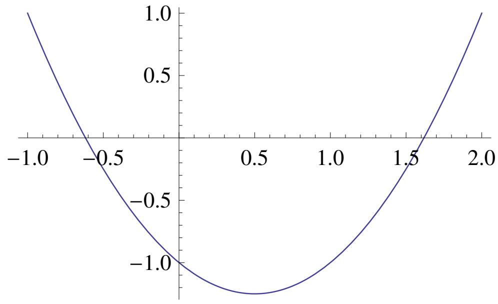
[4] 有効数字を 25 桁に指定して解く：

```
In[4]:= NSolve[x^2 - x - 1 == 0, x, 25]
```

Out[4]= {{x → -0.6180339887498948482045868},
{x → 1.618033988749894848204587}}

[5] Plot で関数 $x \mapsto x^2 - x - 1$ のグラフを描く（範囲は $-1 \leq x \leq 2$）*1：

```
In[5]:= Plot[x^2 - x - 1, {x, -1, 2}]
```

Out[5]=


グラフはデフォルトで青い線で描かれ，全体の縦横比が調整されて黄金比（約 1 : 1.62）となる．

グラフの線の色・太さ，全体の縦横比なども，必要に応じて自在に変えることができる．その方法はこのあと 4.4 節でまとめて紹介しよう．

問題 4.1（解の図示） Solve を用いて方程式 $x^3 - 19x + 30 = 0$ を解け．また Plot を用いて関数 $f(x) = x^3 - 19x + 30$ のグラフを描け．ただし，x 軸との交点がわかるように適当な描画範囲を選ぶこと．

【解答】 [1] と同様に Solve を適用する：

```
In[ ]:= Solve[x^3 - 19 x + 30 == 0, x]
```

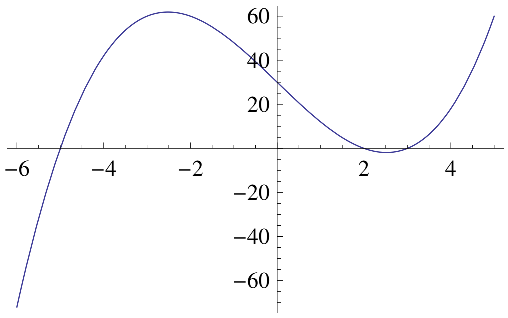
Out[ ]= {{x → -5}, {x → 2}, {x → 3}}

[5] と同様に Plot で関数のグラフを描く．（x の範囲は試行錯誤して適当に決めた）：

```
In[ ]:= Plot[x^3 - 19 x + 30, {x, -6, 5}]
```

*1 y = x^2 - x - 1; Plot[y, {x, -1, 2}] のように書いてもよい．

Out[ ]=



■

4.2 方程式の解を活用する

Solve 関数による方程式の答えは「置換規則のリストのリスト」になっている．その活用方法を紹介しよう．

[6] 置換規則の意味を復習しよう．x^3 に $x = 5$ を代入したいときは，次のように書くのであった（2 章 2.4 節）：

In[6]:=
```
x^3 /. {x -> 5}
```

Out[6]=
```
125
```

[7] さきほど [1] で求めた方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解 sol を思い出そう：

In[7]:=
```
sol
```

Out[7]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right\}\right\}$

{x → ...} の部分はひとつの置換規則だけからなるリストである．出力全体は，それがふたつあるので「置換規則のリストのリスト」となっている．なぜこのような形式が必要かは，Solve で連立方程式を解かせたときに理解できるだろう（4.3 節）．

[8] sol の解だけからなるリストを作成する：

In[8]:=
```
x /. sol
```

Out[8]= $\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\right\}$

入力式は x という文字に sol の置換規則をそれぞれ適用せよ，という意味である．sol がリストなので，解もリストとなる．

[9] 二重括弧 [[ ]] （3 章 3.2 節）で sol からひとつ目の解だけを取り出す：

In[9]:=
```
sol[[1]]
```

Out[9]= $\left\{x \to \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)\right\}$

Out[22]=　211

問題 4.4 (直線 vs 円) 連立方程式 $x+y=1,\ x^2+y^2=2$ を解き，陰関数としてのグラフを $|x|,|y| \leq 3$ の範囲で描け．また，解について x^7+y^7 の値を求めよ．

