レクチャーズ オン *Mathematica* Workbook

この Workbook は川平友規著『レクチャーズ オン *Mathematica*』（プレアデス出版）を改変し，大学等の講義プリントとして使いやすいようにしたものです．書籍とのおもな違いは

- *Mathematica* の出力部分と練習問題の解答部分は削除
- 誤植等は修正ずみ
- A4 サイズ，12 ポイント（書籍は A5 サイズ，9 ポイント）
- サポートページで公開中の 14 章（補講・力学系）の追加

の 4 点です．教育目的で利用される方に限って著者から直接お渡しさせていただいております．（2 次配布はご遠慮ください．）

CHAPTER 3　リストと数列

Mathematica の特徴のひとつは「リスト」というベクトルのようなデータ形式をもっていることである．ベクトルも行列も数列も集合も，すべてリストにできる．「リストを制すものは *Mathematica* を制す」と言っても過言ではない．

数学ではしばしば数列の収束・発散が問題となる．とくに収束数列の場合，数値計算への応用という観点からその「収束速度」が重要な意味をもつ．たとえば，次のような問題を考えよう：

収束速度の比較問題．自然対数の底 e への収束列として，

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

のふたつがよく知られているが，理論的には b_n のほうが収束が速いとされている．それを数値的に確かめよ．

実際，誤差 $|a_n - e|$ は $3/n$ 以下，$|b_n - e|$ は $2/n!$ 以下であることが理論的にわかるので，b_n のほうがはるかに収束が速いのである．これを数値的に実感するには，a_n と b_n を *Mathematica* に 10 項目ぐらいまで計算させてみて，結果を並べてみるのがよい（問題 3.7）．こうした操作に必要な知識を学ぶのがこの章の目標である．

3.1　リストとは？

リストとはベクトル，行列，テンソル，数列，集合などなど，さまざまなものを表現できる *Mathematica* 独自のデータ構造（データのいれもの）であり，中括弧 `{ }` を用いて

```
{a, b, c}   {{a, b}, {c, d}}   {Sin[x], Cos[x], Tan[x]}
```

のように表される．リストはベクトルによく似ているが，ベクトルよりもっと多くの演算が大胆に適用できる．具体例をみていこう．

[1] リスト `v1` と `v2` を定義：

```
In[1]:= v1 = {a, b, c};
        v2 = {p, q, r};
```

[2] `v1` と `v2` のベクトル的な和：

```
In[2]:= v1 + v2
```

[3] ベクトル的な定数倍： In[3]:= `100*v1`

[4] 各要素に 1 を足す: In[4]:= `v1 + 1`

[5] 文字 x から各要素を引く: In[5]:= `x - v1`

[6] 各要素を 3 乗： In[6]:= `v1^3`

[7] 5 を「リスト乗」： In[7]:= `5^v1`

[8] 指数関数を各要素に作用： In[8]:= `Exp[v1]`

[9] リストの「リスト乗」： In[9]:= `v1^v2`

[10]要素ごとの積： In[10]:= `v1*v2`

[11]要素ごとの商： In[11]:= `v1/v2`

[12]ベクトルとしての**内積**： In[12]:= `v1.v2`

問題 3.1 `u = {1, 2, 3, 4, 5}` と定義する．文字 `x` と上で紹介したリストの演算をうまく組み合わせて，

$$\{1^3-1,\ 2^3-2,\ 3^3-3,\ 4^3-4,\ 5^3-5\},\quad \left\{x,\ \frac{x^2}{2!},\ \frac{x^3}{3!},\ \frac{x^4}{4!},\ \frac{x^5}{5!}\right\}$$

に等しいリストをそれぞれ作成せよ．ただし，n の階乗は `n!` もしくは `Factorial[n]` で計算できる．

3.2　リストの生成

リストを効率的に作る組込み関数を紹介しておこう．まず（有限項からなる）等差数列を作るには，Range が良い．

[13] Range を用いて，リスト {1, 2, 3, 4, 5} を作る：

```
In[13]:= Range[5]
```

[14] Range を用いて，リスト {4, 5, . . . , 10} を作る：

```
In[14]:= Range[4, 10]
```

[15] Range を用いて，$4 \leq x \leq 10$ で 0.7 刻みのリストを作る：

```
In[15]:= Range[4, 10, 0.7]
```

これは「初項 4，公差 0.7 の等差数列の 10 以下の部分からなるリスト」である．

一般項を与えてリストを生成するには，関数 Table を用いる．

[16] Table を用いて，平方数 (square numbers) からなるリスト sq を作る：

```
In[16]:= sq = Table[n^2, {n, 1, 10}]
```

Table[..] の中身は「n を 1 から 10 まで（1 刻みで）動かして n^2 のリストを作れ」という意味である．Table はたいへん使い勝手が良いので，以後も頻繁に登場することになるだろう．

[17] うしろに**二重括弧 [[ ]]** をつけてリスト sq の 7 番目の**要素を取り出す**：

```
In[17]:= sq[[7]]
```

[18] Length でリスト sq の**長さ**（要素の数）を求める．意外とよく使う関数である：

```
In[18]:= Length[sq]
```

問題 3.2 (e への収束列) Table を用いて，自然対数の底 e への収束列 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ の第 10 項目まで近似値（N 関数を施した値）からなるリスト an を作れ．

問題 3.3 (まとめて因数分解) Table を用いて，$x-1, x^2-1, \cdots, x^{10}-1$ からなるリストと，その各要素を因数分解した結果からなるリストを作れ．

問題 3.4 (要素の取り出し・並べ替え) mat = {m,a,t,h,e,m,a,t,i,c,a} と定義する．このリストの文字（要素）の順序を逆にしたリスト tam を Table 関数を用いて作れ．(HINT：tam の n 項目は mat の何項目？)

