秩序 と 混沌
コスモ　　　　カオス

—ファトウとジュリア—

川平　友規
名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

2007.3.24 NHK文化センター

方程式を解きたい

数学では，方程式によく出会う．例えば…

- $x^2 - 2 = 0 \ (\iff x^2 = 2)$
- $2x^3 - x^2 + 2x - 5 = 0$
- $x^{100} - 12x^2 - 1 = 0$

これらの方程式の解を全て求めたい！

一般に，$m = 2, 3, 4, \ldots$ にたいし，

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ = \ 0 \ \ (a_m \neq 0)$$

という形の方程式を考えてみよう．

数学の王者・ガウスによれば…

ガウス（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855）は次の定理を証明した：

代数学の基本定理

m次方程式

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ = \ 0 \ \ (a_m \neq 0)$$

は（重複度込みで）m個の複素数解 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を必ず持つ.

$\Longrightarrow$ では，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ を具体的に求めるにはどうすればよいか？

解の公式

方程式の解を与えるものに，解の公式がある：

- $m=2$ のとき：2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式は

$$\alpha_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad と \quad \alpha_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- $m=3$ のとき：3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解の公式（いわゆる**カルダノの公式**）は

$$\alpha_k = \omega^k A_+ + \omega^{2k} A_- - \frac{a}{3}. \quad (k=1,2,3)$$

ただし $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $(i^2=-1,\ \omega^3=1)$,

$$A_\pm = \sqrt[3]{-\frac{27c+2a^3-9ab}{54} \pm \sqrt{\left(\frac{27c+2a^3-9ab}{54}\right)^2 + \left(\frac{3b-a^2}{9}\right)^3}}$$

解の公式（つづき）

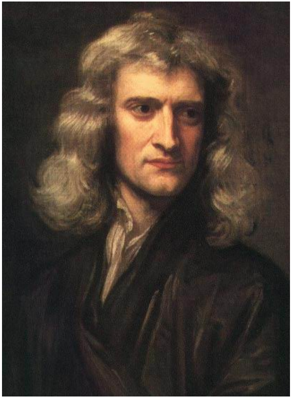
- $m = 4$ のとき：4次方程式にたいしても，フェラリの公式と呼ばれる公式（というよりは解法）が存在する．
- $m \geq 5$ のとき：アーベル，ガロアにより，解の公式は存在しないことが証明されている．
- 注意：解の存在自体は代数学の基本定理により保証されている．
- $\Longrightarrow$ 一般m次方程式を『解く』には，「解の公式」以外のアプローチが必要！？

別のアプローチ

- そもそも，「解の公式」は役に立つのであろうか？
- たしかに，$x^2 - 2 = 0$ に対し「公式」より $x = \pm\sqrt{2}$ を得るが，現実的には$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ という値とその精度が重要．そこで．．
- **『方程式を解く』とは，その解の全てを任意の（たとえば有効数字*150*万桁，などの）精度で与えることである．**

  と解釈してみよう．
- 以下では，その方法を考えてみる．実は，意外な人物が登場：

「万有引力」の，あの人です



- アイザック・ニュートン（Issac Newton 1643–1727）
- 1667年ケンブリッジ大学教授に就任，『無限級数の解析』を著わす．
- その本の中で，方程式の解を任意の精度で与える手法（ニュートン法）を発表．

