

複素力学系における ラミネーション理論 変形と剛性

1 December 2009

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
川平 友規

CONTENTS

1. 複素力学系とは
2. 複素力学系の変形と剛性
3. 力学系とラミネーション理論
4. 2次多項式族のLyubich-Minskyラミネーション
5. Zalcmanの補題：新しいラミネーション理論にむけて

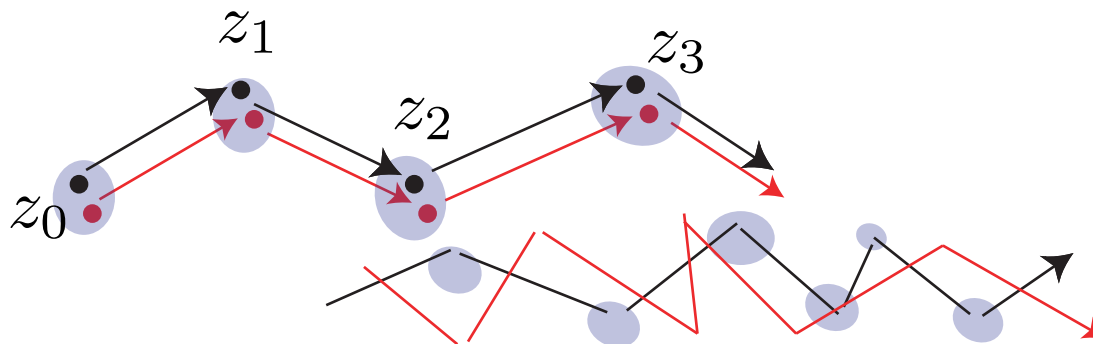
複素力学系

◆ $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 有理写像, $\deg f \geq 2$

◆ $\overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \dots$ 力学系
 $\Psi \quad \quad \quad \Psi \quad \quad \quad \Psi \quad \quad \quad \Psi$
 $z_0 \mapsto z_1 \mapsto z_2 \mapsto z_3 \mapsto \dots$ 軌道

◆ Julia集合 = 力学系のカオス部分

$$J(f) := \left\{ z_0 \in \overline{\mathbb{C}} : \begin{array}{l} z_0 \text{ の任意の近傍で } \{f^n\} \\ \text{は同程度連続でない} \end{array} \right\}$$



不安定！

例：2次多項式族による力学系

◆ $f(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$: パラメーター)

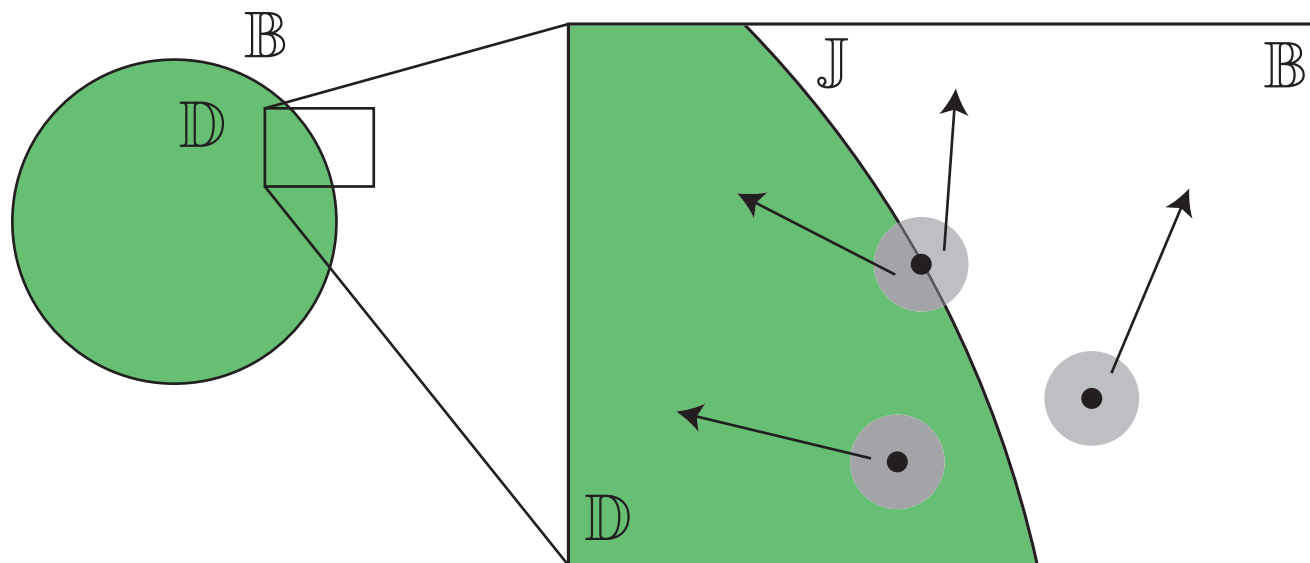
◆ $c = 0 \implies z_n = f^n(z_0) = z_0^{2^n}$

Case $\mathbb{D}$: $|z_0| < 1 \implies z_n \rightarrow 0$ 安定

Case $\mathbb{B}$: $|z_0| > 1 \implies z_n \rightarrow \infty$ 安定

Case $\mathbb{J}$: $|z_0| = 1 \implies z_n \in \{|z| = 1\} = J(f)$

不安定 (Julia)



複素力学系の変形と剛性

◇ $\begin{array}{ccccccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \dots \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ z_0 & \longmapsto & z_1 & \longmapsto & z_2 & \longmapsto & z_3 & \longmapsto & \dots \end{array}$ 複素力学系 軌道

◇ 世界のモデル : 空間 $\overline{\mathbb{C}}$
時間 $0, 1, 2, 3, \dots$ (秒)
運動法則 $z \longmapsto f(z)$ (1秒後)