3.3 「リストのリスト」の行列形式・表形式

ここではリストを一覧表の形で並べたり，行列を「リストのリスト」として表現する方法を紹介しよう．

[19] 「リストのリスト」 m1 を定義[*1]：

```
In[19]:= m1 = {{a, b, c}, {p, q, r}};
```

[20] MatrixForm を用いて m1 を**行列** (matrix) として表示：

```
In[20]:= m1 //MatrixForm
```

この入力式は MatrixForm[m1] と書いてもよい．[*2][*3][19] で定義したリスト m1 の中身と，行と列の対応に注意しよう．

[21] TableForm を用いて m1 を**表** (table) として表示：

```
In[21]:= m1 //TableForm
```

これも TableForm[m1] と書いてよい．

[22] Table で行列（リストのリスト）を生成することもできる：

```
In[22]:= m2 = Table[i + j, {i, 1, 4}, {j, 1, 5}]
```

[23] TableForm で見てみよう：

[*1] [1] で定義した v1 = {a, b, c} と v2 = {p, q, r} を用いて，m1 = {v1, v2} としてもよい．

[*2] 逆の発想で，Sin[x] を x//Sin と書いてもよいのである．しかし本書では混乱をさけるために TableForm と MatrixForm 以外でこの記法は用いない．

[*3] MatrixForm はリストをいわば「文字を行列風に配置した画像のようなもの」に置き換える関数である．たとえば 2*m1 は行列（リスト）として各要素を 2 倍したものになるが，2*MatrixForm[m1] はもはや行列ではなく，これ以上の計算ができない．次の TableForm も同様である．

```
In[23]:= m2 //TableForm
```

m2 の定義式（[22]）と比べると，{i, 1, 4} が行の方向，{j, 1, 5} が列の方向に対応することがわかる．

[24] 二重括弧 [[ ]] で 2 行 5 列目に対応する要素を取り出す：

```
In[24]:= m2[[2, 5]]
```

問題 3.5（九九の表） リストの TableForm を用いて，1 から 9 までの積の表（九九の表）を作れ．また，1 から 19 までの奇数同士の積を表にせよ．

問題 3.6（一覧表の作成） 1 から 10 までの自然数とその 2 乗，3 乗の一覧表を作成せよ．

3.4　数列の和

数列の和を *Mathematica* に計算させたいときは，組込み関数 Sum を用いるとよい．

[25] Sum で 1 から 10 までの 2 乗の和 $\sum_{n=1}^{10} n^2$ を求める：

```
In[25]:= Sum[n^2, {n, 1, 10}]
```

入力式はちょうど，[16] で定義したリスト sq = Table[n^2, {n, 1, 10}] の Table を Sum に変えた形になっている．

[26] *Mathematica* は 2 乗の和の一般項も知っている：

```
In[26]:= Sum[k^2, {k, 1, n}]
```

[27] オイラーの無限級数 $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots$ の値も知っている：

```
In[27]:= Sum[1/n^2, {n, 1, Infinity}]
```

入力式の Infinity は無限大 ∞ を表す組込み定数である．

[28] 8 次の多項式を作る[*4]：

[*4] ちなみに無限級数 Sum[x^n/n!, {n, 0, Infinity}] を計算するとちゃんと指数関数 Exp[x] になる．たいしたものである．

```
In[28]:= Sum[x^n/n!, {n, 0, 8}]
```

[29] `Product` で 1 から 19 までの奇数の積 $\prod_{n=1}^{10}(2n-1)$ を求める：

```
In[29]:= Product[2*n - 1, {n, 1, 10}]
```

[30] 問題 3.5 で求めた「九九の表」にある数を全部足し上げる：

```
In[30]:= Sum[m * n, {m, 1, 9}, {n, 1, 9}]
```

では，冒頭の**収束速度の比較問題**に解答を与えよう：

問題 3.7 (収束速度の比較) 自然対数の底 e への典型的な収束列

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

を考える．これらの収束速度を比較しよう．

(1) `Sum` を用いて b_5 の近似値を求めよ．
(2) さらに `Table` を組み合わせて，b_n の第 10 項目までの近似値からなるリスト `bn` を作成せよ．
(3) 上の `bn` と問題 3.2 で作成した `an` を用いて，a_n，$|a_n - e|$，b_n，$|b_n - e|$ を比較する一覧表を作成せよ．ただし，実数もしくは複素数 `x` の絶対値は組込み関数 `Abs[x]` で与えられる．

最後に，数列の和に関連する大学入試問題を `Sum` を使って解いてみよう：

問題 3.8 (大学入試問題から) *Mathematica* を用いて計算せよ．

(1) 次の和を数値的に（近似値で）求めよ：$\displaystyle\sum_{k=2}^{100}\frac{3}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$. **(99 兵庫大)**

(2) 数列 $\dfrac{2}{2^2-1}, \dfrac{2}{3^2-1}, \dfrac{2}{4^2-1}, \ldots$ の第 n 項までの和を求めよ．
(00 日本福祉大)

(3) 連続する m 個の奇数 $1, 3, 5, \ldots, 2m-1$ の中から，異なる 2 つの数をとって積を作る．こうして得られる ${}_mC_2$ 通りの積すべての和を求めよ．
(99 浜松医大)

3.5　研究

以下を *Mathematica* を用いて実行してみよ．

(1) i が 1 から m まで，j が 1 から n までの値をすべて動くとき，$i+j$ の総和を求めよ．すなわち，$\sum_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}(i+j)$ を計算せよ．

(2) i,j,k が 1 から n までの値をすべて動くとき，$i+j+k$ の総和を求めよ．すなわち，$\sum_{1\leq i,j,k\leq n}(i+j+k)$ を計算せよ．

(3) 初項 4，公比 8 の等比数列の第 n 項までの和を S_n で表す．このとき，S_{99} は $\boxed{\text{カキ}}$ けたの整数，S_{100} は $\boxed{\text{クケ}}$ けたの整数である．さらに，S_1 から S_{100} の間で，$\boxed{\text{クケ}}$ 以下のすべてのけた数の S_n が存在するか確認せよ．