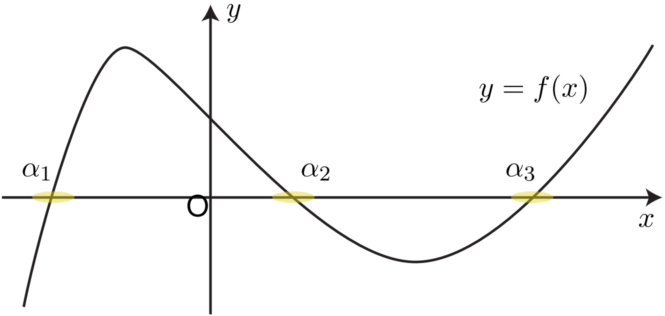
ニュートン法

- 与えられた m次方程式

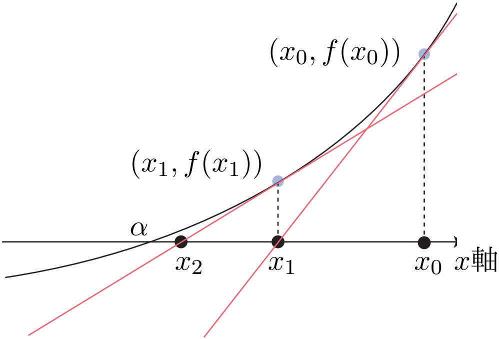
$$f(x) \ := \ a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ = \ 0$$

にたいし，まず関数のグラフ $y = f(x)$ を考える．

- グラフの y 軸との交点を見れば，大体の解の位置がわかる．



ニュートン法のアルゴリズム



- 解 α （まだ正確な値はわからない）のある程度近い数 x_0 を選ぶ.
- グラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ から接線を引き，y 軸との交点を $(x_1, 0)$ とする.
- グラフ上の点 $(x_1, f(x_1))$ から接線を引き，y 軸との交点を $(x_2, 0)$ とする.

以下同様に続ければ，

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_4 \mapsto \cdots \mapsto \cdots \longrightarrow \alpha \quad \text{（どんどん近づく！！）}$$

ニュートン法のアルゴリズム（つづき）

- ニュートン法で得られる数列

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_4 \mapsto \cdots \mapsto \cdots \to \alpha \quad \text{（どんどん近づく！！）}$$

は，公式 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ を満たす．

- 従って，この公式に値を反復して代入すればニュートン法のアルゴリズムとなる．
- 例１： $f(x) = x^2 - 2$ のときは，

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

- 例２： $f(x) = x^3 - 1$ のときは，

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2}$$

ニュートン法は速い！！

たとえば $f(x) = x^2 - 2 = 0$ に初期値を $x_0 = 2$ としてニュートン法を適用してみる．公式 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ より…

ステップ	x_n	x_n と $\sqrt{2}$ の誤差
0	2.00000000000000000000	0.586
1	1.50000000000000000000	0.0858
2	1.41666666666666666667	0.00245
3	1.41421568627450980039	2.12×10^{-6}
4	1.4142135623746899106	1.59×10^{-12}
5	1.41421356237309504880	8.99×10^{-25}
6	1.41421356237309504880	2.86×10^{-49}

しかし，疑問点が…

- ニュートン法で得られる数列

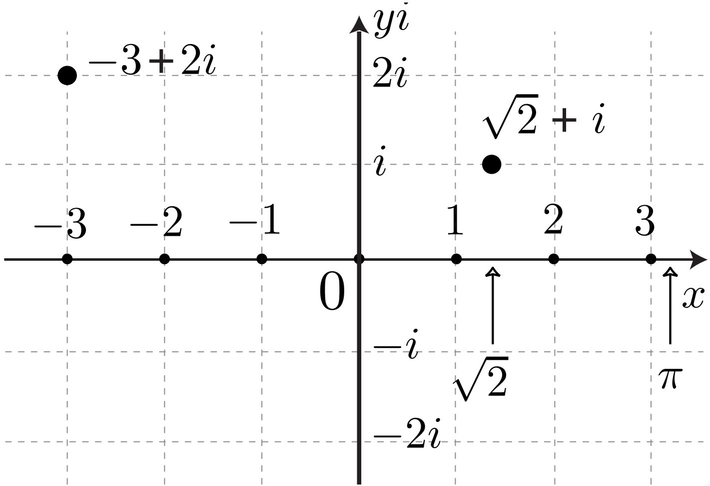
$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_4 \mapsto \cdots \mapsto \cdots$$

が，いつでも解 α に近づくとは限らない！

- <コンピューターで悪い例をひとつ見てみましょう．>

- では，α にたいし，どの程度近くに x_0 をとれば，上のような数列が得られるのだろうか？？
- $\Longrightarrow$ 状況は複素数で見たほうがわかりやすい．

