タイヒミューラー空間の基礎のキソ

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
川平 友規

第47回函数論サマーセミナー
2012年8月27日

概要

◆ リーマン面とは何か？

曲面（位相空間）S $\longrightarrow$ リーマン面 $(S, \mathcal{A})$

$\uparrow$

アトラス（地図帳）$\mathcal{A}$ ＝『複素構造』

◆ 考えうるすべてのアトラスを記述・分類したい

$\Longrightarrow$ 大分類：モジュライ空間（リーマン空間）

$\Longrightarrow$ 小分類：タイヒミュラー空間

リーマン面とは

- 定義：S がリーマン面

$:\Longleftrightarrow$
- S は連結なハウスドルフ空間
- 写像の族 $\mathcal{A}=\{\phi : U_\phi \to \mathbb{C}\}$が存在し，

  a) U_ϕはすべて開集合かつ $\bigcup_{\phi\in\mathcal{A}} U_\phi = S$

  b) $\phi : U_\phi \to \phi(U_\phi)\subset\mathbb{C}$ はすべて同相写像

  c) $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$ のとき，

  $$\psi\circ\phi^{-1} : \phi(U_\phi\cap U_\psi) \to \psi(U_\phi\cap U_\psi)$$

  は等角（正則）

- 正確にはペア $(S,\mathcal{A})$ がリーマン面
- Q：地球の世界地図にこの性質はあるか？

リーマン面の例

- 複素平面 $\mathbb{C} := \{x + yi \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$

  $\mathcal{A} = \{\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$　「世界全図」

- 単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$

  $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}\}$　「島の全体図」

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

  $\mathcal{A} = \{\phi_+, \phi_-\}$ ただし，$\phi_\pm : S - \{(0, 0, \pm 1)\} \to \mathbb{C}$

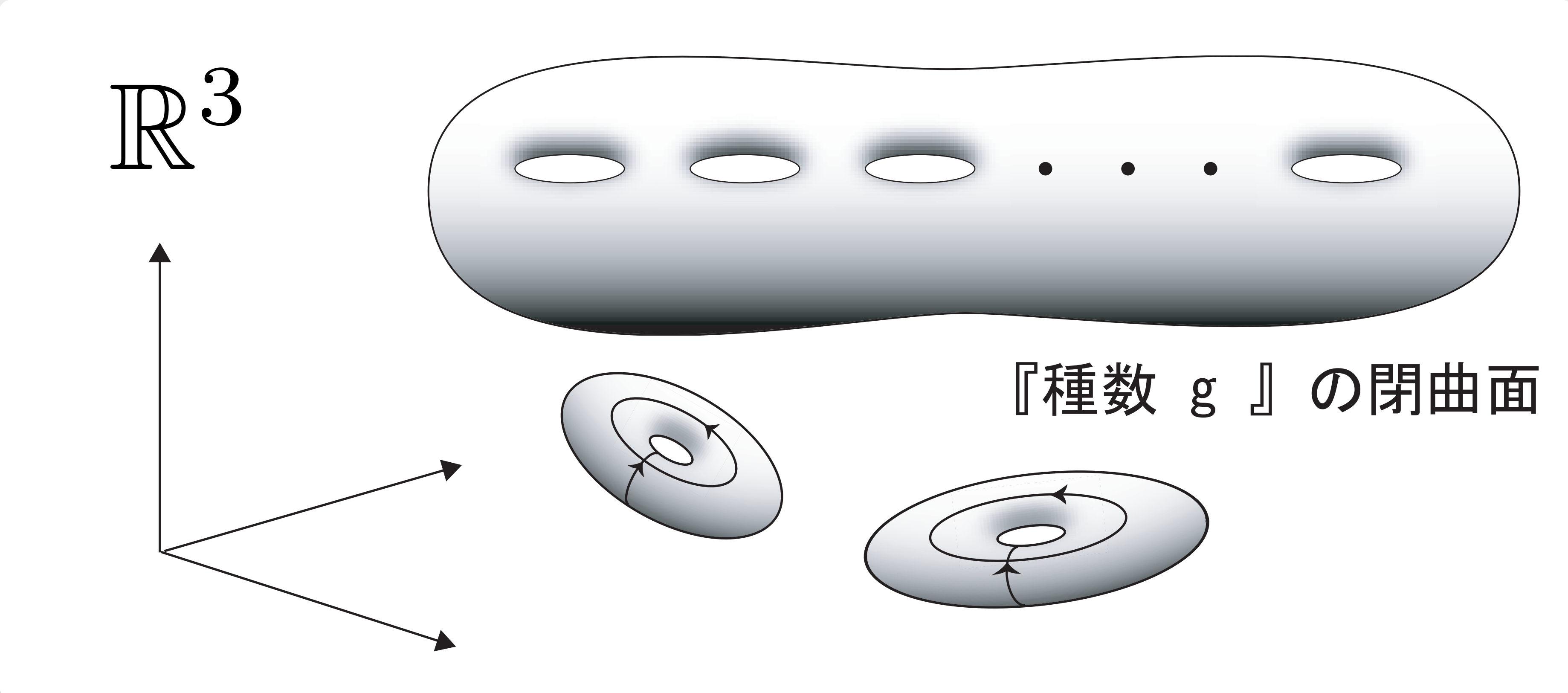
$$\boldsymbol{p} = (X, Y, Z) \longmapsto \phi_\pm(\boldsymbol{p}) = \frac{X \pm Yi}{1 \mp Z}$$

