CHAPTER 13

フラクタル

フラクタル集合の代表例である「コッホ曲線」「シェルピンスキー・ガスケット」などを作画しよう．

技術的には，プログラミングの世界でいう「ループ処理」（反復処理）を *Mathematica* の組込み関数で実現する方法を学ぶ．

13.1　フラクタルとは？

フラクタル (fractal) とは，ある種の**自己相似性** (self-similarity) をもつこと，もしくはそのような形状をもつものをいう．[*1]

いわゆる「自己相似性」をもつものとして典型的な例は，海岸線（海と陸の境界）である．世界地図を見ても，日本地図を見ても，もっと部分的な地図を見ても，自然の海岸線はいつも同じようにギザギザしている．海岸線は，そのいかなる部分を取り出しても自分自身（もとの海岸線）とよく似た構造を見いだせる，という意味で「自己相似性」をもつ．すなわちフラクタルである．一方，円の一部を拡大していっても線分のように見えるだけで，円のようには見えることは決してない．この意味で，円はフラクタルではない．

しかしこの「自己相似」という言葉には，どこかあいまいな空気が漂っている．数学で 2 つの集合が「相似」であるとは，拡大・縮小と平行移動（および反転）を施すことでそれらが完全に一致する場合をいうが，こんなことが自然の海岸線で起きるとは到底思えない．実際，「フラクタル」も「自己相似性」も，数学的な定義にはいくつかのバリエーションがあって，研究者が各自の都合に合わせて使い分けているのが現

[*1] 「フラクタル」はラテン語の fractus（バラバラ，の意味）をもとに，ブノワ・マンデルブロー (Benoit Mandelbrot, 1924 – 2010) が作った言葉である．また「自己相似性」は，しばしば標語的に「部分が全体に似ている」と言い換えられる．

状である．そこでひとつ，「これぞ自己相似！」という理想的な例を紹介しよう．

複素平面上で 0 と 1 を結ぶ線分からスタートし，次の図 13.1 のような「角（かど）を増やす」操作を限りなく続けていったとしよう．この「極限」として得られる図形を**コッホ曲線** (Koch's curve) とよぶ．[*2]

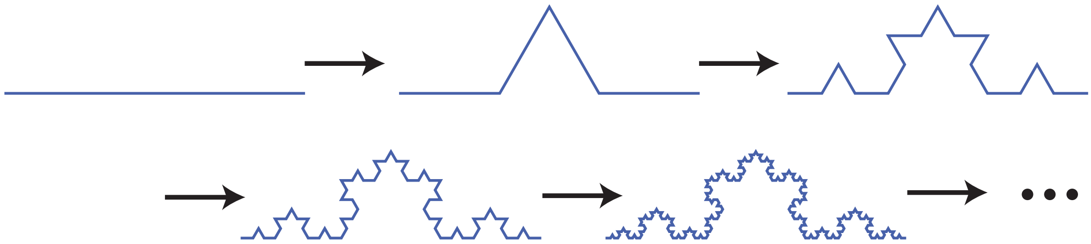


図 13.1　コッホ曲線の構成過程.

図 13.1 をよく眺めて，（決して描くことはできない）「極限」をイメージしてみよう．コッホ曲線は自分自身と相似な縮小コピーをつなぎ合わせて構成されていることがわかると思う．「自己相似」という言葉そのものが実現されているのである．

本章では，*Mathematica* でコッホ曲線を近似的に描画する方法として，

(A) `Do` を用いたループ処理で，「折れ線」の角（かど）を増やしていく方法
(B) 基本となる三角形を 2 つの縮小相似変換で「ばらまいて」いく方法

のふたつを紹介する．じつは数学的には方法 (B) のほうが単純で，一般化もしやすい．実際，典型的なフラクタルとして知られる「シェルピンスキー・ガスケット」や「カントールの 3 進集合」の構成にもまったく同じ原理が適用できる．（13.7，13.8，13.9 節参照．）それでもあえて方法 (A) を紹介するのは，「折れ線」の極限としての数学的な意味づけに忠実であり，しかもループ処理でリストを変形していく「*Mathematica* らしい」プログラミング例になっているからである．

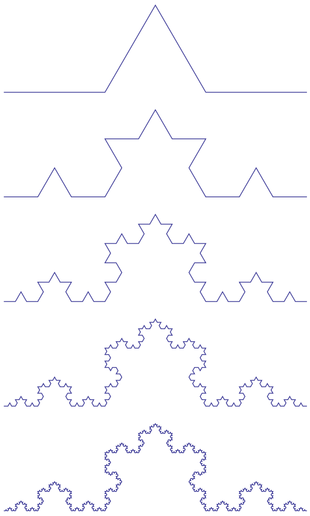
さっそく，必要な道具（組込み関数）を準備していく．少し量が多いががんばろう．

13.2　Nest 以外のループ処理（Do，For，While）

関数や漸化式の反復は `Nest` を用いて実現できた．それ以外にも，*Mathematica* には一般的なプログラミング言語で使われるようなループ処理（反復処理）用の組込み

