付録C　べき級数と正則関数の局所理論

本付録のあらまし

- 付録 B の結果をもとに，**べき級数**の一般論を概説する．とくに，収束するべき級数は正則関数を定めることを示す．
- つぎに，第 4 章で扱った**テイラー展開やローラン展開の広義一様収束性**を証明する．
- べき級数(テイラー展開)を用いると，正則関数を局所的に多項式関数で近似することができる．その誤差の評価や，逆関数の存在(**逆関数定理**)を示す．

C.1　べき級数の収束性と微分・積分

複素数 α と複素数の列 A_0, A_1, $\cdots$ を用いて，

$$\boldsymbol{A_0 + A_1\,(z-\alpha) + A_2\,(z-\alpha)^2 + A_3\,(z-\alpha)^3 + \cdots} \tag{C.1}$$

の形の級数で与えられる関数を**べき級数**もしくは**整級数**という．べき級数とは，複素平面上の正則関数からなる列 $\{A_n(z-\alpha)^n\}_{n=0}^{\infty}$ が定める関数項級数(付録 B，B.4 節)である．付録 B の例 8 はその典型例である．

式 (C.1) のべき級数は $z=\alpha$ のとき明らかに収束するが，それ以外の z での(一様)収束性と，関数としての局所的な性質について調べていこう．以下では $\alpha=0$ とした

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,z^n = A_0 + A_1\,z + A_2\,z^2 + A_3\,z^3 + \cdots$$

の形のべき級数をおもに扱うが，z を $z-\alpha$ に換えれば議論はそのまま一般化される．

収束性の判定　まず，べき級数の収束性に関する重要な命題を示す．