$(S, \mathcal{A})$ をリーマン球面とよび，$\hat{\mathbb{C}}$ で表す.

リーマン面の例・その２

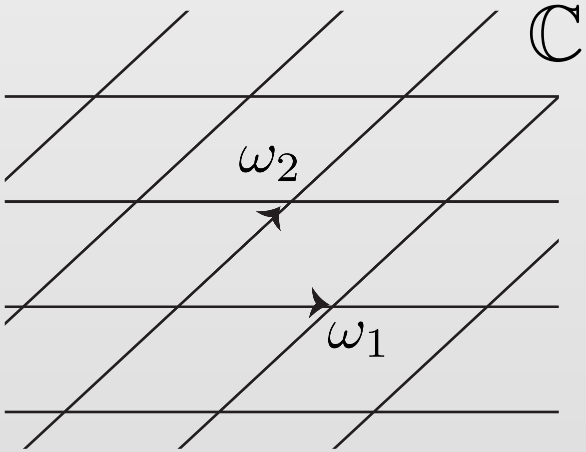
◆ 定理（ガウス）

$\mathbb{R}^3$ 内の任意の実解析的な曲面には地図帳が存在する. したがってリーマン面とみなせる.

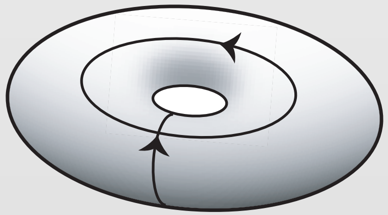


リーマン面の例・その３

- 格子トーラス：商空間による抽象的構成
  - $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ を固定.
  - $z, z' \in \mathbb{C} \quad z \sim z'$
    $$:\Longleftrightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{Z} \ s.t.\ z = z' + m\omega_1 + n\omega_2$$
  - $T(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{C}/\sim$ は（種数１の）リーマン面となる.



$\overset{\Longrightarrow}{\sim}$



- リーマン面には具体的なものから抽象的なものまで，いろいろある.