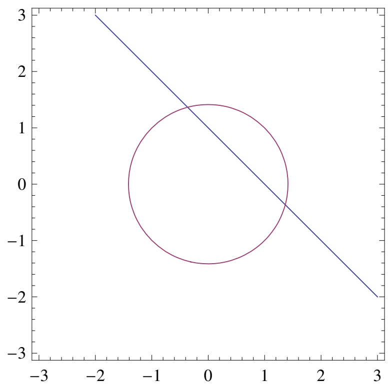
【解答】　直線と円の交点を求める：

In[ ]:=
```
s = Solve[{x + y == 1, x^2 + y^2 == 2}, {x, y}]
```

Out[ ]=
$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$$

陰関数のグラフ：

In[ ]:=
```
ContourPlot[{x + y == 1, x^2 + y^2 == 2},
                      {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Out[ ]=


解 s を x^7+y^7 に代入する．あらかじめ Simplify も施しておく：

In[ ]:=
```
Simplify[x^7 + y^7 /. s]
```

Out[ ]=
$$\left\{\frac{71}{8},\ \frac{71}{8}\right\}$$
■

4.4　グラフのオプション

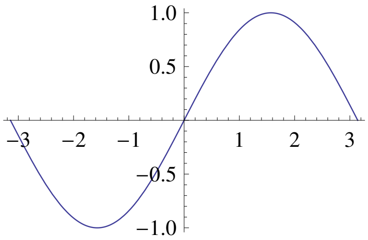
Plot や ContourPlot などのグラフィクスを描画する組込み関数では，**オプション** (option) を指定することでグラフや軸のスタイル（線の太さや色）を変化させることができる．

ここでは Plot の場合に具体例を見ていこう．

[23] まずは Plot のデフォルトの様式：

In[23]:=
```
Plot[Sin[x], {x, -Pi, Pi}]
```

Out[23]=

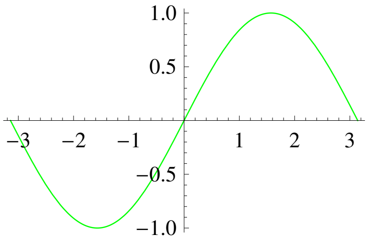


これにオプションを追加していってグラフを変化させてみよう．以下，Ctrl ＋ L を使って入力の手間を省くこと（1 章 1.9 節）．

[24] オプション PlotStyle でグラフの線を緑色に：

```
In[24]:= Plot[Sin[x], {x, -Pi, Pi}, PlotStyle -> Green]
```

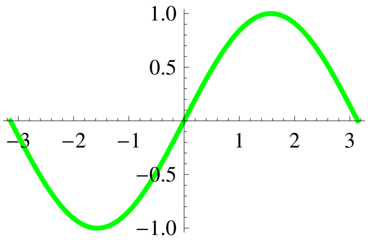
Out[24]=



[25] オプション PlotStyle でグラフの線を緑色かつ太く：

```
In[25]:= Plot[Sin[x], {x, -Pi, Pi}, PlotStyle -> {Green, Thick}]
```

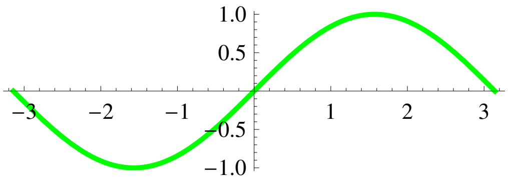
Out[25]=



[26] さらにオプション AspectRatio で縦横の縮尺を合わせる：

```
In[26]:= Plot[Sin[x], {x, -Pi, Pi}, PlotStyle -> {Green, Thick},
                                    AspectRatio -> Automatic]
```

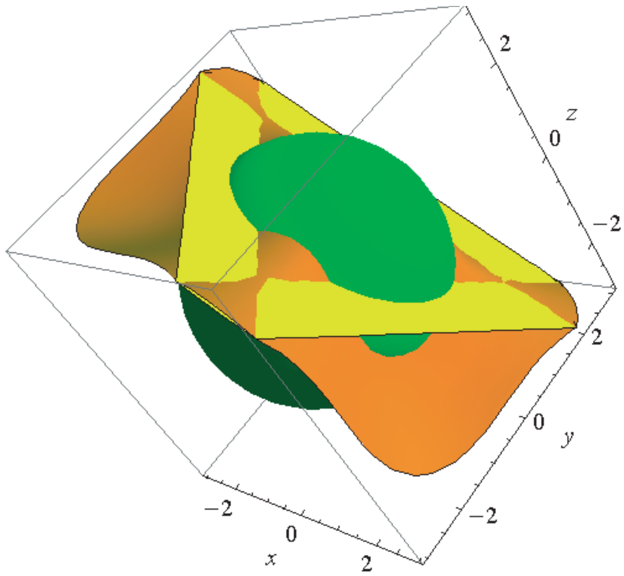
Out[26]=



[27] さらにオプション Filling で x 軸と囲まれる部分を塗る：