（92 センター本試・改）

(Hint: S_n の桁数は $1+\log_{10} S_n$ の整数部分で与えられる．その一覧表を作れ．正の実数 `x` の整数部分は `Floor[x]` で与えられる．)

(4) ドキュメントセンターを開き，リストに関連してどのような組込み関数があるか調べよ．

CHAPTER 14　力学系（補講１）

「力学系」とは「時間発展する世界」のごく単純なモデルである．本章では以下の 3 項目について解説する．

- グラフ解析と呼ばれる方法で実 1 次元力学系を可視化．
- 方程式の近似解法であるニュートン法を可視化．
- フラクタル図形として有名な複素 1 次元力学系のジュリア集合・マンデルブロー集合の描画．

注意．　本章は「補講」，すなわちオマケです．13 章までの内容は既知とさせていただきます．説明も親切さに欠ける部分もあるかもしれませんがご了承ください．

14.1　力学系とは？

まずは**力学系** (dynamical system) とは何か，具体例をみながら説明してみよう．次のような漸化式を考える：

$$a_{n+1} = 2a_n;\ a_0 = 1.$$

この漸化式を解くのは簡単だが（$a_n = 2^n$），ちょっと遠回りをして次のように解釈してみる．いま $f(x) = 2x$ とおくと，

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

と表されるから，$a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(f(a_0))$，$a_3 = f(f(f(a_0)))$，という具合に関数 f を繰り返し合成（反復合成）することで数列が生成されていることがわかる．初項 a_0 はたまたま 1 としているが，この値を変化させても数列を生成する仕組み自体は変化しないのである．

ところで，ニュートン力学のような素朴な世界観では，世界（宇宙）を構成する要素として「空間」と「時間」，そして物体の運動を記述する「運動法則」（物理法則）の 3 つがある．[*1]空間内に質量をもった複数の物体が配置されて，時間とともに全体の「系」が変化するのである．

同様に，上の数列 $\{a_n\}$ が棲む「世界」は次のように記述される：

- 空間：数直線 $\mathbb{R}$
- 時間：$0, \pm1, \pm2, \cdots$（秒）
- 運動法則：x の位置にある動点は 1 秒後に $f(x) = 2x$ の位置に移動する

[*1] 相対性理論によれば，これらの 3 要素を明確に区別することはできない．

この「世界」を「$\mathbb{R}$ 上の f による**力学系** (dynamical system)」と呼ぶ.[*2]また，点 $x_0 \in \mathbb{R}$ にたいし

$$x_0 \overset{f}{\longmapsto} f(x_0) \overset{f}{\longmapsto} f(f(x_0)) \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

（すなわち $x_0 \overset{f}{\longmapsto} 2x_0 \overset{f}{\longmapsto} 2^2x_0 \overset{f}{\longmapsto} \cdots$ ）で定まる数列を初期値 x_0 の**軌道** (orbit) と呼ぶ．たとえば数列 $\{a_n\}$ は初期値 $a_0 = 1$ の軌道だと考えられる．このようにして得られる軌道の振る舞いを調べるのが，力学系理論の目標である．

また，$f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ と f を n 回合成したものを f^n と書くことにすれば，上の軌道は $\{f^n(x_0)\}$ と表されるから,[*3]，力学系理論では本質的に「関数 f の反復合成によって得られる数列の振る舞いを記述すること」が目標となる．しかし，一般にはこれが至って難しい．たとえば $f(x)$ が 2 次関数の場合，$f^{10}(x)$ は x の 1024 次関数である．手計算で力学系の時間発展を追いかけ続けるのは至難の業，実験もままならない—— というのはあくまで昔の話．いまは便利なパソコンと，*Mathematica* があるではないか．

14.2 力学系のグラフ解析

与えられた実数 p と関数 $y = f(x)$ に対し，軌道

$$p \ \mapsto \ f(p) \ \mapsto \ f(f(p)) \ \mapsto \ f(f(f(p))) \ \mapsto \ \ldots$$

を視覚化する非常によい方法がある．$y = f(x)$ のグラフを用いて，xy 平面上の点 (p, p) から $(f(p), f(p))$ を作図する方法である：

Step 0 $y = f(x)$ と $y = x$ のグラフを描く．

Step 1 点 (p, p) からタテ方向に，$y = f(x)$ のグラフまで線分を引く．その交点は $(p, f(p))$ である．

Step 2 $(p, f(p))$ からヨコ方向に，$y = x$ のグラフとまで線分を引く．その交点が $(f(p), f(p))$ である．

この Step 1 と 2 を続けていき，直線 $y = x$ を数直線だと思えば点 p の軌道が視覚化される（図 14.1）．この手続きを**グラフ解析** (graphical analysis) と呼ぶ．また，グラフ解析で得られる図を**ウェブ・ダイアグラム**（web diagram）と呼ぶ．

たとえば $f(x) = 2x$ で初期値 $x_0 = \pm 1/4$ とした場合は図 14.2 のようになる．

これを *Mathematica* に作図させる方法を紹介しよう．基本的にはウェブ・ダイアグラムの折れ線を `ListLinePlot` で描画する．これに `Show` で関数のグラフを重ね合わせるのである．

[*2] より正確には離散力学系 (discrete dynamical system) と呼ばれるものである．時間が「ぱらぱら漫画」のように離散的だからである．歴史的にはポアンカレが微分方程式系で記述される（連続時間をもつ）力学系の理論を創始した．そこでは離散力学系が重要な「道具」として用いられる．

[*3] $f^n(x)$ は $f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f(x)$ のことで $f(x)$ の n 乗 $\{f(x)\}^n$ ではない．