ちょっとだけ複素数を復習しましょう：



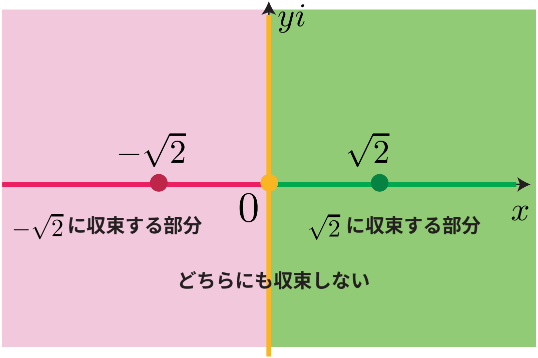
実数＝数直線 $\Longrightarrow$ 複素数＝「数平面」（$i^2=-1$）．

2次方程式 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ の場合

- $\pm\sqrt{2}$ を解にもつ方程式：

$$f(x) = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

- そのニュートン法：$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}$
- $-\sqrt{2}$, $+\sqrt{2}$に収束する領域: 実数の場合 複素数の場合

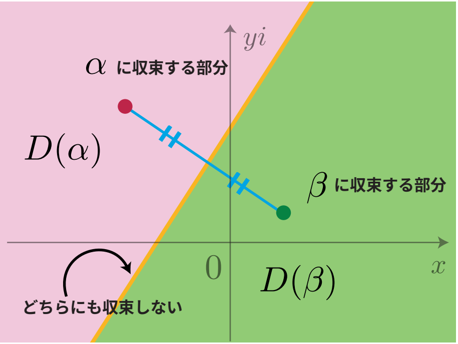


一般2次方程式の場合：ケーリーの定理

ケーリーの定理. 複素数 α, β を解にもつ2次方程式

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - px + q \\ &= (x-\alpha)(x-\beta) = 0 \end{aligned}$$

について，



ニュートン法が

●α に収束する領域 $D(\alpha)$ と ●β に収束する領域 $D(\beta)$

は α と β の垂直2等分線で等分割される.

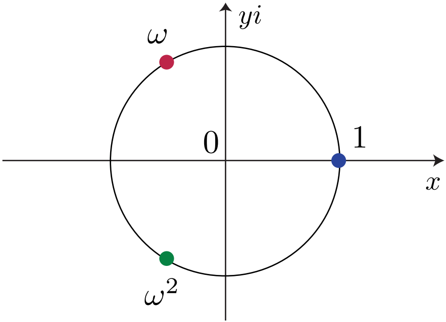
3次方程式の場合：最も簡単そうな例

- 3次方程式

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 1 \\ &= (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2) = 0 \end{aligned}$$

- 解は $1, \omega, \omega^2$，ただし

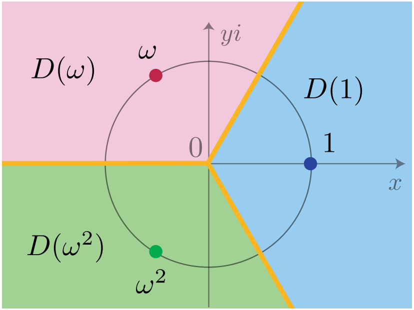
$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$



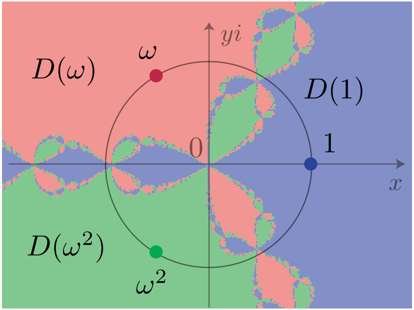
- ニュートン法：$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 1}{3x_n^2}$
- では，$D(1)$，$D(\omega)$，$D(\omega^2)$ の形は？？