[*2] この「極限」の数学的に厳密な定義は，少なくともふたつある．ひとつは，区間 $[0,1]$ からの連続写像列 $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ の一様収束極限．もうひとつは，「$\mathbb{C}$ の空でない有界閉集合全体」がなす距離空間を考えて，そこでの点列としての極限である．後者については章末の参考文献を参照せよ．いずれの場合にも，「極限」の存在を証明することができる．

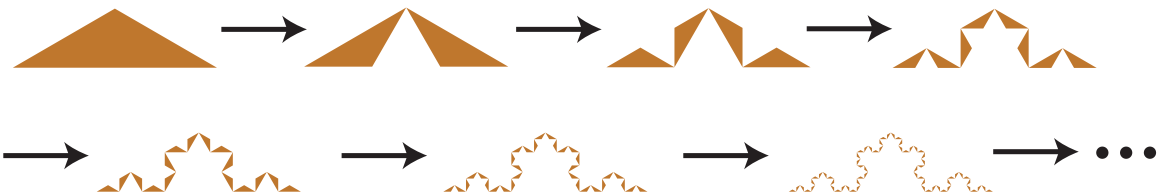
Out[22]//TableForm=



■

13.7 IFS によるコッホ曲線：方法 (B)

コッホ曲線を描く方法 (B) では，**IFS**（Iterated Function System，反復関数系）とよばれるものを用いる．適当な図形を 2 つの相似変換で「ばら撒いていく」と，コッホ曲線に近づいていく，というのがそのアイディアである．具体的には，次のような「三角形を増やす」操作を繰り返す：



数学的に記述してみよう．さきほどと同じ定数 $s = \dfrac{e^{\pi i/6}}{\sqrt{3}}$ を用いて相似変換 $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ を

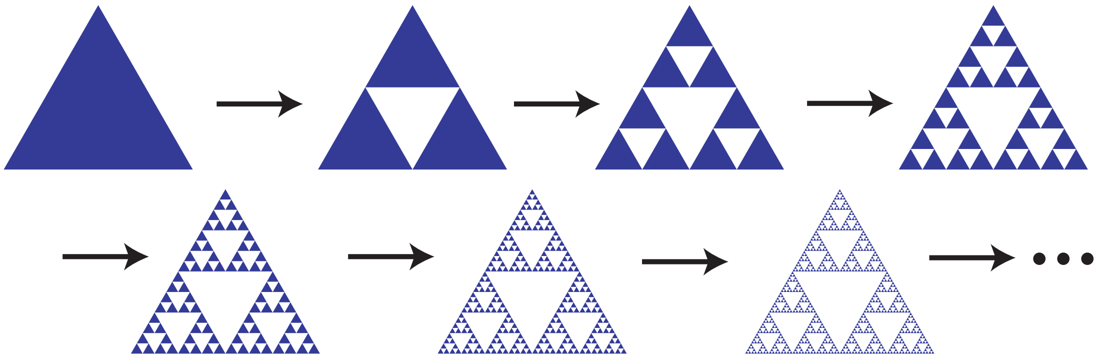
$$f_1(z) \;=\; s\overline{z} \qquad f_2(z) \;=\; \overline{s}\,(\overline{z} - 1) + 1$$

で定める．これらの関数は次をみたすように選んである：

- f_1 は 0，1，s をこの順で 0，s，1/3 に写す相似変換（0 を固定）
- f_2 は 0，1，s をこの順で s，1，2/3 に写す相似変換（1 を固定）

いま 0，1，s を頂点とする三角形（境界も含む）を K_0 とするとき，漸化式

$$K_{n+1} \;=\; f_1(K_n) \cup f_2(K_n) \;\subsetneq\; K_n$$



■

13.8 研究：その他のフラクタル

コッホ曲線の描画法 (A) を応用して，次の問題を解いてみよう：

問題 13.7 (ドラゴン) 複素平面上で 0 から 1 へ進む線分からスタートし，図 13.4 のような操作を繰り返して得られる折れ線の「極限」は**ハイウェイ・ドラゴン** (Heighway's dragon) とよばれる．これを描画せよ．