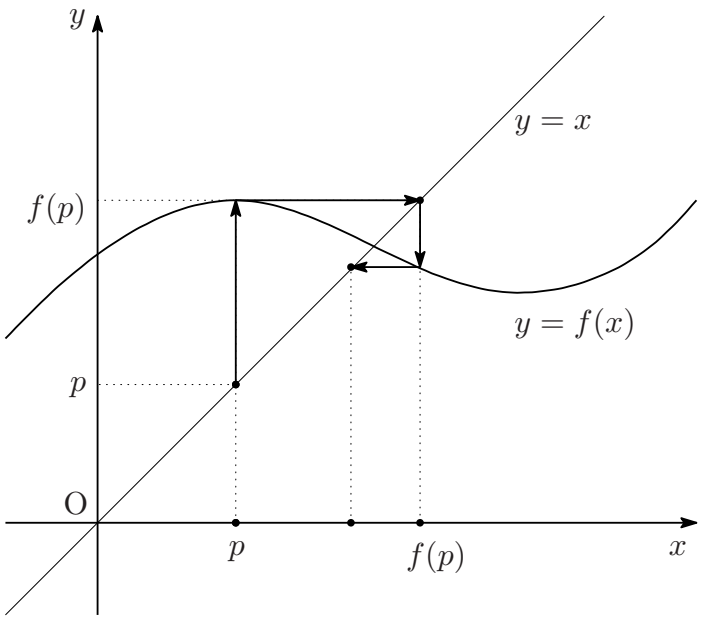


図 14.1　$f(x)$ のグラフ解析．(p, p) から $(f^2(p).f^2(p))$ までを作図したところ．

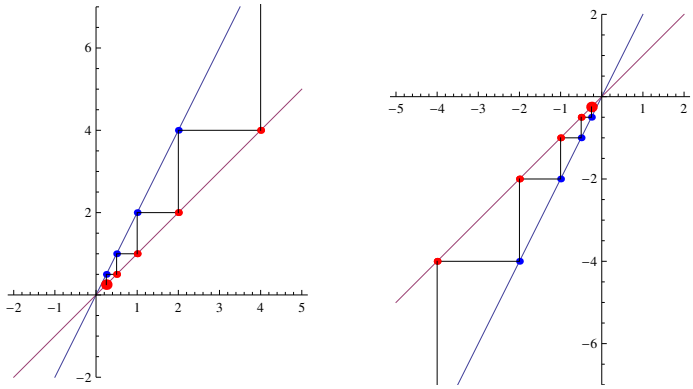


図 14.2　$f(x) = 2x$ のグラフ解析．左は $x_0 = 1/4$ のとき，右は $x_0 = -1/4$ のとき．

[1] Step 0 のように，関数 $y = f(x) = 2x$ と $y = x$ のグラフを描く：

```
In[1]:= f[x_] := 2 x;
        gr = Plot[{f[x], x}, {x, -2, 8}, AspectRatio -> Automatic]
```

[2] Step 1 と Step 2 に対応する部分．点 (p, p) からタテに移動して $(p, f(p))$ へ，さらにヨコに移動して $(f(p), f(p))$ へ，という「1 操作分」の折れ線を追加するために準備するために関数を定義：

```
In[2]:= tateyoko[p_] := {{p, f[p]}, {f[p], f[p]}};
```

[3] 初期値 p に対して，上記の「1 操作分」を n 回繰り返したリストを作る関数を定義：

```
In[3]:= weblist[p_, n_] := (w = {{p, p}}; x = p;
          Do[(w = Join[w, tateyoko[x]]; x = f[x]), {i, 1, n}];
          w);
```

[4] たとえば…：

```
In[4]:= weblist[1/2, 3]
```

[5] ウェブ・ダイアグラムを作る関数：

```
In[5]:= webdiag[p_, n_] := ListLinePlot[weblist[p, n],
                  PlotStyle -> Thick, AspectRatio -> Automatic,
                  PlotRange -> All];
```

最後の `PlotRange -> All` はおまじないのようなもので，ないとうまく描画されないことがある．

[6] たとえば…：

```
In[6]:= webdiag[1/2, 3]
```

[7] `Show` を用いて最初のグラフと重ねて表示：

```
In[7]:= Show[gr, webgr[1/2, 3]]
```

[8] `Manipulate` で `p` と `n` を変化させる：

```
In[8]:= Manipulate[Show[gr, webgr[p, n]],
                  {{p, 1}, -1, 4}, {{n, 3}, 0, 10, 1}]
```

`n` は整数のみを動くように指定していることに注意．

問題 14.1 (ロジスティック写像) 2 次関数 $g_a(x) = ax(1-x)$ は $0 \leq a \leq 4$ のとき区間 $[0,1]$ から 区間 $[0,1]$ への関数となる．そのウェブ・ダイアグラムを `Manipulate` を用いて可視化せよ．ただし，a もパラメーターとして変化できるようにすること．

問題 14.2 (より見やすく) 問題 1 のウェブ・ダイアグラムを次のように変えて「見やすさ」を追求せよ：

(1) ダイアグラムの線分は黒に．

(2) ダイアグラムで，$y = x$ 上の点は赤く，グラフ上の点は青く．

14.3　ニュートン法

与えられた関数 $f(x)$ に対し方程式 $f(x) = 0$ の解を数値的に求める方法として，**ニュートン法** (Newton's method) というものがある．幾何学的（直感的）には，次のような手続きによって解の近似値を得るのである：

(1) 関数 $y = f(x)$ のだいたいのグラフを描き，解の場所に見当をつける．
(2) 解の近くにあると思われる値 x_0 を選び，グラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ における接線を引く．
(3) 接線と x 軸の交わる点を $(x_1, 0)$ とする．