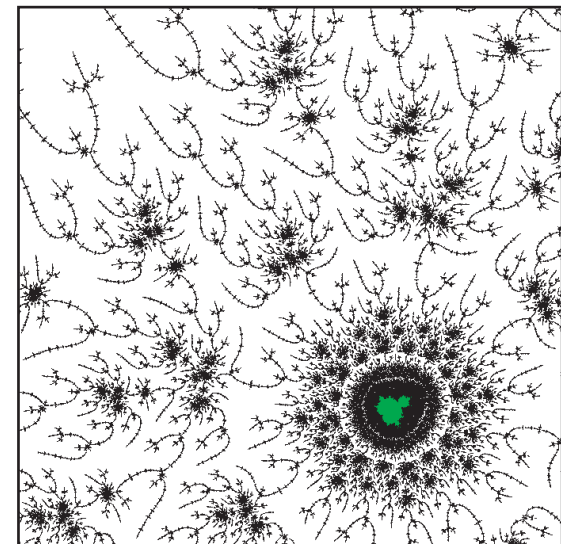
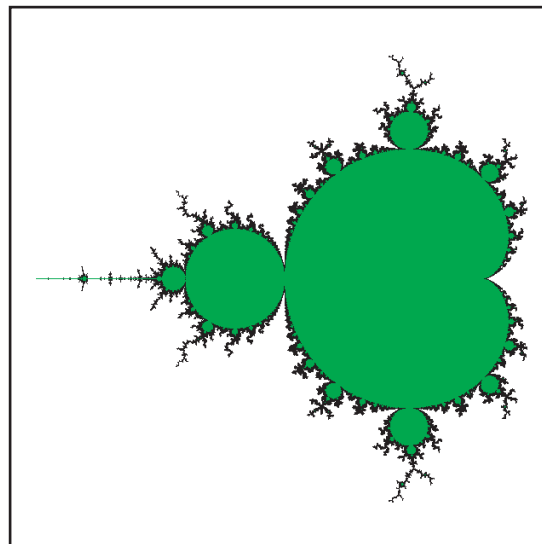
◇ どんな「世界」がありうるか? 「世界」は安定か?

例

$$f(z) = z^2 + c$$

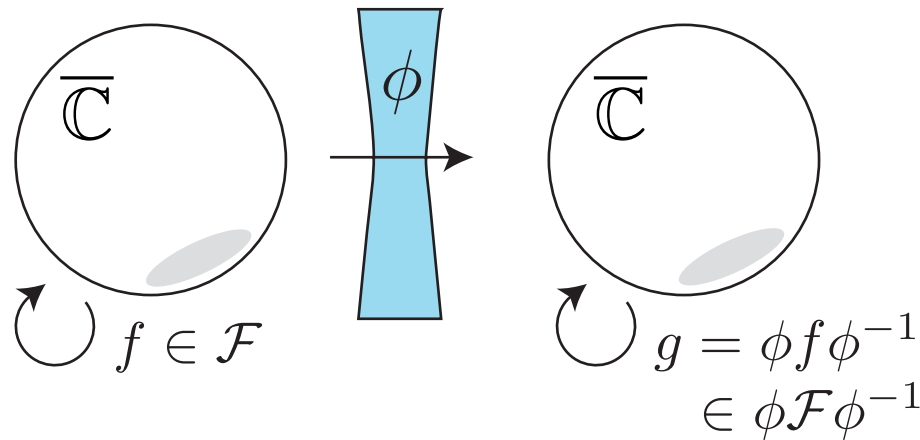
$(c \in \mathbb{C})$

「世界」のカタログ
Mandelbrot集合



力学系の位相的変形と剛性

◆ $\mathcal{F}$: 複素力学系 = $\overline{\mathbb{C}}$ 上の正則写像族



$\phi : \overline{\mathbb{C}}$ の自己同相 (レンズ)

力学系の位相的変形

= 力学系をレンズ越しに眺めたもの

◆ **複素力学系の剛性**

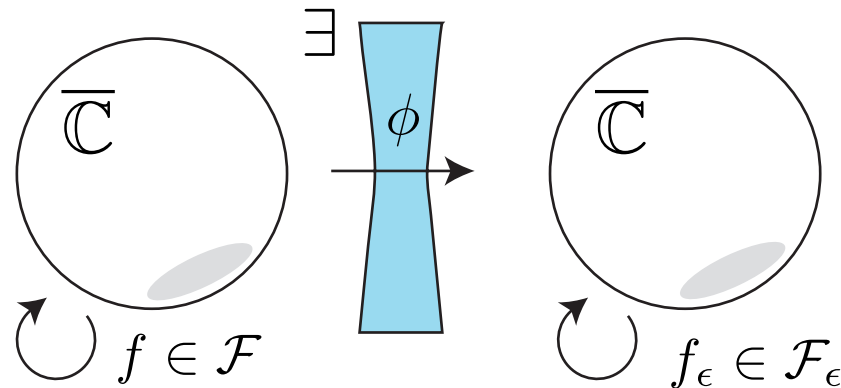
= $\phi \mathcal{F} \phi^{-1}$ が再び複素力学系 $\Rightarrow \mathcal{F}$ と本質的に同じ力学系
= **力学系の変形阻害性**

