Chapter 8

複素級数・複素関数の可視化

この章のテーマは「複素数を視る」ことである．大学で学ぶ複素関数論の理解を助ける図やアプリケーションの作成を念頭においているが，複素数の四則演算さえわかっていれば *Mathematica* の入出力自体は楽しむことができるだろう．

　複素数の世界で成り立つ有名な等式として，**オイラーの等式**

$$e^{\theta i} \;=\; \cos\theta + i\sin\theta \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

もしくはこれに $\theta = \pi$ を代入した

$$e^{\pi i} \;=\; -1$$

がある．この式は e，π，i の豪華メンバーが織り成す不思議な関係式として知られている．$e^{\theta i}$ は「e の純虚数乗」という奇怪な数であるが，複素関数論ではより一般に，任意の複素数 z に対して e^z を考える．具体的には，次の式によって複素数の**指数関数**を定義する：

$$e^z \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots . \qquad (*)$$

この右辺の級数はある複素数（もちろん z に依存する）に収束することが知られており，その値を左辺のように e^z と書くのである．

　念のため復習しておくと，複素数の級数

$$z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

が「収束する」とは，部分和

$$S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$

が $n \to \infty$ のときある複素数に収束することをいう．複素数をベクトルとして複素平面 $\mathbb{C}$ 上に表現すれば，この級数は 0 から $+z_0$ 進み，$+z_1$ 進み，$+z_2$ 進み $\cdots$ という操作を無限に繰り返して一定値に到達する，ということを意味する．これを図示したものが次の図 8.1 である．級数とは「無限折れ線」なのである．

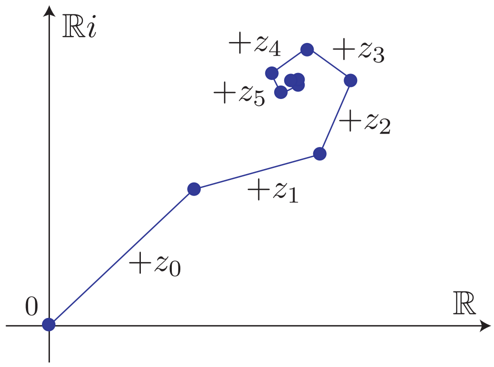


図 8.1　複素級数の収束．青い点が収束列 $0, S_1, S_2, \cdots$ を表す．

したがって式 $(*)$ に $z = \pi i$ を代入した

$$e^{\pi i} \;=\; 1 + \pi i + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\pi i)^n}{n!} + \cdots$$

の場合，$e^{\pi i} = -1$ より部分和

$$S_n = 1 + \pi i + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\pi i)^n}{n!}$$

に対応する「有限折れ線」の端点は n が十分大きいとき -1 に極めて近いはずである．

この章では，`Manipulate` の「ロケータ」（`Locator`）とよばれる機能を用いて，指数関数（より一般に，テイラー級数展開された関数）を「有限折れ線近似」し，オイラーの等式を視覚化しよう．

また `ParametricPlot` をうまく活用して，複素関数が平面図形をどのように写すかを表現する方法を学ぶ．

8.1　必要な関数の準備

Mathematica は複素数の計算に対応しているが，`Plot` のようにグラフを描画する関数は基本的に実数しか扱うことができない．したがって計算は複素数 $a + bi$ として

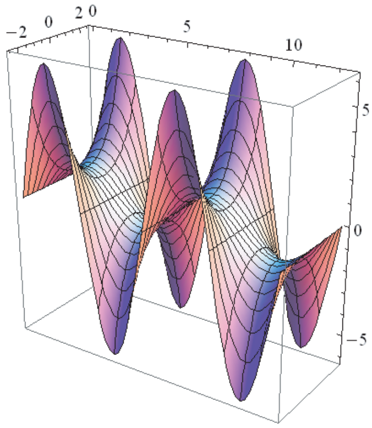
```
In[24]:= f[z]

Out[24]=  Sin[x + ⅈ y]
```

[25] Plot3D で $z \mapsto \mathrm{Re}\, f(z)$ の 3 次元グラフを描く：

```
In[25]:= Plot3D[Re[f[z]], {x, 0, 4 Pi}, {y, -2.5, 2.5},
                          BoxRatios -> Automatic]
```