もし x_0 が方程式の解 $f(x) = 0$ の解 α に十分に近ければ，x_1 は解 α の「さらに良い近似値」を与えることが証明できる．[*4] さらに $(x_1, f(x_1))$ からグラフの接線を引いて同様の操作を繰り返せば，近似はもっと良くなるであろう．簡単な計算により $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ であることがわかるから，

$$N_f(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

とおいて得られる（関数 N_f によって得られる力学系の）軌道

$$x_0 \overset{N_f}{\longmapsto} x_1 = N_f(x_0) \overset{N_f}{\longmapsto} x_2 = N_f(x_0) \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$

は解 α への収束列を与えると期待される．この関数 N_f を f の**ニュートン写像**という．こ

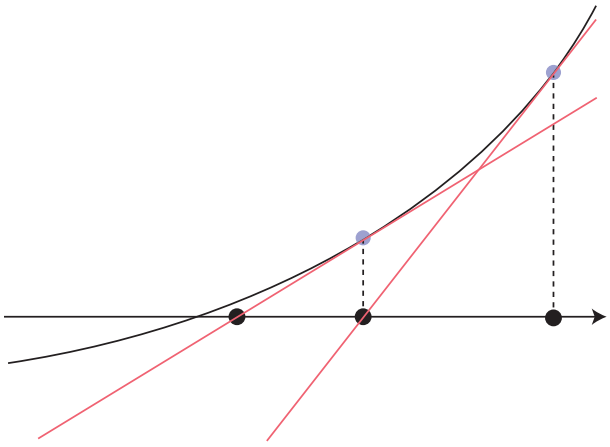


図 14.3　ニュートン法

[*4] ここで，関数 f は最低でも接線を引ける程度に滑らかでなくてはならない．たとえば C^2 程度を仮定すると十分である．

の節では，ニュートン法で解が近似される様子を数値的に観察し，それをグラフ上で可視化する方法を紹介しよう．

[9] $f(x) = x^2 - 2$ とすれば，ニュートン法で得られる列は $\sqrt{2}$ の近似列を与えるはずである．その様子を見てみよう．まずは関数 f を上書きし，さらにニュートン写像を定義：

```
In[9]:= f[x_]  = x^2 - 2;
        df[x_] = D[f[x], x];
        newton[x_] = x - f[x]/df[x]
```

すなわち $N_f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ であることがわかる．

[10] NestList を用いて，たとえば $x_0 = 1$ から始めたときの $x_0, x_1, \ldots, x_5$ をリストにする．：

```
In[10]:= app = NestList[newton, 1, 5]
```

[11] これでは近似の様子が見えてこないので，実用上はあまり意味がない．有効数字 20 桁で数値化する：

```
In[11]:= N[app, 20] //TableForm
```

TableForm を用いて縦方向に並べた．

[12] 真の値 Sqrt[2] との誤差を見てみよう[*5]：

```
In[12]:= N[{app, app - Sqrt[2]}, 20] //Transpose//TableForm
```

右側に真の値との誤差が並んでいる．誤差は「急速に」小さくなっていることが分かるだろう．大雑把に言って，１ステップごとに真の値と合致する小数点以下の桁数が倍近くになる．方程式の近似解法の中でも，ニュートン法はたいへん効率がよい．

[13] 次に図示してみよう．基本的にはウェブ・ダイアグラムを描く要領でやればよい：

```
In[13]:= seg[p_] := {{p, f[p]}, {newton[p], 0}};
         seglist[p_, n_] := (w = {{p, 0}}; x = p;
```

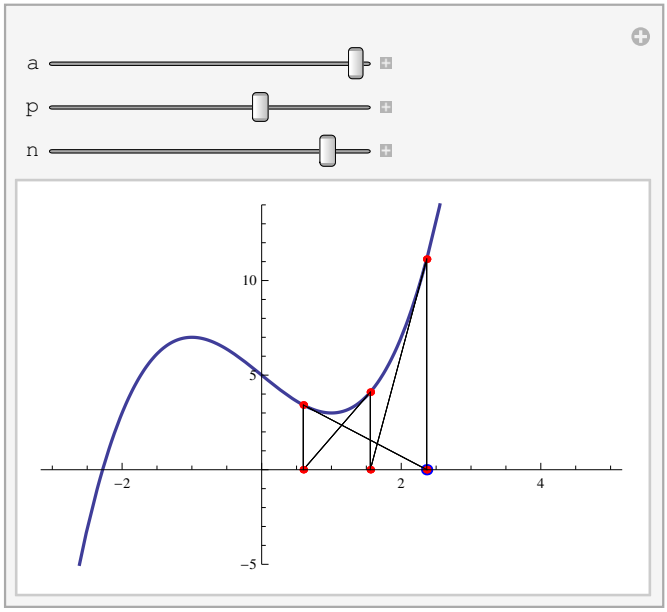
[*5] この式はちょっと技巧的かもしれない．これは
Transpose[N[{app, app - Sqrt[2]}, 20]] //TableForm と同じ意味であり，一旦転置を取ってから表にすることで誤差が右側に並ぶようにしたのである．次のように書いても同様の表示が得られる：
TableForm[N[{app, app - Sqrt[2]}, 20], TableDirections -> Row]

```
    Do[ (w = Join[w, seg[x]]; x = newton[x]), {i, 1, n}]; w);
seggr[p_, n_] := ListLinePlot[seglist[p, n],
                    PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick]
gr = Plot[f[x], {x, -5, 5}];
Manipulate[ Show[gr, seggr[p, n]],
 {{p, 5}, -5, 5}, {{n, 3}, 1, 10, 1}]
```

p が負のときは $-\sqrt{2}$ に収束し，p が正のときは $\sqrt{2}$ に収束することがわかる．[*6]

解答は省略するが，問題 1 を参考にぜひ次の問題 3 も考えてみていただきたい．

問題 14.3 (解に収束しない例) 3 次関数 $g_a(x) = x^3 - 3x + a$ $(a > 0)$ に対して，ニュートン法の軌道を Manipulate を用いて可視化せよ．ただし，a もパラメーターとして変化できるようにすること．また a の値によっては下の図のような軌道が現れて，必ずしも方程式 $g_a(x) = 0$ の解に収束するとは限らない（と思われる）ことを確認せよ．