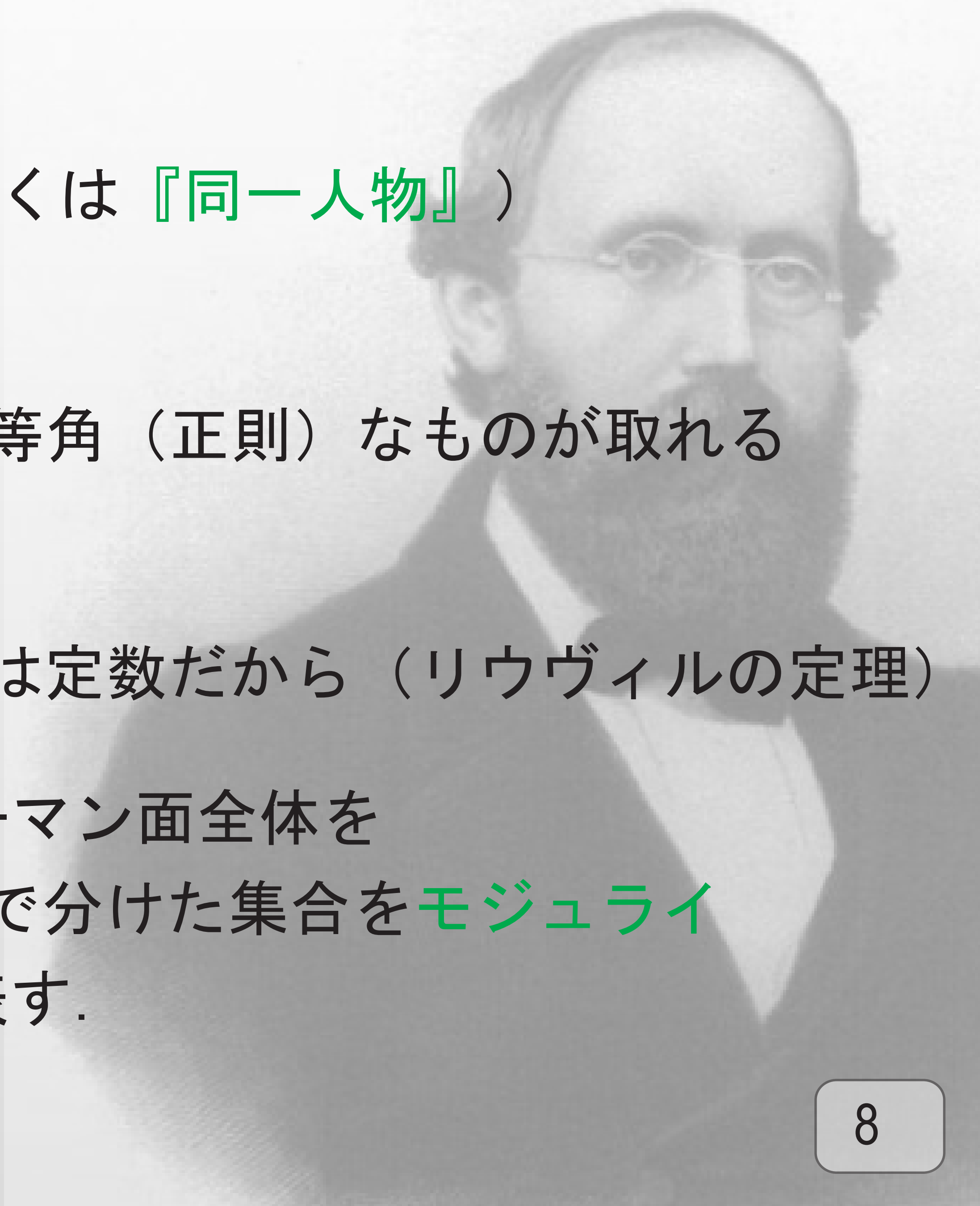
リーマン面の分類

- ふたつのリーマン面が「同じ」であるとは？
- そもそも「同じ」とは？





モジュライ空間



- リーマン流の「同じ」
- $S \simeq S'$ （等角同値，もしくは『同一人物』）

$:\Longleftrightarrow$
  - S と S' は同相；かつ
  - その同相写像として，等角（正則）なものが取れる
- $\mathbb{C} \simeq \mathbb{D}$ でない
  - $\forall f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 正則函数は定数だから（リウヴィルの定理）
- リーマン面 S と同相なリーマン面全体を「等角同値」による同値類で分けた集合をモジュライ（空間）とよび，$M(S)$で表す．