◆ **N I L F 予想 (重要問題!)**

= Julia集合上の力学系 $f \curvearrowright J(f)$ は擬等角写像をレンズとする変形を許さない = **カオス部分の剛性**

剛性と安定性の関係

◆ **構造安定性** = 有理写像を係数空間で微小変化させても、力学系の変化は位相的変形により実現される



◆ **N I L F 予想の解決 (重要問題！)**

⇒ **双曲稠密性予想の解決 (最重要問題！！)**

= 任意の有理写像は**双曲的**有理写像によりいくらでも近似できる

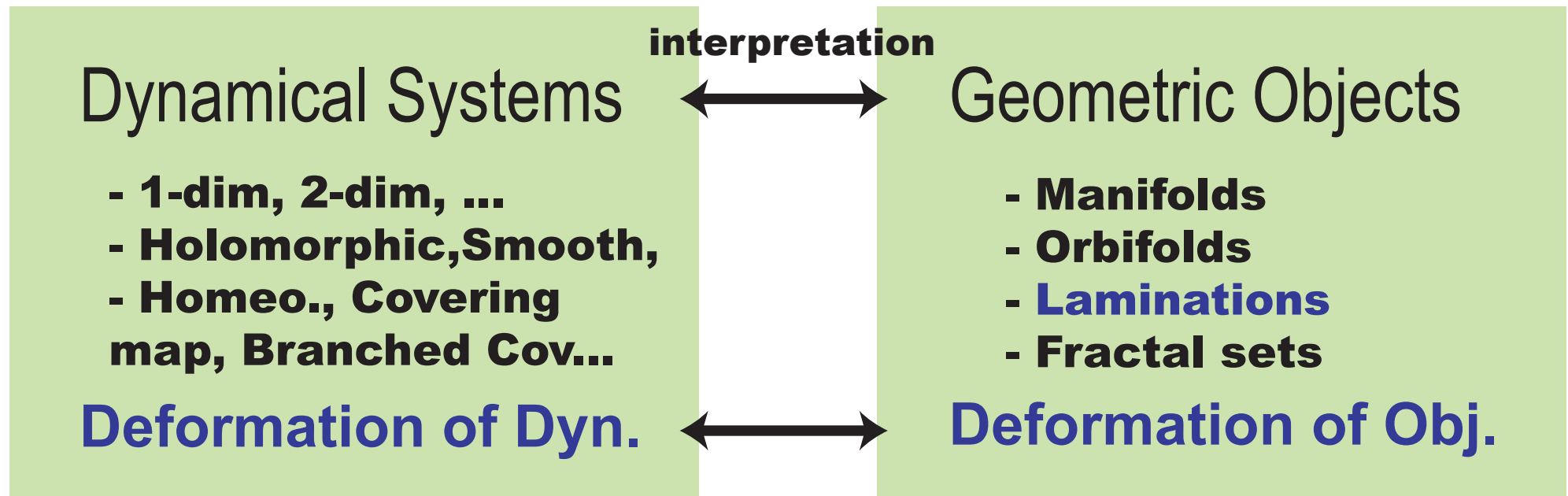
⇒ ・ **双曲的**有理写像による力学系は**構造安定性**をもつ

・ **双曲的**有理写像全体は係数空間で稠密開集合

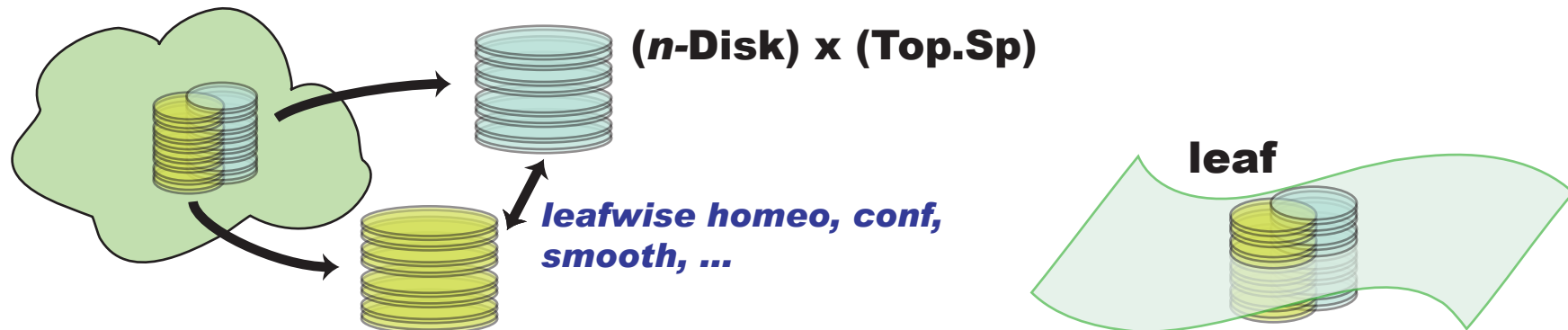
⇒ 「世界」はほとんどの場合安定である！

力学系におけるラミネーション理論

◆ ある種の力学系は幾何学的対象との対応がつく



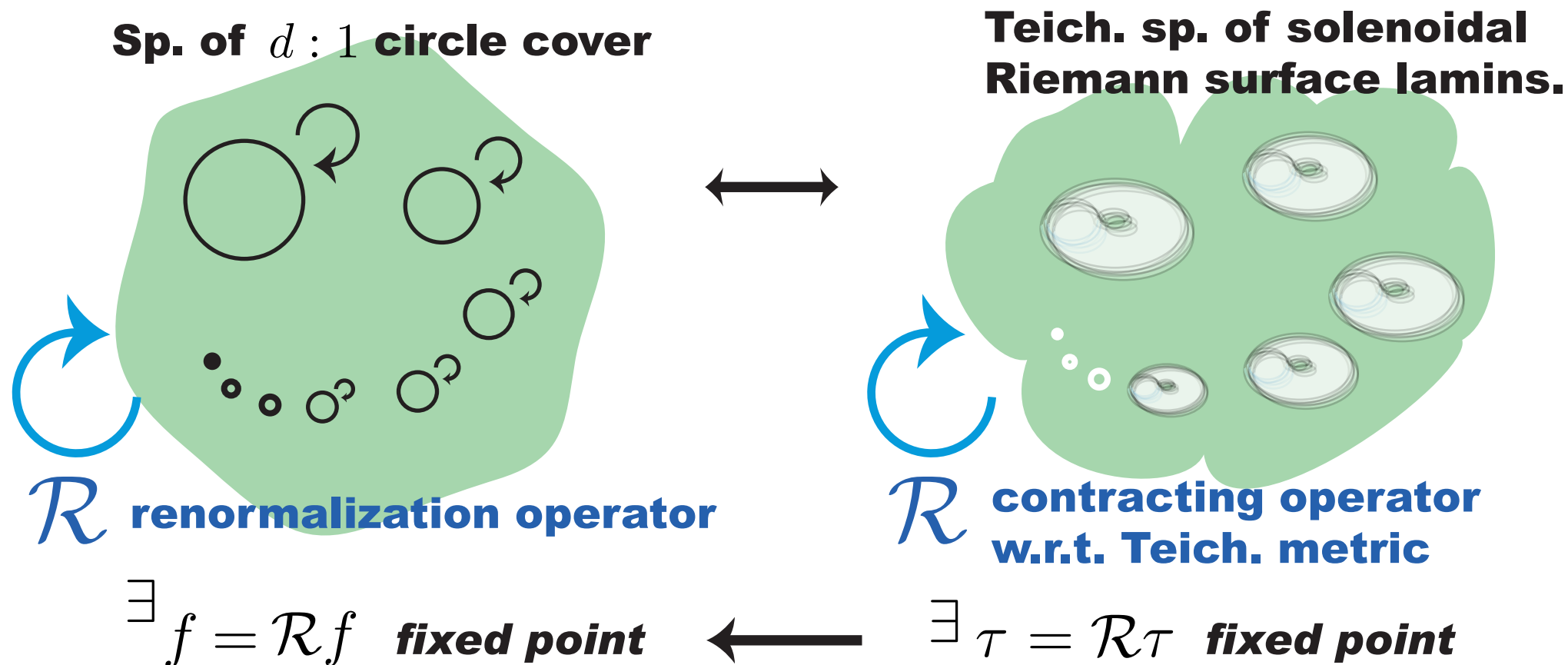
◆ ラミネーション = “laminar charts” で張られる位相空間



例 1 : SullivanのRiemann面ラミネーション

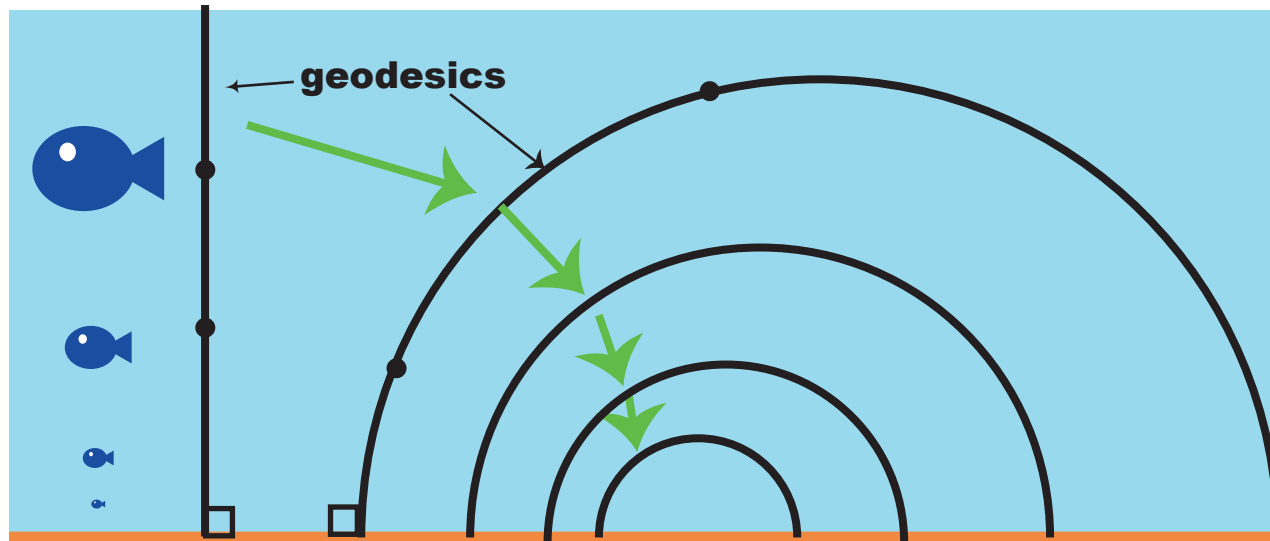
◆ D. Sullivan : circle covering mapにおける「くりこみ固定点」の存在証明

⇒ Riemann面ラミネーションのTeichmüller理論を活用



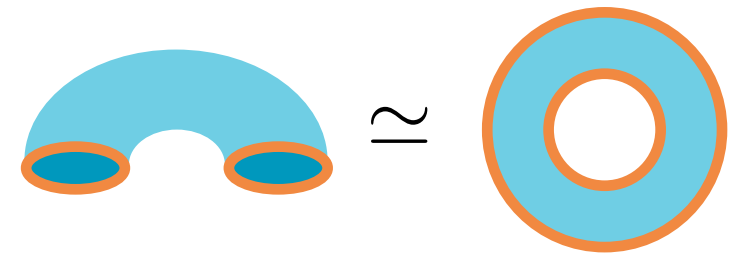
例 2 : 双曲的Riemann面

◇ 上半平面: $\mathbb{H} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t > 0\}$



w/ **hyperbolic metric**