14.4　複素力学系とジュリア集合

今度は「複素平面 $\mathbb{C}$ 上の，関数 $f(z)$ による力学系」を考える．いわゆる (1 次元) **複素力学系** (complex dynamics) と呼ばれるものである．ここでは関数 $f(z)$ を $f_c(z) = z^2 + c$ $(c \in \mathbb{C})$ の形の 2 次多項式に制限して，その力学系における軌道のふるまい理解したいとしよう．ここで f_c の定数項 $c \in \mathbb{C}$ は複素数のパラメーターであり，力学系における物理定数のような

[*6] ちなみに，p がちょうど 0 の場合は f の微分がゼロになるので数列が定義できなくなる．実際は軌道が「無限遠点」という固定点に乗ってしまう．

ものだと考えたらよいかもしれない．このパラメーターを変化させることで，「世界」の様相は意外なほど変化するのである．

無限の鉢と充填ジュリア集合． f_c の力学系に共通の性質として，

『$|z|$ がある程度大きいとき，$|f_c^n(z)| \to \infty$ $(n \to \infty)$ が成り立つ』

ということが証明できる．[*7] したがって「軌道（の絶対値）が無限大に発散する初期値」の集合

$$B_c := \{z \in \mathbb{C} \mid |f_c^n(z)| \to \infty \ \ (n \to \infty)\}$$

の形をみれば，パラメーター c に依存する力学系の変化を捉えることができるかもしれない．この集合を f_c の**無限の鉢** (basin at infinity) と呼ぶ．また，B_c の補集合

$$K_c := \mathbb{C} - B_c$$

を**充填ジュリア集合** (filled Julia set) と呼ぶ．この集合は「軌道が有限の範囲にとどまるような初期値の集合」であることも知られている．

ちなみに B_c と K_c の境界部分は「発散する軌道」と「有界にとどまる軌道」がせめぎあっており，力学系におけるカオス部分である．これを f_c の**ジュリア集合** (Julia set) と呼び，J_c で表す．面白いことに，一般に J_c は自己相似性をもつフラクタル集合となるのである．

では，*Mathematica* でこれらの集合を描く方法を考えてみよう．いろんな描き方があるが，ここでは計算効率は度外視して数学的な単純さ・分かりやすさを優先した次の方法を紹介する．[*8]

まず話を簡単にするために，$|c| \le 2$ と仮定しておこう．このとき，与えられた $z \in \mathbb{C}$ に対し $|f_c^k(z)| \ge 2$ となる k が存在すれば，$|f_c^{k+n}(z)|$ は n に関して単調増加かつ発散することが証明できる．したがって，

$$B_c(k) := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |f_c^k(z)| \ge 2\right\}$$

とすれば，$B_c(1) \subset B_c(2) \subset \cdots$ かつ $B_c = \bigcup_{k \ge 1} B_c(k)$ である．よって k が十分大きいとき $B_c(k)$ は B_c を近似していると考えてよいだろう．以下では $k = 50$ としている．

[14] まずは $c = -0.122 + 0.745i$ に対して B_c と K_c を描いてみよう．f の定義を上書きする．汎用性を考えて c の定義と別にしておく：

[*7] たとえば，$|z| \ge 2 + |c|$ のとき $|f_c(z)| \ge 2|z|$ が成り立つ．実際，$|f(z)| = |z^2 + c| \ge |z| \cdot |z| - |c| \ge (2+|c|)|z| - |c| \ge 2|z| + |c|(|z| - 1) \ge 2|z| + |c|(1 + |c|) \ge 2|z|$. よって $|f^n(z)| \ge 2^n|z| \to \infty$ $(n \to \infty)$. もう少し精密に評価すると，$|z| \ge \max\{2, |c|\}$ のとき $|f^n(z)| \to \infty$ $(n \to \infty)$ であることが証明できる．

[*8] 実際のところ，描画速度を優先するならば *Mathematica* を使うべきではない．C や Java のようなプログラミング言語を用いるべきである．複素力学系の計算に *Mathematica* を用いる利点は，

- 数値がデフォルトで複素数であり，計算が極めて容易
- グラフィクスやユーザー・インターフェイスが組込み関数で準備されている

という部分であって，C 言語などに比べて「プログラムを書きあげるまでの時間」が大幅に短縮できるのである．

```
In[14]:= c = -0.122 + 0.745 I; f[z_] := z^2 + c;
```

[15] さて無限の鉢 B_c に色をつける関数を定義：

```
In[15]:= col[z_] := (p = z; k = 0;
                     While[(Abs[p] < 2.0) && (k < 50),
                           (p = f[p]; k = k + 1)];
                     k)
```

While の中の意味は「$|f_c^k(z)| < 2$ かつ $k < 50$ である限り，カッコ (...) 内のふたつの命令 p = f[p]; k = k + 1 を繰り返せ，という意味である．最終的には k が値として定まるが，

- $|f_c^k(z)| \geq 2$ となる $k \leq 49$ が見つかった．
- $k = 50$ になるまで $|f_c^k(z)| < 2$ であり続けた．

のいずれかである．すなわち，col は 0 以上 50 以下の整数値をとる関数であって，前者の場合（49 以下）は $z \in B_c$ とみなし，後者の場合（ちょうど 50）は $z \in K_c$ とみなすことにする．

[16] 複素平面の領域

$$\{x + yi \mid -2 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2\}$$

上を刻み幅 d = 0.01 で分割し，Table を用いて関数 col の値をリスト（のリスト，すなわち行列と同じ形のデータ）にする：

```
In[16]:= d = 0.01;
         tab = Table[col[x + y I], {x, -2, 2, d}, {y, -2, 2, d}];
```