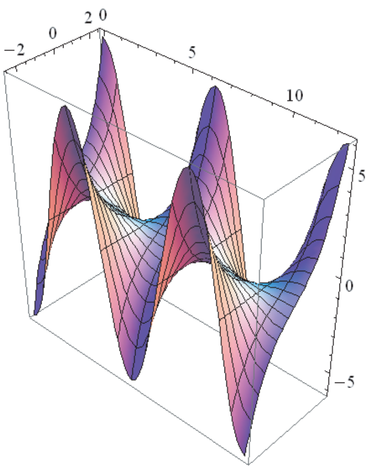
Out[25]=

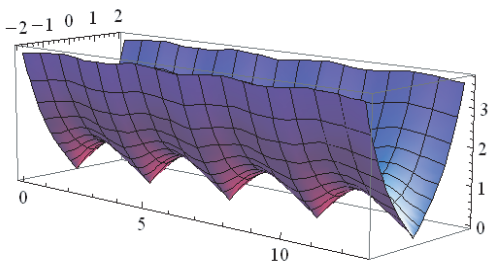


オプション BoxRatios -> Automatic を加えてグラフの縦横高さの縮尺をそろえた．

問題 8.4 (複素正弦の虚部と絶対値) [23][25] を応用して，$\mathrm{Im}\,(\sin z)$，$|\sin z|$ のグラフを描け．また，$\mathrm{Re}\,(\sin z)$ と $\mathrm{Im}\,(\sin z)$ のグラフを色を変えてまとめて表示し，周期 2π をもつことを確認せよ．

【解答】 $\mathrm{Im}\,(\sin z)$，$|\sin z|$ のグラフは [23] の Re[f[z]] をそれぞれ Im[f[z]]，Abs[f[z]] に置き換えればよい．出力としては次を得る．

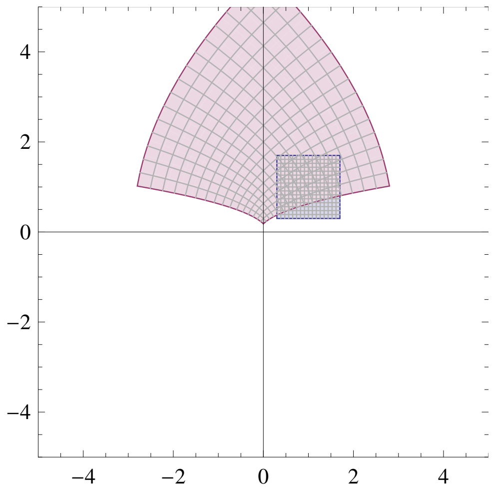




最後の「まとめて表示」する部分は，次のように関数部分をリスト形式にすればよい．

```
In[ ]:=  Plot3D[{Re[f[z]], Im[f[z]]}, {x, 0, 4 Pi}, {y, -2, 2},
                     BoxRatios -> Automatic, PlotStyle -> {Red, Blue}]
```

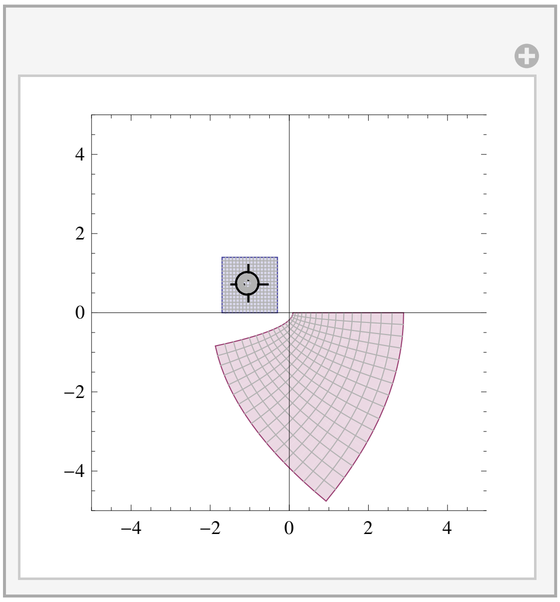
Out[33]=



[34] ロケータで正方形を動かす：

```
In[34]:= Manipulate[mapf[comp[v]], {{v, {1, 1}}, Locator}]
```

Out[34]=



必要なら r の値を大きくしてみるとよい．また，`mapf` の定義中，`ParametricPlot` のなかに `ImageSize -> 700` （数値は自由）などのオプションを加えるとより大きな絵を描くことができる．

よく眺めると，もとの正方形の直交する網目の像は，直交する曲線族に写ることがわかるだろう．[*8] これが正則関数の「等角性」とよばれる性質である．

8.7 研究

`Manipulate` の結果をより見やすく，使いやすくする方法をいくつか考えよう．

[*8] 唯一の例外点が原点である．たとえばもとの正方形の頂点のひとつが原点 $z = 0$ にあるとき，対応する像では直角が開いて 180 度になる．