$$ds^2 = (dx^2 + dt^2)/t^2$$



◇ Fuchs群 : $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R}) \simeq \left\{ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \right\}$
discrete

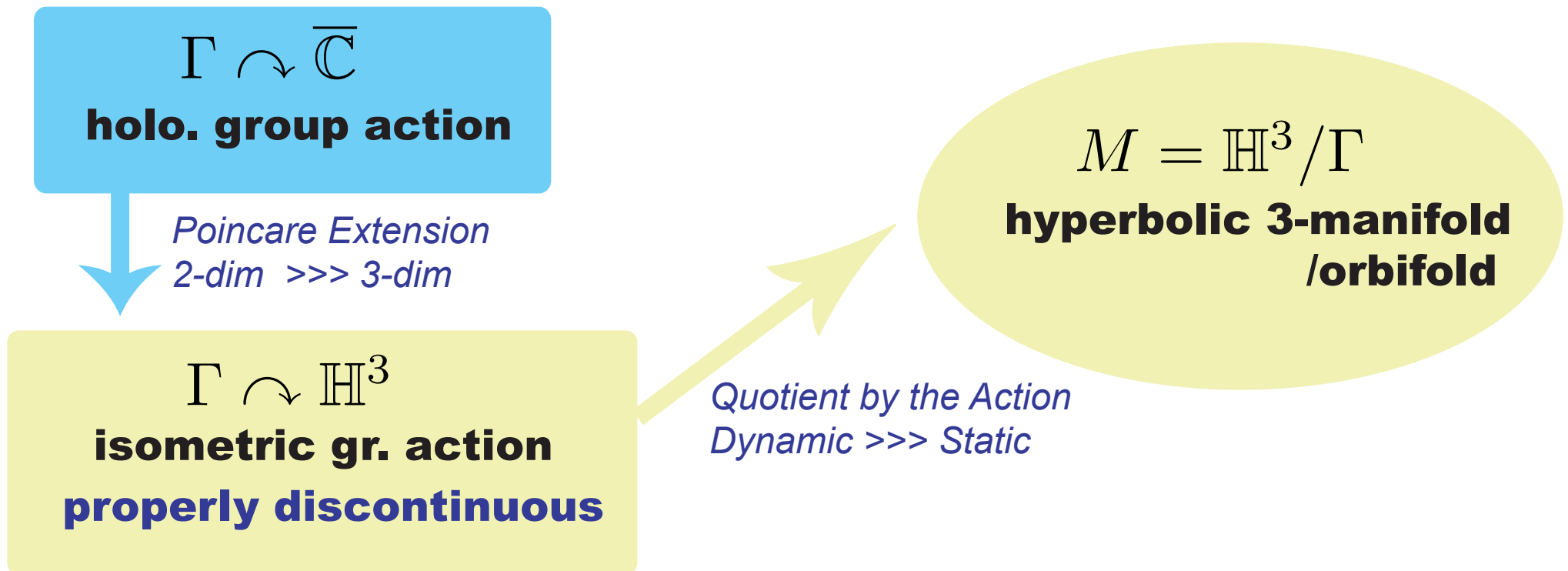
$\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$
isometric gr. action
properly discontinuous

Quotient by the Action
Dynamic >>> Static

$S = \mathbb{H}/\Gamma$
Hyperbolic Riemann
surface / orbifold

例 3 : 3 次元双曲多様体

- ◆ 上半空間: $\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : t > 0\}$
w/ hyp. metric $ds^2 = (dz^2 + dt^2)/t^2$
- ◆ Klein群: $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C}) \simeq \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\}$
discrete



例 4 : Lyubich-Minskyのラミネーション理論

◇ 有理写像 $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \deg f \geq 2$

$f \curvearrowright \overline{\mathbb{C}}$
holo. dynam.

