Zalcmanの補題と複素力学系

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
川平 友規

日本数学会2013年度年会・函数論分科会
2013年3月22日

Zalcman ＝ ザル〇マン

- ザルクマン？ ザルツマン？

Zalcman ＝ ザル○マン

- ザルクマン？ ザルツマン？

Zalcman ＝ ザル〇マン

- ザルクマン？ ザルツマン？
- 『ギョエテとは

Zalcman ＝ ザル○マン

- ザルクマン？ ザルツマン？
- 『ギョエテとは
  俺のことかと

Zalcman ＝ ザル○マン

- ザルクマン？ ザルツマン？
- 『ギョエテとは
俺のことかと
ゲーテ云ひ』

Zalcman ＝ ザル〇マン

- ザルクマン？ ザルツマン？
- 『ギョエテとは
  俺のことかと
  ゲーテ云ひ』

言語学者・矢崎源九郎『日本の外来語』（1964年、岩波書店）より

— 表記の上ではゴエテ、ギューテ、ギェーテ、ギューテ、ギョート、ギョーツ、ゲーテ、ギュエテ、ゲォエテ、ゴアタ、グウィーテ、ゲヱテー、ゲーテー、ゲェテー、ギョウテ、ギヨーテ、ギョーテ、ギョーテー、ギヨテー、ゴエテ、ギョテ、ギヨヲテ、ギヨオテ、ゲョーテ、ゲヨーテ、ゴエテー、ゲエテ、ギヨエテ、ゲイテ、ギョエテ、と、じつに二十九通りの書き方があるという。「ギョーテとは俺のことかとゲーテ言い」という、斎藤緑雨の川柳すらも生まれているほどである。（170ページ）

講演のあらまし

ダイナミカル

パラメトリック

講演のあらまし

ダ イナミカル

Julia集合
(力学系のカオス部分)

関数族 $\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n\geq 0}$
が非・正規な部分

パ ラメトリック

講演のあらまし

ダイナミカル

Julia集合
（力学系のカオス部分）

関数族 $\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n\geq 0}$ が非・正規な部分

パラメトリック

Mandelbrot集合
（力学系族の分岐部分）

関数族 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0}$ が非・正規な部分

講演のあらまし

ダイナミカル

Julia集合
(力学系のカオス部分)

関数族 $\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n\geq 0}$
が非・正規な部分

パラメトリック

Mandelbrot集合
(力学系族の分岐部分)

関数族 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0}$
が非・正規な部分

Zalcman の補題

有理形関数族の非・正規性の特徴づける
複素平面上の有理形関生成

講演のあらまし

ダイナミカル

Julia集合
（力学系のカオス部分）
関数族 $\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n\geq 0}$
が非・正規な部分

パラメトリック

Mandelbrot集合
（力学系族の分岐部分）
関数族 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0}$
が非・正規な部分

Zalcman の補題

有理形関数族の非・正規性の特徴づける
複素平面上の有理形関生成

Zalcman 関数

パラ Zalcman 関数

講演のあらまし

ダ イナミカル

Julia集合
（力学系のカオス部分）
関数族 $\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n\geq 0}$
が非・正規な部分

パ ラメトリック

Mandelbrot集合
（力学系族の分岐部分）
関数族 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0}$
が非・正規な部分

Zalcman の補題

有理形関数族の非・正規性の特徴づける
複素平面上の有理形関生成

Zalcman 関数

パラ Zalcman 関数

Julia集合とMandelbrot集合の類似性

Zalcman の補題

◆ $D \subset \mathbb{C}$: 領域, $\mathcal{F}$: D 上で定義された有理形関数族

$f : D \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の形

Zalcman の補題

◆ $D \subset \mathbb{C}$：領域，$\mathcal{F}$：D 上で定義された有理形関数族

$f : D \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の形

◆ Zalcmanの補題（'75）

$\mathcal{F}$ が $z_0 \in D$（の任意の近傍）において正規族でない

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, F_k \in \mathcal{F}$ $\exists\, \rho_k \in \mathbb{C}^*$ s.t. $\rho_k \to 0$