リーマンのモジュライ問題

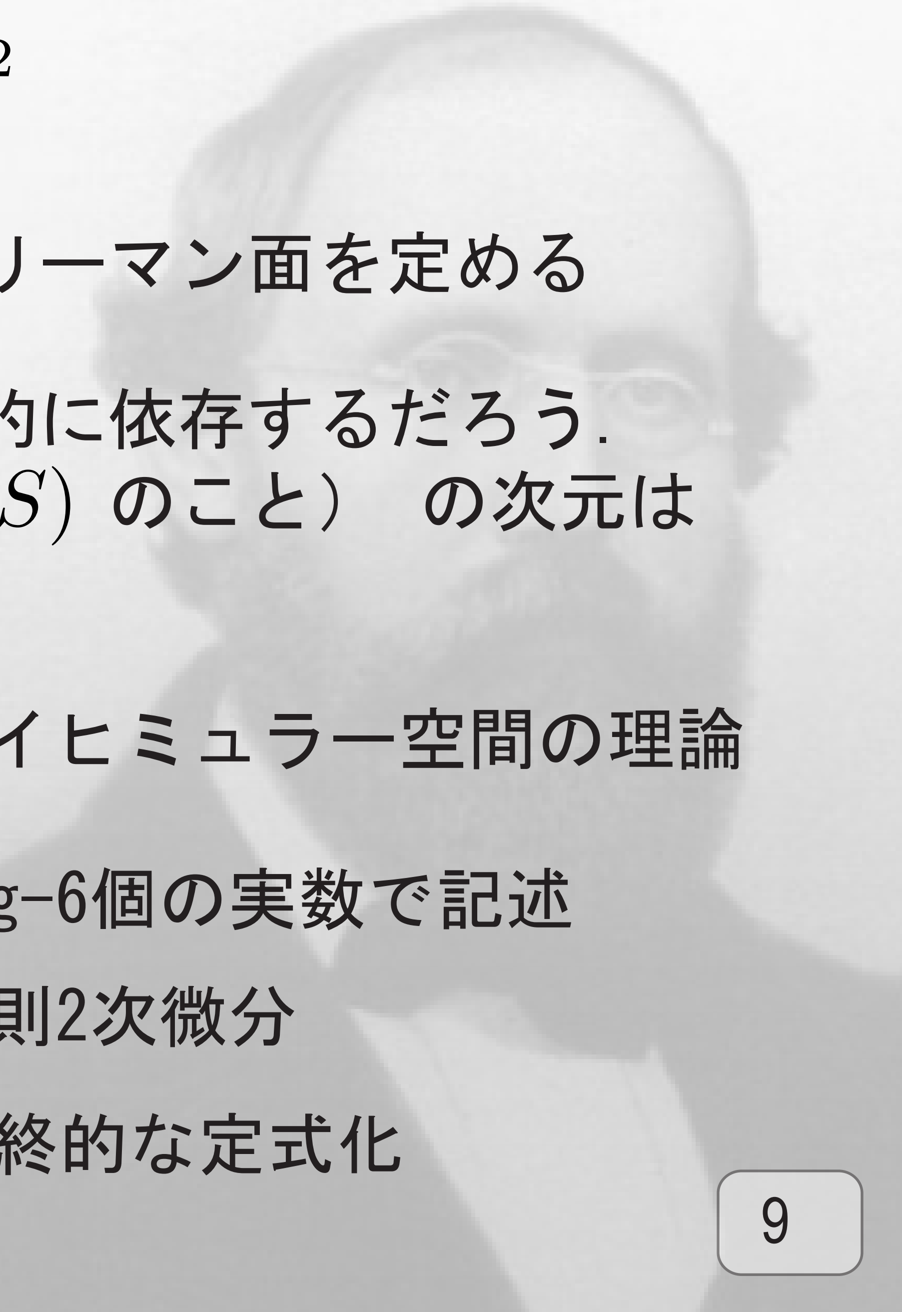
- 代数曲線 $\sum a_{ij} z^i w^j = 0 \ \in \mathbb{CP}^2$

$\Longrightarrow$ （generic にはコンパクトな）リーマン面を定める

$\Longrightarrow$ その複素構造は係数に複素解析的に依存するだろう．
種数 g の場合，その全体（$M(S)$ のこと） の次元は
複素 3g-3 次元であろう．

- この問題に解答を与えるのが，タイヒミュラー空間の理論

  - Fricke, Fenchel, Nielsen 6g-6個の実数で記述
  - Teichmuller 擬等角写像＋正則2次微分
  - Ahlfors, Bers タ空間論の最終的な定式化



地図帳の分類 vs リ面の分類

◇ タイヒミュラー空間を定義する前に．．．

- リーマン面 $(R, \mathcal{A})$ と同相写像 $f : S \to R$ があるとき，
  R のアトラス $\mathcal{A} = \{\phi : U_\phi \to \mathbb{C}\}$ から S の新しいアトラス
  $$f^*\mathcal{A} := \{\phi \circ f : f^{-1}(U_\phi) \to \mathbb{C}\}$$
  が得られる．このとき明らかに，$(S, f^*\mathcal{A}) \simeq (R, \mathcal{A})$

- $\Longrightarrow$ S と同相なリーマン面のモジュライ問題
  $$\Updownarrow$$
  S の地図帳を変化させて得られる
  リーマン面のモジュライ問題（『地図帳の分類』）

タ空間の定義

- 以下，種数 g のコンパクトリーマン面 S を固定.
- その擬等角変形(deformation)全体を次で定義：

$$\mathrm{Def}(S) := \{(R, f) : \quad f : S \to R \text{ は qc} \quad \}$$

- qc = quasi-conformal map ＝ 擬等角写像
  - qc は同相写像，向きも保つ.
  - qc はヘルダー連続.
  - qc は a.e. で全微分可能（解析学ができる！）.
  - qc の合成，逆写像もqc.
  - qc は等角写像と同様に，$\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ を区別する.
    （qc $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ は存在しない．）