Kleinian Group

$$\Gamma \curvearrowright \overline{\mathbb{C}}$$

holo. group action

Poincare Extension
2-dim $\ggg$ 3-dim

$$\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^3$$

isometric gr. action
properly discontinuous

Quotient by the Action

$M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$
hyperbolic 3-manifold
/orbifold

$\mathbb{C}$ -Lamination

$$\hat{f} \curvearrowright A_f$$

cyclic group action

Poincare Extension
2-dim $\ggg$ 3-dim

$\mathbb{H}^3$ -Lamination

$$\hat{f} \curvearrowright \mathcal{H}_f$$

leafwise isometric gr. action
properly discontinuous

Quotient by the Action

Quotient Lamination

$\mathcal{M}_f = \mathcal{H}_f / \hat{f}$
hyp. 3-orbifold lamination

Lyubich-Minskyの剛性定理

剛性定理 (Lyubich&Minsky, '98)

$f, g \curvearrowright \overline{\mathbb{C}}$: 分岐点軌道が *recurrent* でなく, 放物的周期点をもたない

結果 1. このクラスについて NILF 予想は正しい

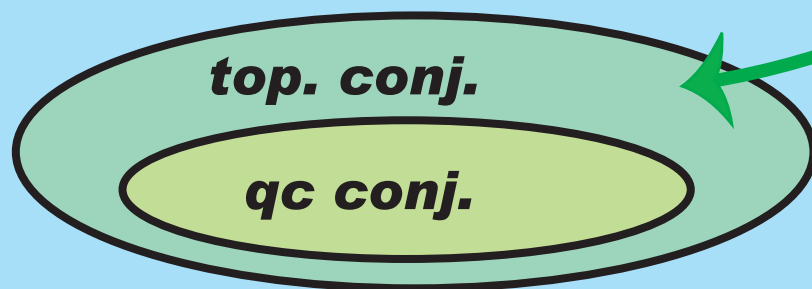
結果 2. $f \sim g$: 位相共役 (位相的変形)

$\implies \mathcal{M}_f \approx \mathcal{M}_g$: 同相

$\implies \mathcal{M}_f \approx \mathcal{M}_g$: 擬等長同相 (双曲幾何の手法を用いる)

$\implies f \sim g$: 擬等角共役

◆ 変形空間のトポロジーについての情報を与える.



This part is empty!

$\text{Rat}_d / \sim$
conf. conj.

2次多項式族のL-Mラミネーション

$$\Gamma \curvearrowright \overline{\mathbb{C}}$$

Fuchsian group

$$f(z) = z^2 \curvearrowright \overline{\mathbb{C}}$$

Symmetric quadratic map

Deformation

$$\Gamma' \curvearrowright \overline{\mathbb{C}}$$

**Quasi-Fuchsian group
(on a Bers slice)**

Deformation

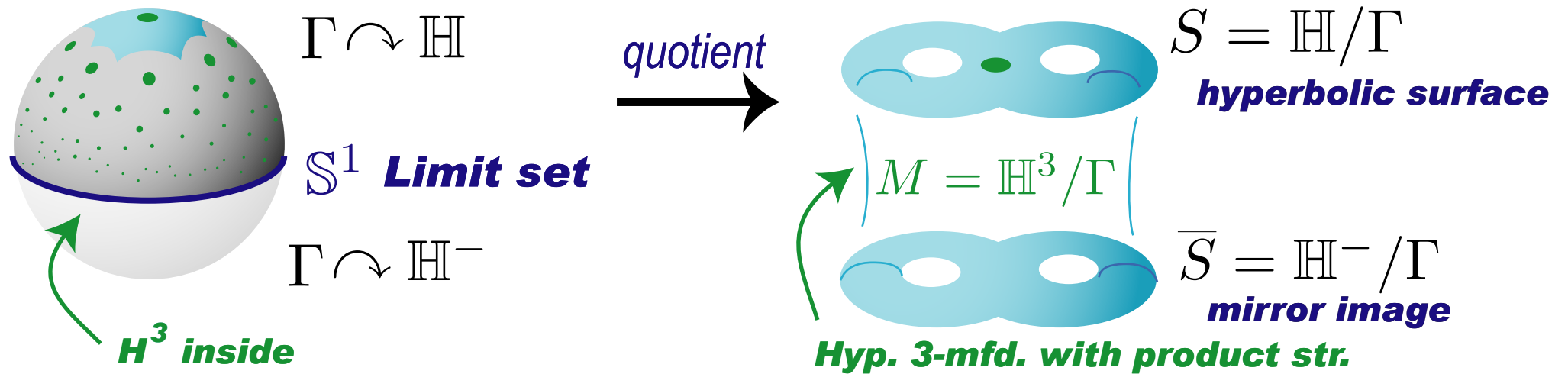
$$f_c(z) = z^2 + c \curvearrowright \overline{\mathbb{C}}$$

**Quadratic map
(on the Mandelbrot set)**

◆ 商多様体 $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$ と商ラミネーション $\mathcal{M}_f = \mathcal{H}_f / \hat{f}$ の変形を比較する.