$D(1)$, $D(\omega)$, $D(\omega^2)$ の形

2次方程式から類推すると…



しかし，実際は：



となってしまう！！！

- ＜コンピュータで細部まで詳しく見てみましょう．＞
- この現象を説明するには，どんな理論が必要だろうか？

ニュートン法＝関数の反復合成

- m次方程式：

$$f(x) \;=\; a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \;=\; 0$$

- そのニュートン法：$x_{n+1} \;=\; x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- 新しい関数を定義： $N_f(x) \;:=\; x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$
- $x_{n+1} = N_f(x_n)$ より，ニュートン法は

$$x_0 \overset{N_f}{\longmapsto} x_1 \overset{N_f}{\longmapsto} x_2 \overset{N_f}{\longmapsto} x_3 \overset{N_f}{\longmapsto} x_4 \overset{N_f}{\longmapsto} \cdots$$

と関数 $N_f(x)$ を反復して合成することに対応.

一般化すると…

- m次多項式 $f(x)$ に対し，

$$N_f(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)} = \frac{[m\text{次式}]}{[(m-1)\text{次式}]}$$

- 一般化して，$F(x) = \dfrac{a_m x^m + \cdots a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0}$ という形の関数（有理関数とよばれる）を考える．
- これを反復合成すると

$$x_0 \overset{F}{\longmapsto} x_1 \overset{F}{\longmapsto} x_2 \overset{F}{\longmapsto} x_3 \overset{F}{\longmapsto} \cdots \quad \text{(行く末はわからない)}$$

という数列が得られる．
- この数列を，初期値 x_0 の F による軌道とよぶ．

複素力学系の世界観

$$x_0 \xrightarrow{F} x_1 \xrightarrow{F} x_2 \xrightarrow{F} x_3 \xrightarrow{F} \cdots \quad \text{(行く末はわからない)}$$

こうして得られる軌道たちを次のように解釈してみよう：

空間	$\Longleftrightarrow$	複素数全体（数平面）
時間	$\Longleftrightarrow$	$0, 1, 2, 3, \ldots$
運動法則	$\Longleftrightarrow$	$x_{n+1} = F(x_n)$

- これは，単純化された「世界のモデル」である．
- このような枠組みを，関数 F による $\mathbb{C}$ 上の複素力学系とよぶ．

1918年グランプリ

- 近年コンピューターの発展により，複素力学系の理論は著しく発展．
- しかしその礎は，コンピューター以前に築かれていた．
- 1915年，フランス科学アカデミーは次の懸賞問題を発表：
- **『反復合成による力学系についての大域的理論の完成』**
- 二人の数学者ファトウとジュリアの争いとなった！

天文学者でもあった・ファトウ

ピエール・ファトウ
(Pierre Fatou, 1878–1929)

- フランス東部の町ロリアンに生まれる.
- 1901年から没年までパリ天文台に勤務.
- その傍ら数学の研究を続けた.
- 複素解析，積分論，天文学において顕著な業績.

大戦の英雄・ジュリア

ガストン・ジュリア
(Gaston Julia, 1893–1978)

- フランス統治下のアルジェリア生まれ.
- 第一次世界大戦で軍人として活躍.
- このとき，顔面に深い傷を負い，鼻を失った.
- 複素解析，数論，関数解析など，幅広い分野に業績.

グランプリの結果は？？？

- 1917年，ジュリアは論文をアカデミーに送付.
- その後，ファトウがジュリアと類似の結果をComptes Rendus誌に発表.
- ジュリアはComptes Rendus誌およびアカデミーに対し抗議.
- 結局…
  - グランプリはジュリア，賞金3000フラン
  - ファトウの業績も称えられ，賞金2000フランが贈られた.