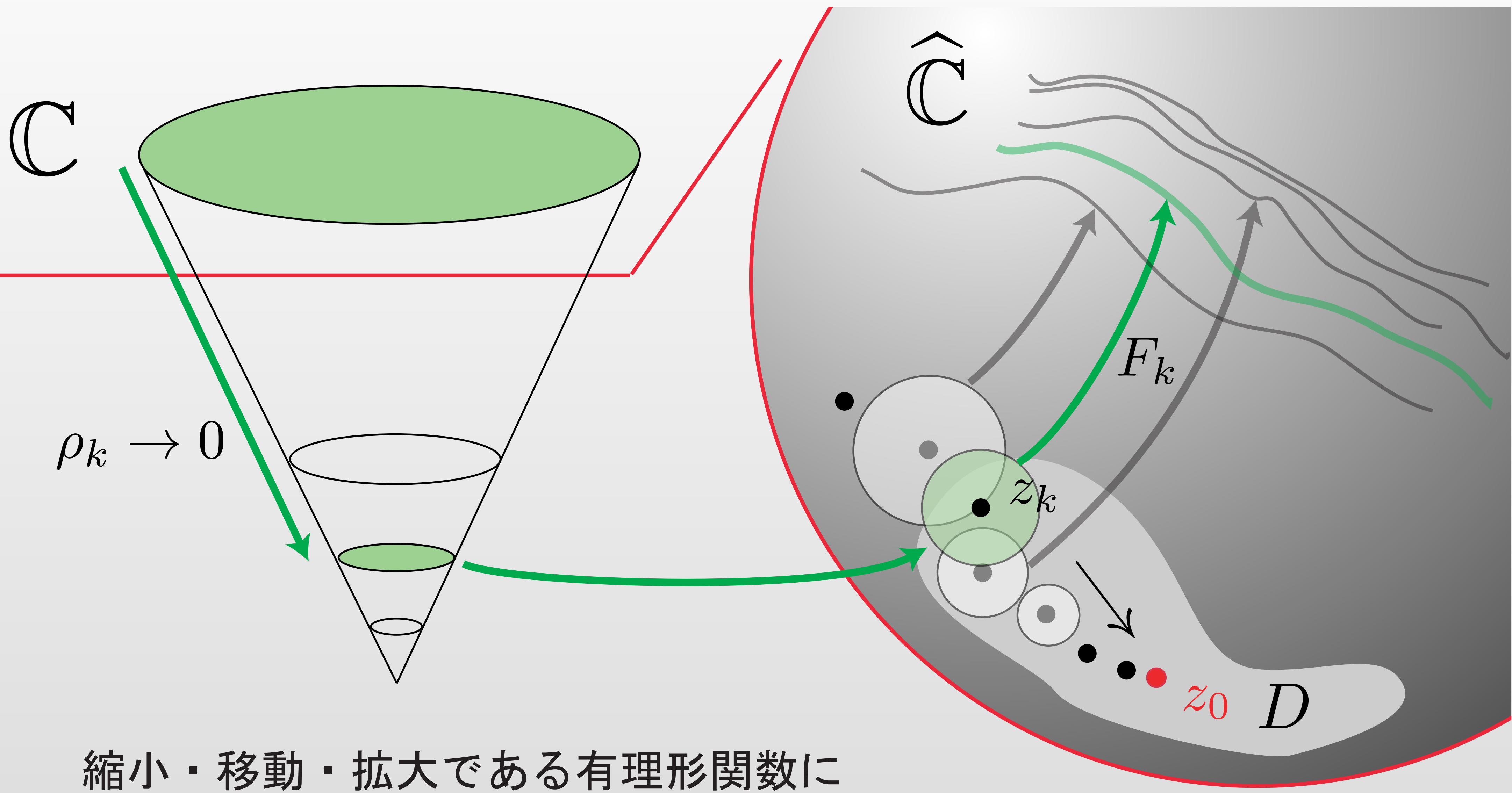
$\exists\, z_k \in D$ s.t. $z_k \to z_0$

s.t. $\psi_k(w) = F_k\ (z_k + \rho_k w)$

$\overrightarrow{\longrightarrow}$ $\psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$：定数でない有理形関数

$\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束

Zの補題イメージ



縮小・移動・拡大である有理形関数に
収束させることができる

複素力学系

ダ

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数
-
-

複素力学系

ダ

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数

$$\widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \cdots$$

『複素力学系』

複素力学系

ダ

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数

$$\widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \cdots$$ 『複素力学系』

$$z_0 \overset{f}{\longmapsto} z_1 \overset{f}{\longmapsto} z_2 \overset{f}{\longmapsto} z_3 \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$ 軌道