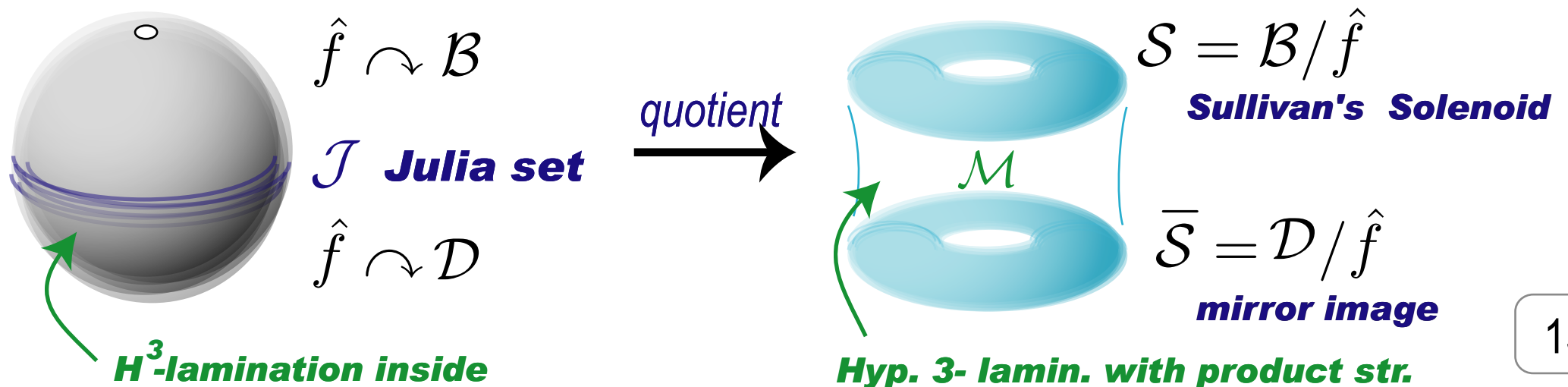
理想境界つきラミネーション

◆ *Fuchs*群に付随する境界つき3次元双曲多様体 :



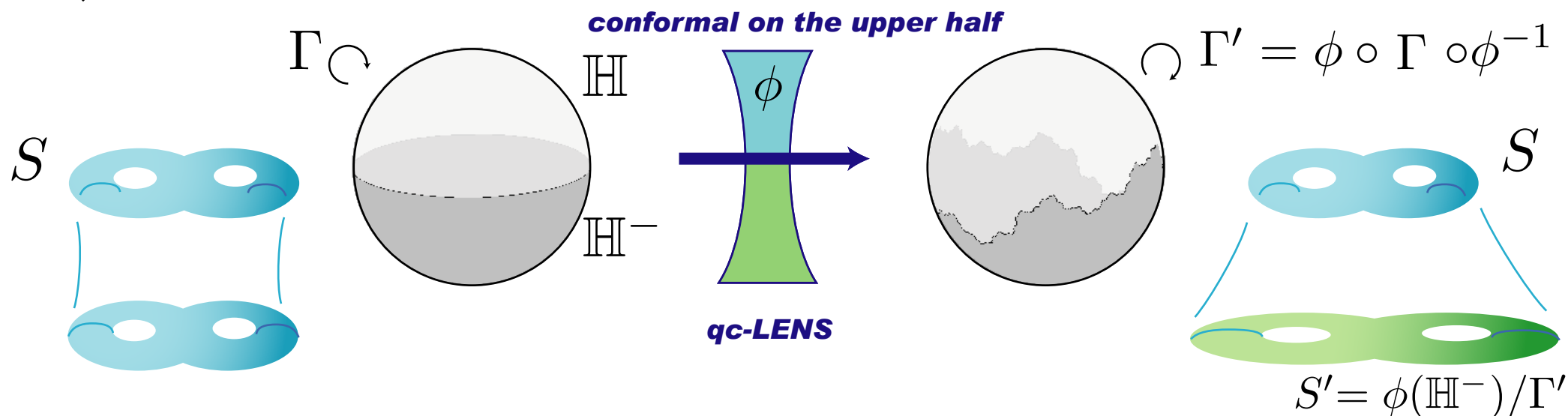
◆ $fz := z^2$ に付随する境界つき3次元双曲ラミネーション :

$$\mathcal{B} = \pi^{-1}(\overline{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}), \quad \mathcal{D} = \pi^{-1}(\mathbb{D}), \quad \mathcal{J} = \pi^{-1}(S^1)$$