ファトウとジュリアの理論

では，ファトウとジュリアの理論を大雑把に見てみましょう．

- 力学系はファトウ集合（安定な部分，秩序=コスモ）とジュリア集合（不安定な部分，混沌=カオス）に2分される．
- ファトウ集合（安定部分）とは：『初期値がブレても，ブレが小さければ軌道はほとんど変化しない部分．』
- 例：$f(x) = x^3 - 1$ のニュートン法の $D(1)$, $D(\omega)$, $D(\omega^2)$.
- ジュリア集合（不安定部分）とは：『初期値が少しでもブレると，軌道が激変してしまう部分．』
- 例：上で$D(1)$, $D(\omega)$, $D(\omega^2)$ 以外の部分．

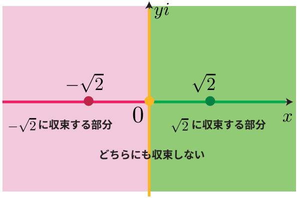
ファトウとジュリアの定理

ファトウとジュリアは独立に，次の定理を示した：

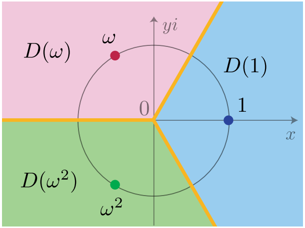
ファトウとジュリアの定理

ファトウ集合（安定部分）はジュリア集合（不安定部分）によって**1**個，**2**個，もしくは無限個の部分に分割される．特に，ちょうど**3**つに分割されることはない．

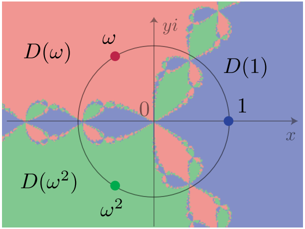
これはOKでも，



これはダメで，

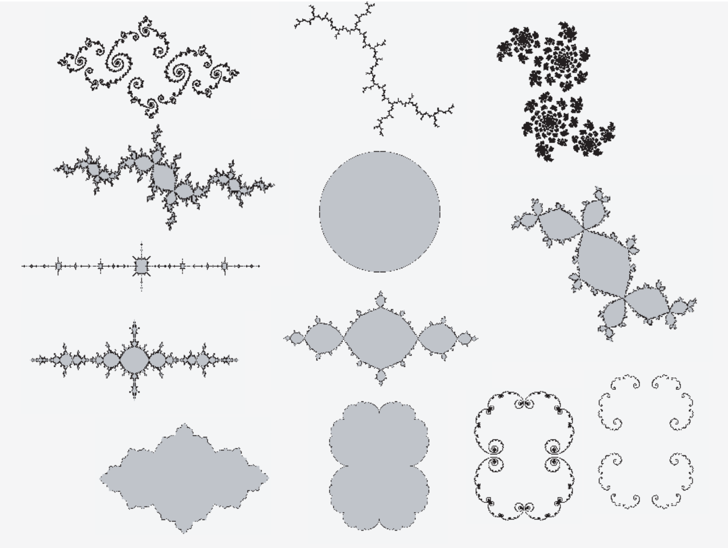


こうなってしまう！



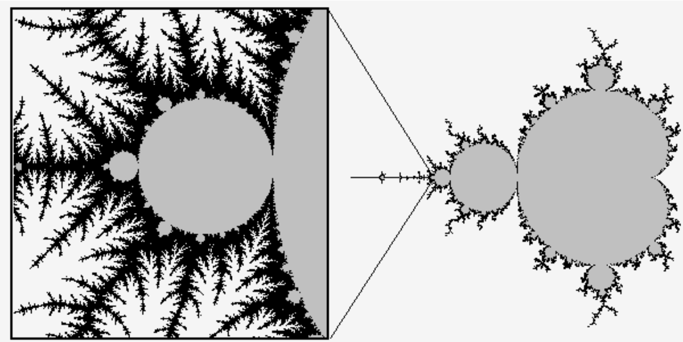
$F(x) = x^2 + c$ から生成されるジュリア集合たち

c の値を変えるとジュリア集合の形も変わる：



マンデルブロー集合

ジュリア集合の『カタログ』マンデルブロー集合について：



ありがとうございました！

参考文献等

- 『フラクタルの美 複素力学系のイメージ』H.O.パイトゲン他 （シュプリンガー・フェアラーク東京）
- 『フラクタルの世界—入門・複素力学系』宇敷重広（日本評論社）

- 私のウェブページ（http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira）今日使用したプログラムや絵がおいてあります.