ここの計算が一番時間がかかる．数十秒は我慢しよう．[*9]

[17] tab の値を ArrayPlot で表現するために，少し修正した complexAP (complex Array Plot の略) を導入する（この意味は図 14.4 参照.）：

```
In[17]:= complexAP[t_] := ArrayPlot[Reverse[Transpose[t]]];
```

[*9] $400 \times 400 = 160000$ 個の複素数についてそれぞれ col を計算させることになる．パソコンに長時間向かって肩もこっていることだろうから，ストレッチでもしながらのんびり待つとよい．ちなみに col 関数の定義内の 50 を減らすか，刻み幅 d を増やせば計算は速くなる．そのかわり，得られる画像は粗くなる．

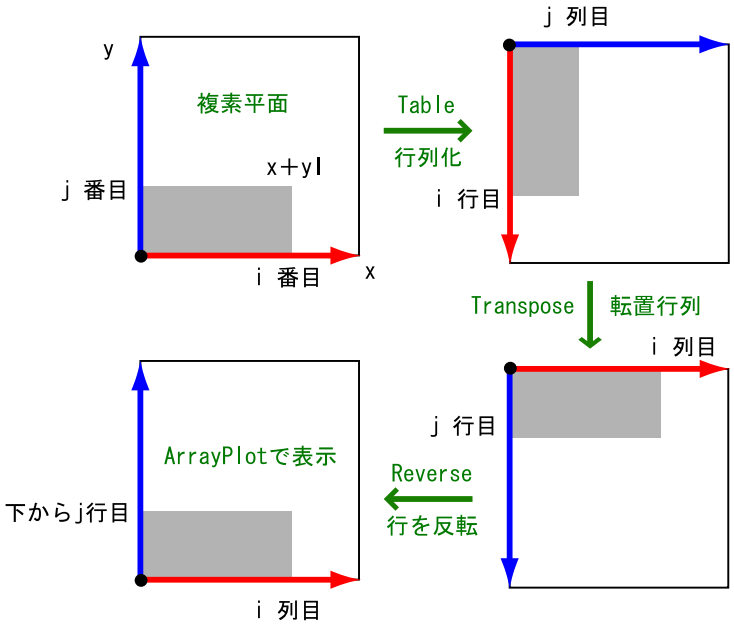


図 14.4 complexAP の意味．左上の複素平面を刻み幅 d でグリッドに分割して col 関数を適用するが，それを tab のように行列型のデータにすると右上のような配置になる．これに Transpose（行列の転置），Reverse（行の前後入れ替え）を施すことで，もとの複素平面のグリッドとデータの配置が一致する．これを ArrayPlot で表示するのである．

[18] tab を complexAP で図示する：

```
In[18]:= complexAP[tab]
```

col の値が小さいほど白くなる．したがって白からグレーの部分が B_c であり，黒い部分が K_c である．このように意外と複雑なフラクタル集合となる．

問題 14.4（より美しく？） 上の B_c を白黒でなく，適当に色づけせよ．

c の値をいろいろと変えても面白い．たとえば図 14.6 のようになる．

マンデルブロー集合． f_c の力学系において，$z=0$ は $f_c'(z)=0$ となる唯一の点である．そのような特殊性から，$z=0$ の軌道によって力学系の性質がある程度分類できることが知られている．たとえば「f_c の力学系において $z=0$ の軌道（の絶対値）が発散する（すなわち $0 \in B_c$ ）」という性質を持ったパラメーター c の集合

$$H_\infty := \{c \in \mathbb{C} \mid |f_c^n(0)| \to \infty \quad (n \to \infty)\}$$

を考え，その補集合

$$\mathbb{M} := \mathbb{C} - H_\infty$$

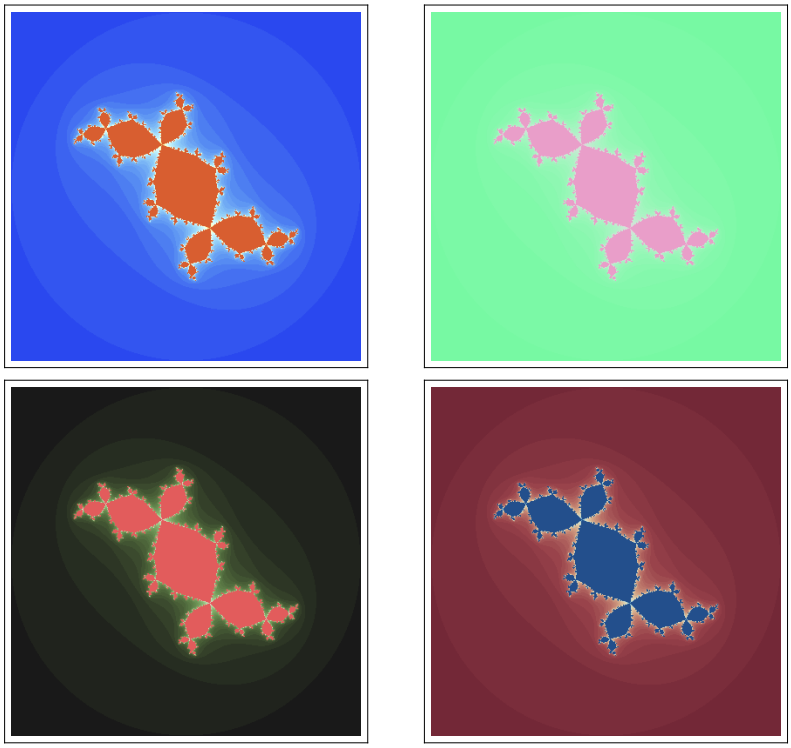


図 14.5　ColorFunction のオプションはドキュメントセンターの『カラースキーム』の項に詳しく述べられている．左上："LightTemperatureMap"，右上："MintColors"，左下："WatermelonColors"，右下："RedBlueTones".