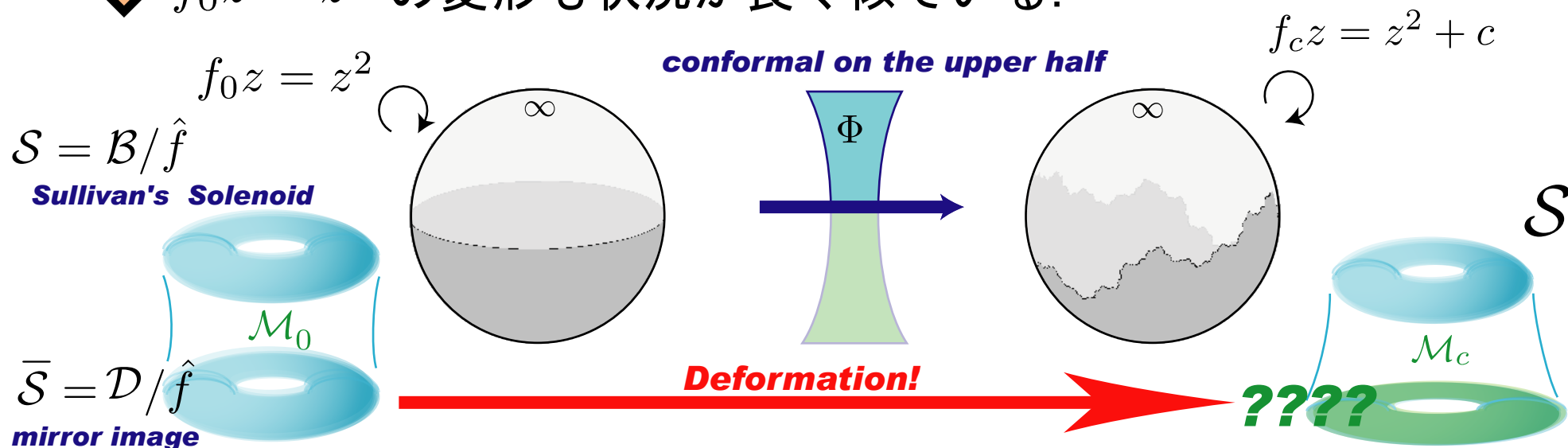


Bersスライス vs. Mandelbrot集合

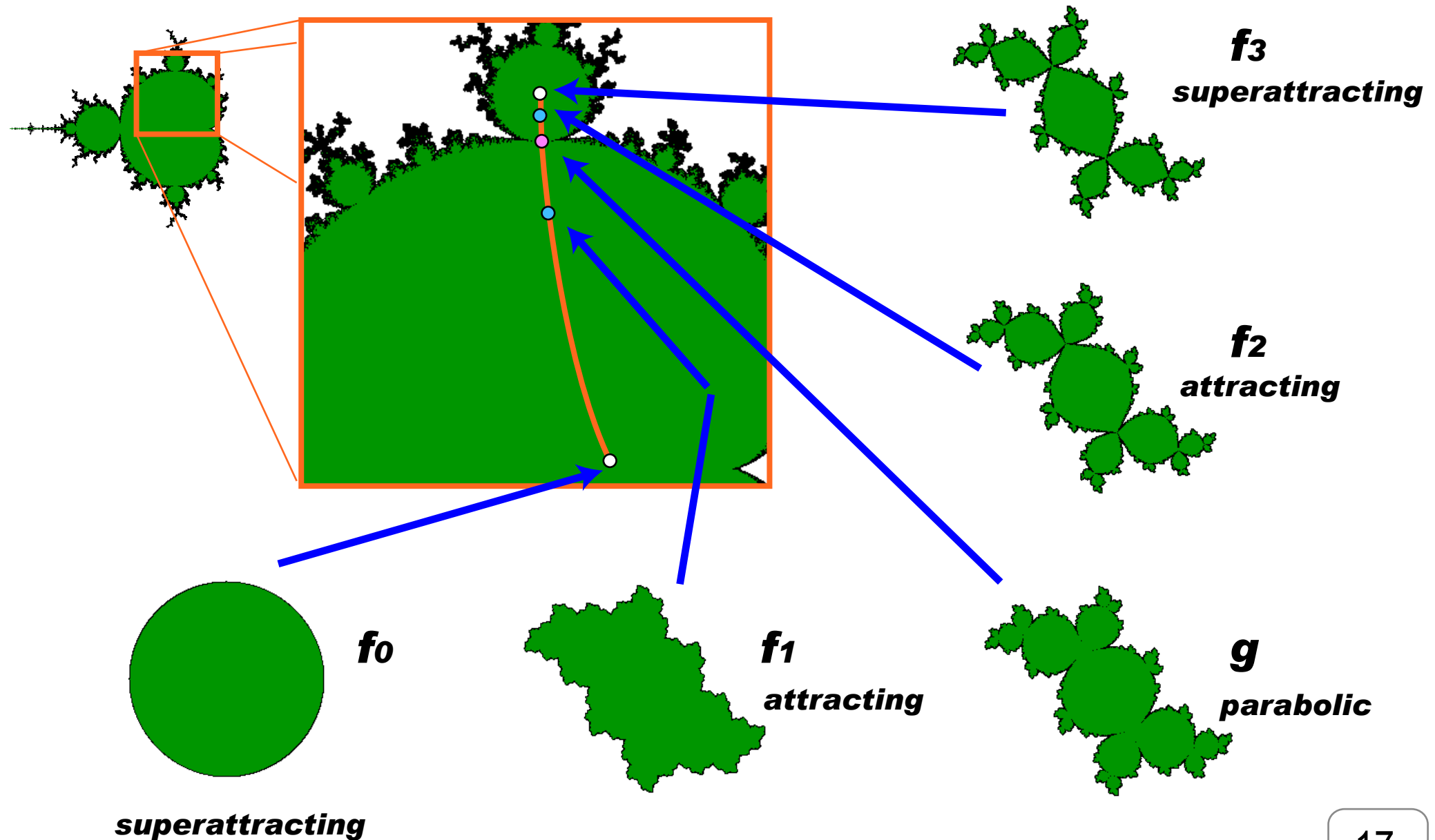
◆ Γ の作用を特殊な擬等角レンズで観測してみよう:



◆ $f_0 z = z^2$ の変形も状況が良く似ている:

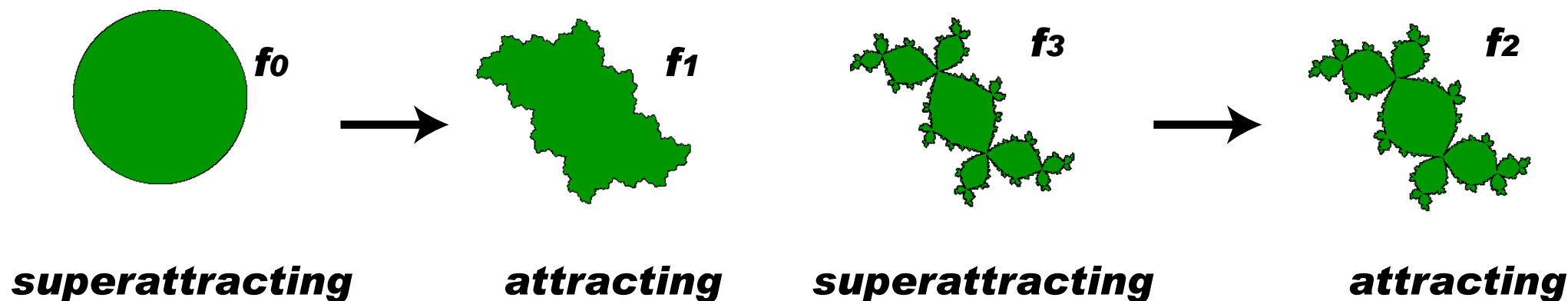


退化と分岐 : The Rabbits



双曲的力学系の安定性

◆ f_0 と f_3 は双曲的 $\Rightarrow$ 力学系は安定 $\Rightarrow$ ラミネーションも安定

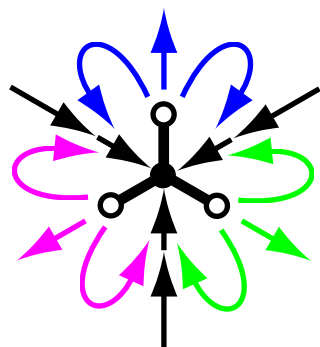


◆ **Stable dynamics implies stable topology:**

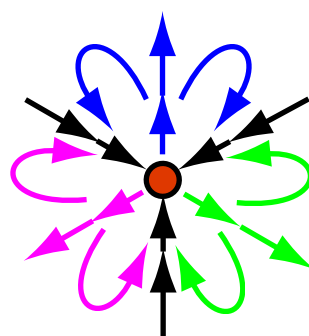
Theorem(K): 双曲的有理写像の十分小さな近傍にある有理写像は、すべて位相的におなじラミネーション構造をもつ。とくに、理想境界も含めて擬等角同相もしくは擬等長同相となる。