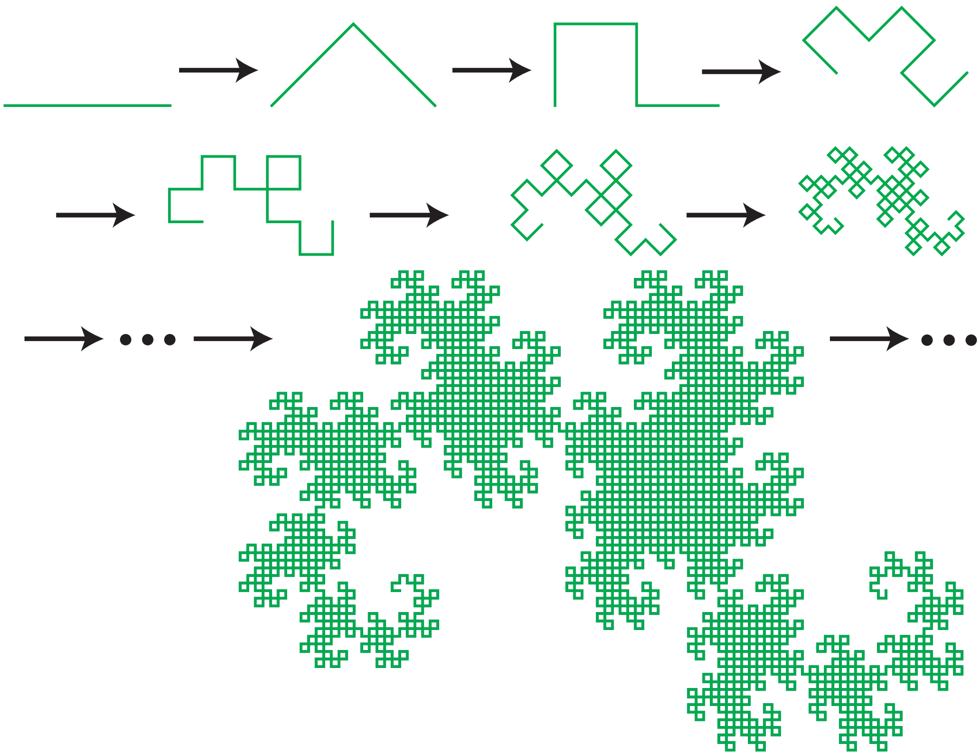


図 13.4 ハイウェイ・ドラゴン．最後の絵は拡大してある．この「極限」は平面を部分的に埋め尽くすことが知られている．

可能である．ぜひ挑戦してみてほしい．　■

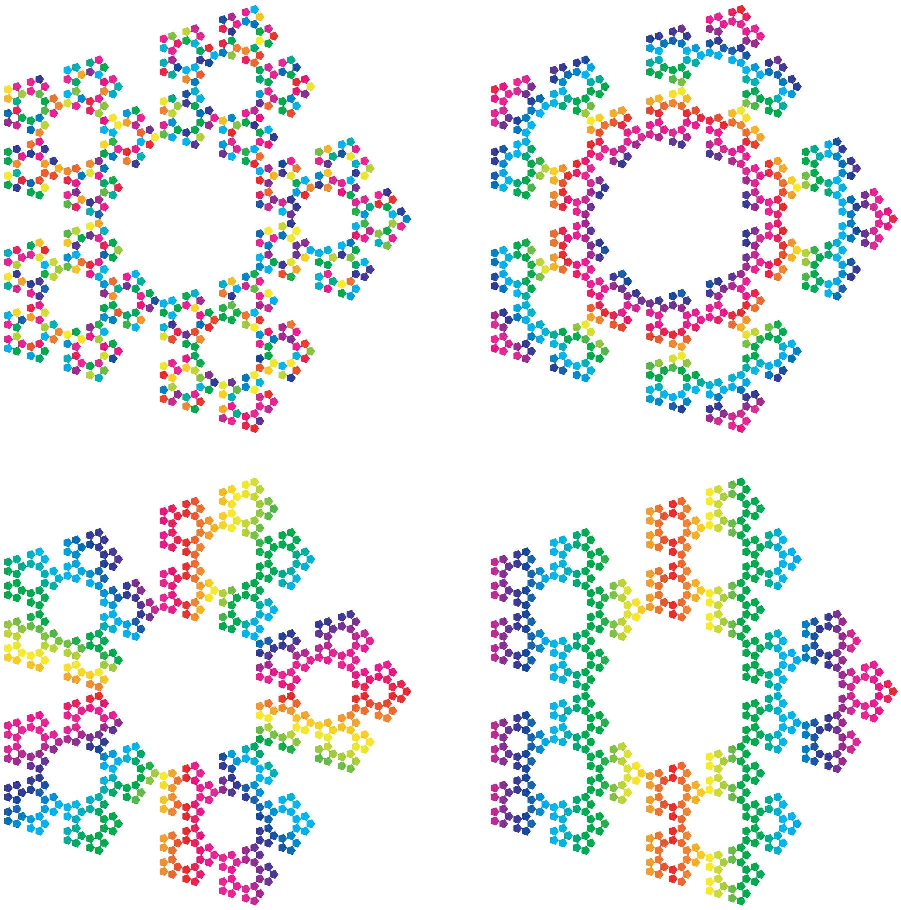


図 13.5　ペンタクンをさまざまな色調で描いてみたもの．左上はランダムに，右上は絶対値に応じて，左下は偏角に応じて，右下は実部の値に応じて色をつけてみた．

13.9　研究：カントールの 3 進集合と悪魔の階段関数

カントールの 3 進集合．　数直線上の閉区間 $[0, 1]$ から三等分点 $x = 1/3, 2/3$ をとり，中央の開区間 $(1/3, 2/1)$ を取り除く．残った閉区間それぞれについても三等分点をとり，中央の開区間を除く．同様に続けていった「極限」は**カントールの 3 進集合** (Cantor's ternary set) とよばれる．[*13]

[*13] 非可算濃度（連続濃度）をもつが長さ（ルベーグ測度）0 となる集合の典型的な例である．詳しくは章末の参考文献 [谷口] を参照せよ．