タ空間の定義（つづき）

◆ $(R_1, f_1),\ (R_2, f_2) \in \mathrm{Def}(S)$ にたいし

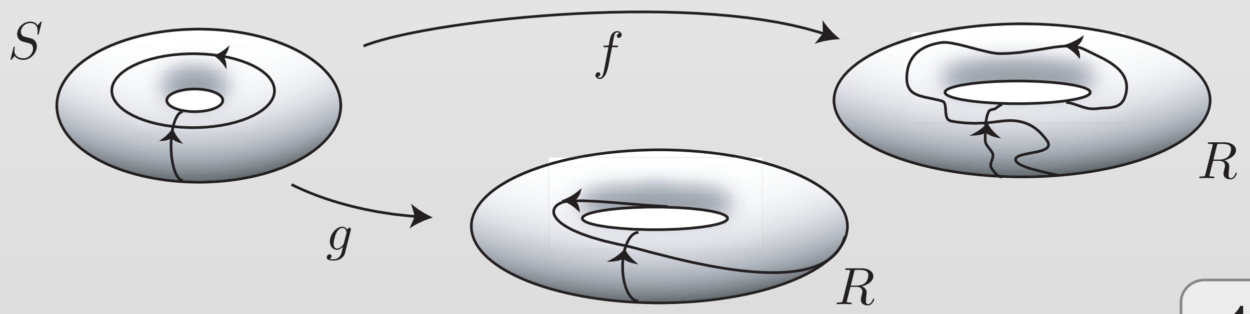
$(R_1, f_1) \underset{T}{\sim} (R_2, f_2)$　「タイヒミュラー同値」

$:\Longleftrightarrow$ qc　$f_2 \circ f_1^{-1} : R_1 \to R_2$ とホモトピックな

等角同相写像　$h : R_1 \to R_2$　が存在.

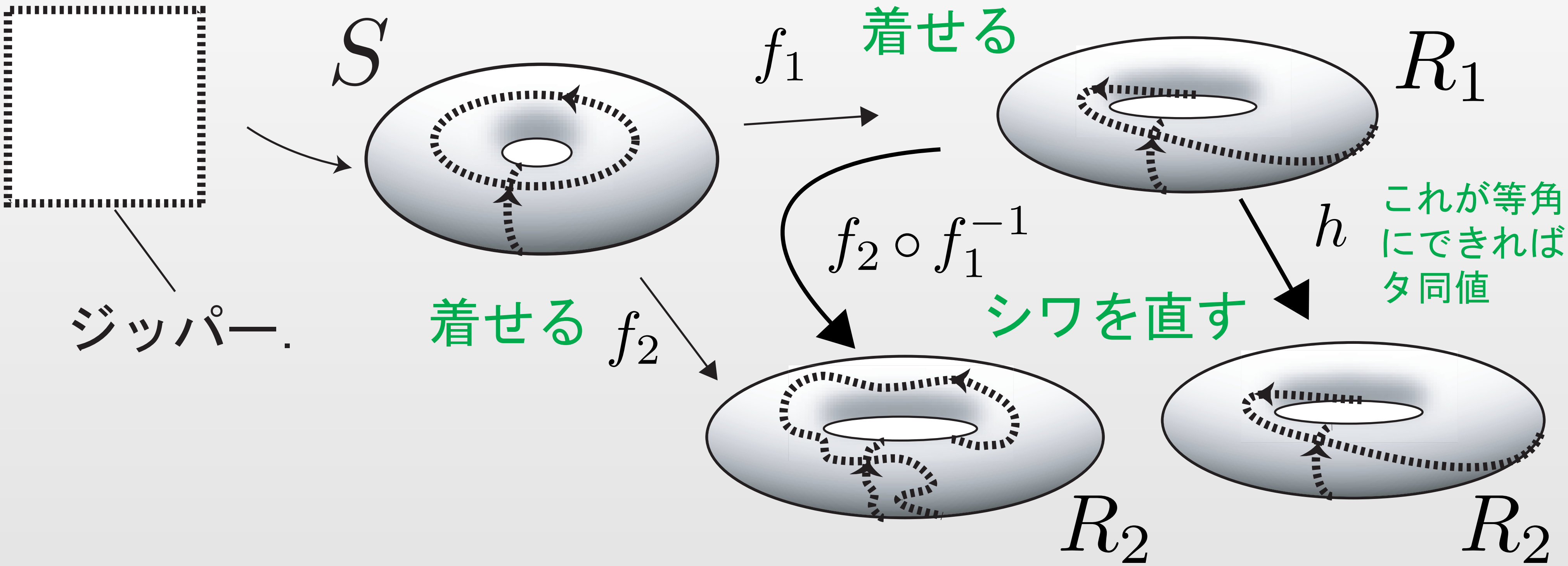
S のタイヒミュラー空間　$T(S) := \mathrm{Def}(S)/\underset{T}{\sim}$

◆ ホモトピー
＝写像の連続変形
＝シワやヨレを直す



「マーキング」の意味

◆ S はストレッチ素材の服を着ている.