放物的分岐と理想境界の変化

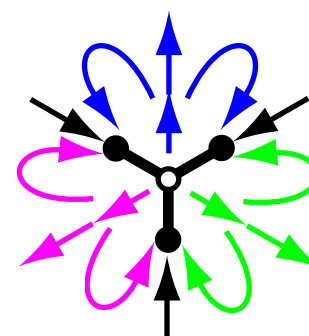
- ◆ 双曲的な力学系が別の双曲的な力学系へ分岐する



● attracting

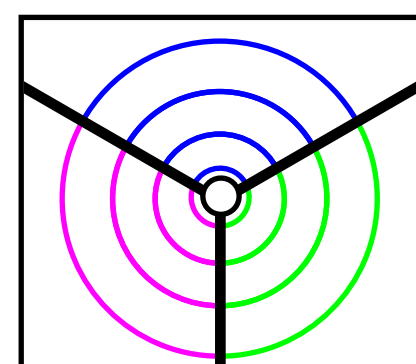
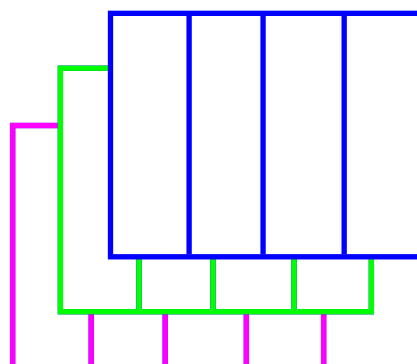
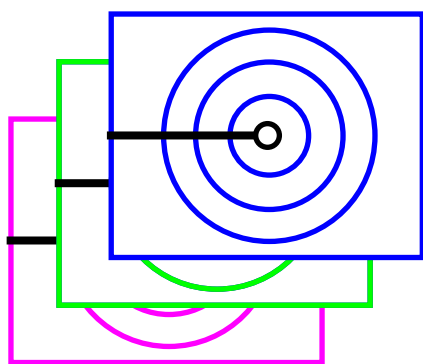


● parabolic



○ repelling

- ◆ **Topology of the *C*-lamination changes!**



ラミネーションの位相的剛性

◆ ラミネーションの位相的構造が、力学系を定める：

Theorem(Cabrera): ふたつの双曲的2次多項式が同相なRiemann面ラミネーションをもてば、それらは同じ双曲成分にある。すなわち、力学系はお互いの擬等角変形。

◆ **Cf. Mostow剛性:** 2つの有限体積・完備双曲多様体が同相であれば、それらは等長同相である。すなわち、基本群となるKlein群は等角同値。

Theorem(Cabrera+K, To appear in Fund.Math.): ふたつの無限回くりこみ可能な2次多項式が同相なRiemann面ラミネーションをもてば、それらは同じ組み合わせ構造をもつ。とくに、そこでMandelbrot集合が局所連結ならば、これらの2次多項式は一致する。

新しいラミネーション理論に向けて
-- Zalcmanの補題 --

Zalcmanの補題

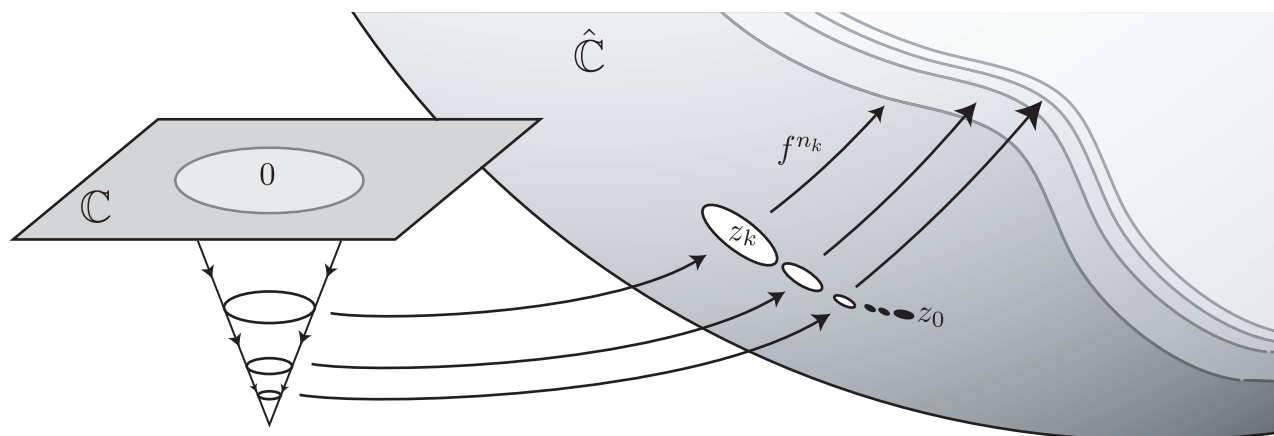
◆ Zalcmanの補題は, Julia集合の判定条件を与える :

Lemma(Zalcman, '75, modified):

$\{f^n\}$ が z_0 において同程度連続でない $\iff z_0 \in J(f)$

$\iff \exists n_k \in \mathbb{N}, n_k \rightarrow \infty, \quad \exists \psi : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$
 $\rho_k \in \mathbb{C}^*, \rho_k \rightarrow 0, \quad \text{非定数有理形関数}$
 $z_k \in \mathbb{C}, z_k \rightarrow z_0$

$$\psi_k(w) = f^{n_k}(z_k + \rho_k w) \rightarrow \psi(w)$$



Zalcmanの補題の応用

- ◆ **Theorem (Fatou, Julia 1910's)**
反発的周期点はJulia集合内で稠密
→ Schwick ('97): Zalcmanの補題を用いた簡単な証明
- ◆ **Theorem (Tan '85, Rivera-Letelier '01)**
Julia集合とMandelbrot集合の類似性
→ K ('09): Zalcmanの補題を用いた簡単な証明
- ◆ K ('09): Zalcmanの補題から得られる有理形関数の空間から
Lyubich-Minskyラミネーションを含むラミネーションを構成.
→ LMラミネーションの比較的簡単な構成
→ Haissinsky-Martin-MayerのNILF定理のラミネーション解釈
(Lyubich-MinskyのNILF定理より良い)