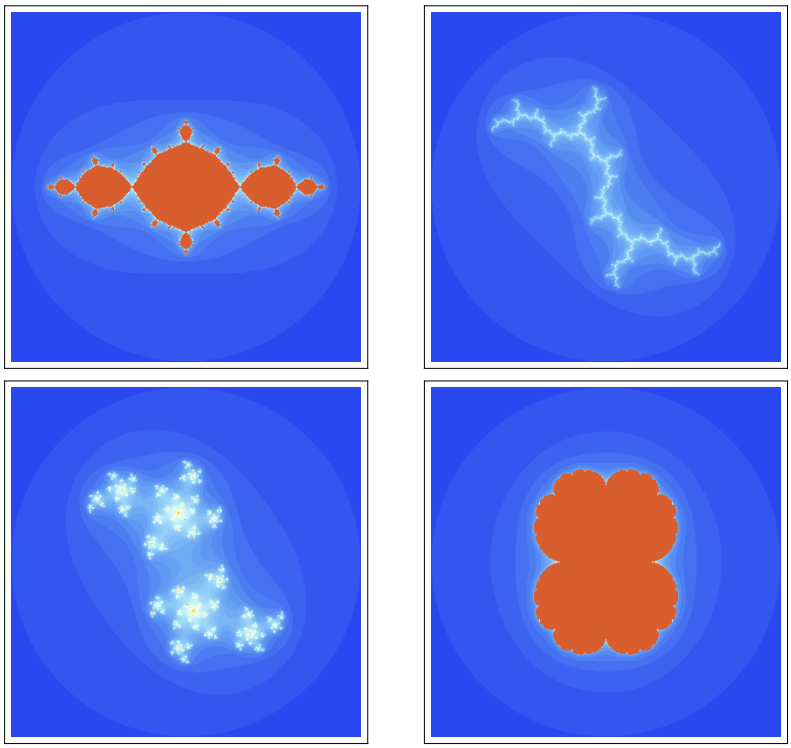


図 14.6　左上：$c = -1$，右上：$c = i$，左下：$0.22 + 0.65i$，右下：$c = 0.25$.

を**マンデルブロー集合** (the Mandelbrot set) と呼ぶ.[*10]

問題 14.5 (マンデルブロー集合) complexAP2 を用いて集合 $\mathbb{M}$ を描け.

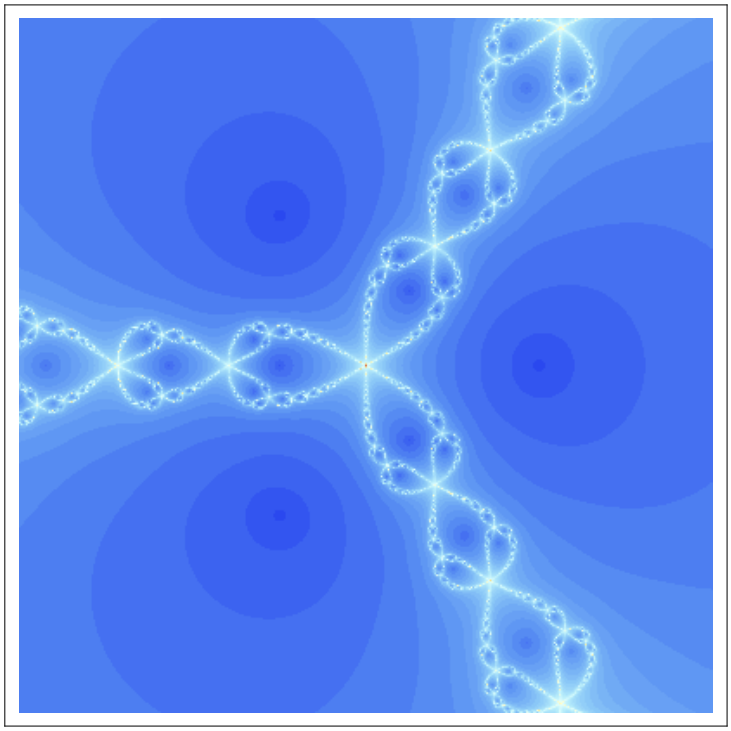
参考：ニュートン法再訪. 方程式 $f(z) = z^3 - 1 = 0$ について，複素数解もふくめて考えよう．じつはニュートン法は複素数でもそのまま応用できて，初期値 z_0 が方程式の解に十分近いとき，そのニュートン写像 $N_f(z)$ による軌道は解に近づくことが知られている．

上で 2 次多項式の「無限の鉢」を描かせたときと同様の考え方で，「軌道が 1 の 3 乗根に近づくかどうか」を判定するプログラムを描けば，有理関数 $N_f(z)$ の「ジュリア集合」（カオス部分）を描くことができる．

たとえばこの f の場合（f, df, newton など使用済みの文字は適宜クリアしておこう），

```
d = 0.01; f[x_] = x^3 - 1;
df[x_] = D[f[x], x]
newton[x_] := x - f[x]/df[x];
colN[z_] := (p = z; k = 0;
             While[(Abs[p^3 - 1] > 0.1) && (k < 50),
             (p = newton[p]; k = k + 1)];
              k)
tabN = Table[colN[x + y I], {x, -2, 2, d}, {y, -2, 2, d}];
complexAP2[tabN]
```

としてみよう．次のような，意外と複雑なフラクタル図形が得られるはずである．



[*10] この集合は「K_c が連結（ひとつながり）になっているような c」と一致することが知られている.

14.5　参考文献

離散力学系理論と複素力学系理論の入門書として次を挙げておく.

(1) R. Devaney.「カオス力学系入門（第 2 版）」. 共立出版.
(2) 川平友規.「マンデルブロー集合 — 2 次多項式の複素力学系入門」.
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/courses/mandel.pdf