◆ $$(R\,,f\,)\in \mathrm{Def}(\,S\,)$$

第２座標：マーキング＝服の着せ方面

第１座標：リーマン面

モジュライとの関係 1

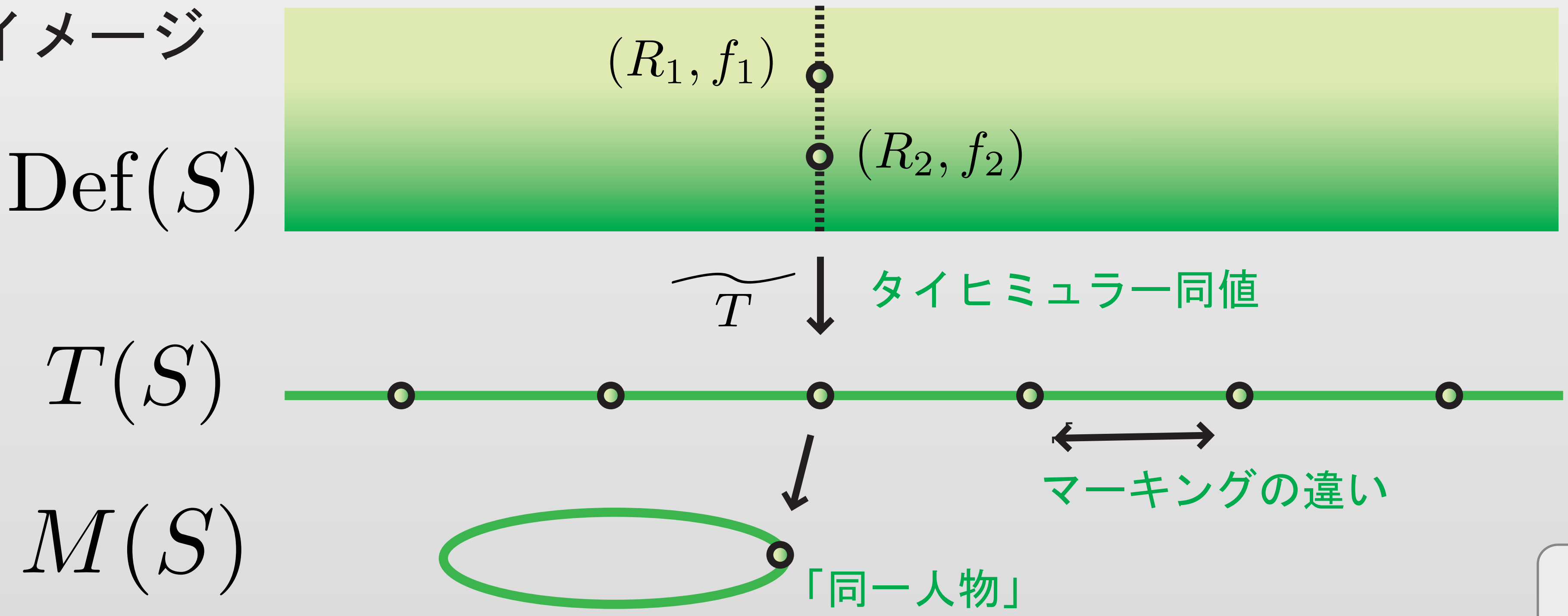
◇ $(R_1, f_1) \underset{T}{\sim} (R_2, f_2)$　「タイヒミュラー同値」

$:\Longleftrightarrow$ qc　$f_2 \circ f_1^{-1} : R_1 \to R_2$ とホモトピックな

等角同相写像　$h : R_1 \to R_2$　が存在.