```
In[27]:= Plot[Sin[x], {x, -Pi, Pi}, PlotStyle -> {Green, Thick},
                                    AspectRatio -> Automatic,
```

Out[29]=



Mathematica の 3 次元グラフは画像をマウスでドラッグすることで回転・拡大・平行移動ができる．簡単にまとめておこう：

ドラッグのみ：	回転
Alt ＋ 上下にドラッグ：	拡大・縮小
Shift ＋ ドラッグ：	平行移動

4.6　研究：超越方程式の解の表現（おもにバージョン 9）

2012 年冬に登場した *Mathematica* バージョン 9 では，組込み関数の動作にいくつか変更が加えられた．そのひとつが，`Solve` における三角関数や指数関数を含む方程式（いわゆる超越方程式）の解の表現である．いくつか具体例を紹介しておこう．

[30] たとえば方程式 $\sin x = 1$ を解かせ，結果を `ans` とおく：

```
In[30]:= ans = Solve[Sin[x] == 1, x]
```

Out[30]= $\left\{\left\{\mathtt{x} \to \mathtt{ConditionalExpression}\left[\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,\mathtt{C[1]},\ \mathtt{C[1]} \in \mathtt{Integers}\right]\right\}\right\}$

なにやら難しいものが出てきたが，この解の意味は

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi C_1, \quad \text{ただし } C_1 \in \mathbb{Z}$$

と同じである．ただし，$\mathbb{Z}$ は整数 (integer) 全体の集合を表す．バージョン 8 以前では，$C_1 = 0$ の場合（$x = \pi/2$）しか解として出力されなかったので，新しいバージョ

```
In[ ]:=   kai = Solve[{Sin[x] + Sin[y] == Sqrt[3]/2,
                 Cos[x] + Cos[y] == 1/2}, {x, y}]

Out[ ]=   {{x → ConditionalExpression[2 π C[1], C[1] ∈ Integers],
            y → ConditionalExpression[2π/3 + 2 π C[2], C[2] ∈ Integers]},
           {x → ConditionalExpression[2π/3 + 2 π C[1], C[1] ∈ Integers],
            y → ConditionalExpression[2 π C[2], C[2] ∈ Integers]}}
```

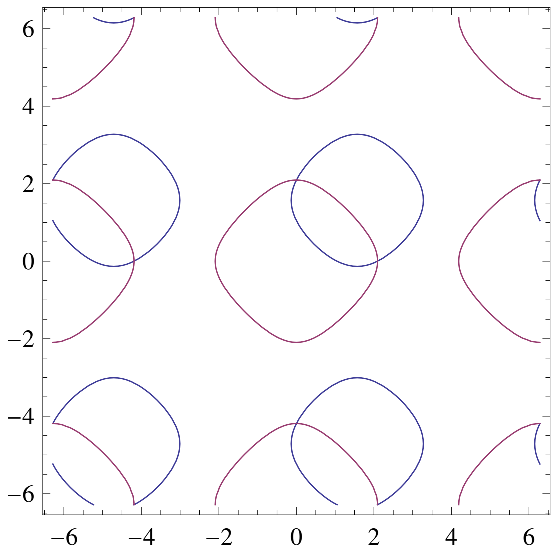
すなわち

$$(x, y) = (2\pi C_1, 2\pi/3 + 2\pi C_2) \text{ または } (2\pi/3 + 2\pi C_1, 2\pi C_2),\ \text{ただし } C_1,\ C_2 \in \mathbb{Z}$$

という形の無限個の解の組が現れる．その様子を陰関数のグラフで確かめよう．解が周期的に現れる様子がわかるだろう：

```
In[ ]:=   ContourPlot[{Sin[x] + Sin[y] == Sqrt[3]/2
               Cos[x] + Cos[y] == 1/2},
                 {x, -2 Pi, 2 Pi}, {y, -2 Pi, 2 Pi}]
```

Out[ ]=



■

4.7　研究

- ドキュメントセンターを開き，方程式を解く組込み関数である Solve，Reduce，FindRoot について調べ，その違いを確認せよ．
- ドキュメントセンターを開き，グラフを描く組込み関数である Plot，ContourPlot，ContourPlot3D の詳細を調べよ．