$\Longrightarrow$　$R_1 \simeq R_2$　等角同値（同一人物，モ空間では同じ点）

◇ イメージ

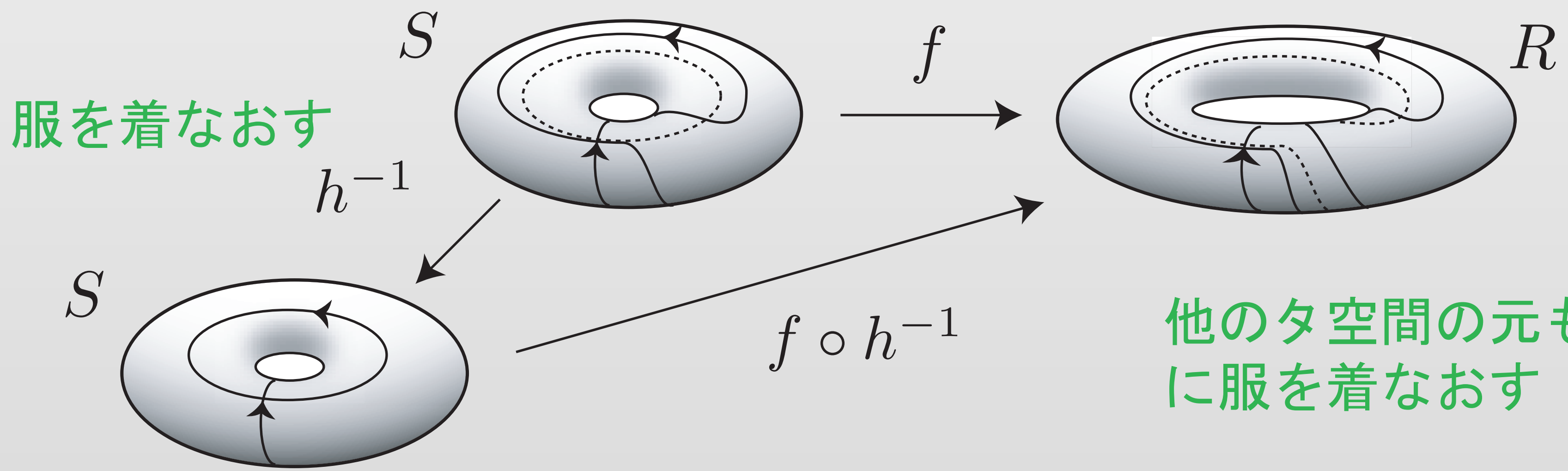


モジュライとの関係２

◆ モジュラー群（写像類群）

- $\mathrm{Mod}(S) := \{h : S \to S\ :\ qc\}/\sim$
- ただし　$h_1 \sim h_2$ は写像のホモトピー
- $[h] \in \mathrm{Mod}(S)$ はタ空間 $T(S)$ に次のように作用する.

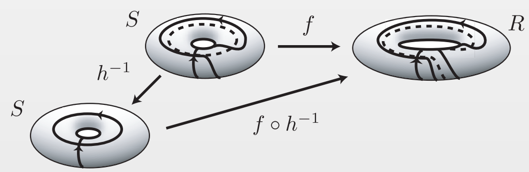
$$[R, f] \in T(S) \implies [h] \cdot [R, f] := [R, f \circ h^{-1}]$$



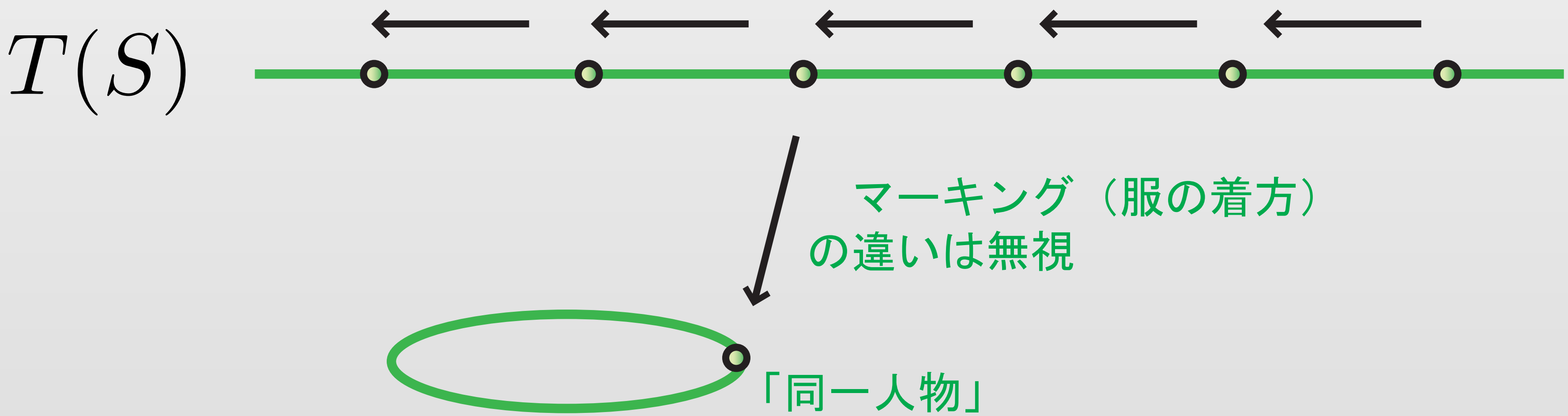
モジュライとの関係２

◆ 定理

モ空間 $M(S)$ は商空間 $T(S)/\mathrm{Mod}(S)$ と同一視できる.



$\mathrm{Mod}(S)$ マーキングを一斉に取り替え



$$M(S) \simeq T(S)/\mathrm{Mod}(S)$$

タ空間の複素構造

◆ 定理

- タ空間 $T(S)$ は完備距離空間（タイヒミュラー距離）.
- タ空間 $T(S)$ は $\mathbb{C}^{3g-3}$ の単連結部分領域とみなせる.
- モジュラー群の元の作用は複素解析的自己同型,
  かつ群全体の作用は真性不連続

$\Longrightarrow$ モジュライ空間 $M(S) \simeq T(S)/\mathrm{Mod}(S)$

には，タイヒミュラー空間に由来する複素構造が（特異点を除いて）はいる.

$\Longrightarrow$ リーマンのモジュライ問題の解決！
(Ahlfors / Bers)

リーマン面の情報を数値化

- まずはタ空間の元からパラメーター的なものを見つけたい.

- 一意化定理（モデル化定理）

任意のリーマン面 S は次の形のリーマン面に等角同値

$S \simeq \mathbb{X}/\Gamma$ ただし $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ *or* $\mathbb{D}$ *or* $\hat{\mathbb{C}}$ 複素1変数

同一人物 $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ 「離散部分群」

- $$PSL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \;:\; \begin{array}{c} a, b, c, d \in \mathbb{C}, \\ ad - bc \neq 0 \end{array} \right\}$$ 複素3変数

- 任意のリーマン面は複素パラメーターで表現できる！

- 種数 g の閉曲面 $\Longrightarrow$ 3g-3 個の複素パラメーターが必要（リーマンの時代から古典的に知られている.）

タ空間への複素構造の入れ方

- タ空間の元 $[R, f] \in T(S)$ にたいし，写像 $f : S \to R$ は群の変形（変化）$\Gamma \longrightarrow \Gamma_f < PSL(2, \mathbb{C})$ を定める．

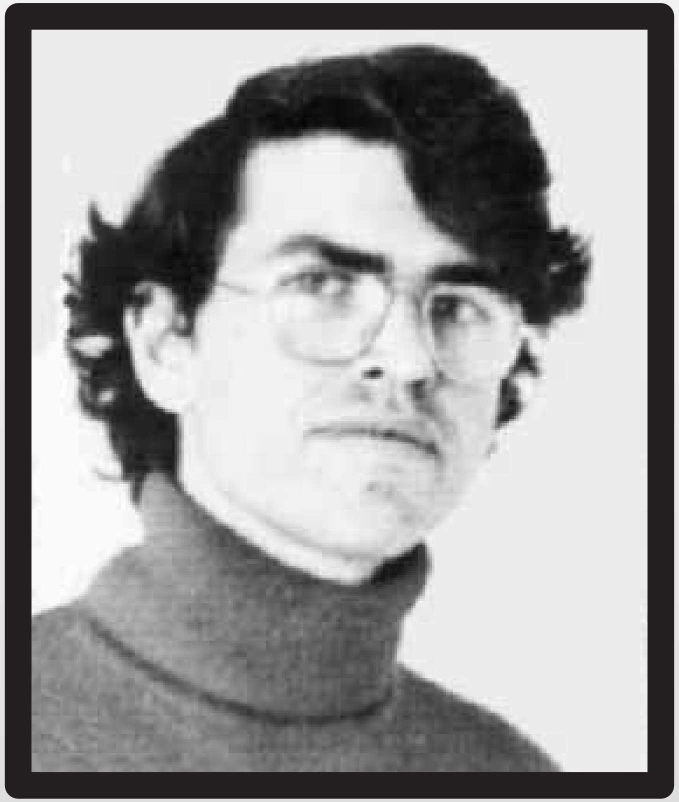
- その変形度合いは $[R, f]$ の代表元に依存しない S 上の「正則2次微分」q_f で表現できる．

- 種数 g のコンパクトリーマン面 S 上の正則2次微分の全体 $Q(S)$ は $\mathbb{C}^{3g-3}$ と同型なベクトル空間．（リーマン·ロッホ）

- タ空間の元 $[R, f]$ からこの正則2次微分 q_f への対応は，タ空間 $T(S)$ から $Q(S) \simeq \mathbb{C}^{3g-3}$ の有界領域への「埋め込み」になっている．（ベアス埋め込み）

追悼

William Paul Thurston
(October 30, 1946 - August 21, 2012)



ご清聴ありがとうございました.