複素力学系

ダ

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数

$$\widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \cdots$$ 『複素力学系』

$$z_0 \xmapsto{f} z_1 \xmapsto{f} z_2 \xmapsto{f} z_3 \xmapsto{f} \cdots$$ 軌道

- Fatou集合：誤差に関して軌道が安定な初期値

$$F(f) := \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : {}^{\exists}U \text{ 近傍 s.t. } \{ f^n|_U \}_{n \geq 0} \text{ は同程度連続} \right\}$$

$\Longleftrightarrow$ 正規族

-

複素力学系

ダ

◆ $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数

$$\widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \cdots$$ 『複素力学系』

$$z_0 \overset{f}{\longmapsto} z_1 \overset{f}{\longmapsto} z_2 \overset{f}{\longmapsto} z_3 \overset{f}{\longmapsto} \cdots$$ 軌道

◆ Fatou集合：誤差に関して軌道が安定な初期値

$$F(f) := \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : {}^{\exists}U \text{ 近傍 s.t. } \{f^n|_U\}_{n\geq 0} \text{ は同程度連続} \right\}$$

$\Longleftrightarrow$ 正規族

◆ Julia集合：力学系のカオス部分

$$J(f) := \left\{ z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : {}^{\forall}U \text{ 近傍で } \{f^n|_U\}_{n\geq 0} \text{ は非正規族} \right\}$$

<→ Juliaの絵>

力学系族のパラメーター空間

パ

- $\tilde{f} : X \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ：正則，ただし X ：複素多様体

  $\tilde{f} : (c, z) \mapsto f_c(z)$ z について次数一定2以上の有理関数

力学系族のパラメーター空間

パ

- $\tilde{f} : X \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ：正則，ただし X ：複素多様体

  $\tilde{f} : (c, z) \mapsto f_c(z)$　z について次数一定2以上の有理関数

- 例（2次多項式族）：　$\tilde{f} : \mathbb{C} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$

  $$(c, z) \mapsto f_c(z) = z^2 + c$$

- $z = 0$ は $\mathbb{C}$ 上唯一の分岐点： $f_c'(0) = 0$

力学系族のパラメーター空間

パ

- $\tilde{f} : X \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ：正則，ただし X ：複素多様体
  $\tilde{f} : (c, z) \mapsto f_c(z)$ z について次数一定2以上の有理関数
- 例（2次多項式族）： $\tilde{f} : \mathbb{C} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$
  $(c, z) \mapsto f_c(z) = z^2 + c$
- $z = 0$ は $\mathbb{C}$ 上唯一の分岐点： $f_c'(0) = 0$
- 定理（Fatou，Julia）

各パラメーター $c \in \mathbb{C}$ について，いずれか一方がなりたつ：

(a) $\forall n \geq 0$， $|f_c^n(0)| \leq 2$

(b) $n \to \infty$ のとき $|f_c^n(0)| \to \infty$

力学系族のパラメーター空間

パ

- $\tilde{f} : X \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ：正則，ただし X ：複素多様体
  $\tilde{f} : (c, z) \mapsto f_c(z)$ 　z について次数一定2以上の有理関数
- 例（2次多項式族）：
  $$\tilde{f} : \mathbb{C} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$
  $$(c, z) \mapsto f_c(z) = z^2 + c$$
- $z = 0$ は $\mathbb{C}$ 上唯一の分岐点：$f_c'(0) = 0$
- 定理（Fatou，Julia）
  各パラメーター $c \in \mathbb{C}$ について，いずれか一方がなりたつ：
  (a) $\forall n \geq 0$，　$|f_c^n(0)| \leq 2$
  (b) $n \to \infty$ のとき $|f_c^n(0)| \to \infty$
- Mandelbrot集合：$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C}$ ：(a)がなりたつ$\}$

分岐部分

パ

- 例（2次多項式族）：$f_c(z) = z^2 + c \ (c \in \mathbb{C})$
- Mandelbrot集合：$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \quad (\forall n \geq 0)\}$

- 事実（Mane-Sad-Sullivan）

分岐部分

パ

- 例（2次多項式族）：$f_c(z) = z^2 + c \ (c \in \mathbb{C})$
- Mandelbrot集合：$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \quad (\forall n \geq 0)\}$

- 事実（Mane-Sad-Sullivan）
- $\partial \mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : {}^{\forall}U \text{ 近傍上 } \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0} \text{ が非正規族} \right\}$

分岐部分

パ

- 例（2次多項式族）：$f_c(z) = z^2 + c \ (c \in \mathbb{C})$
- Mandelbrot集合：$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \ (\forall n \geq 0)\}$

事実（Mane–Sad–Sullivan）

- $\partial\mathbb{M} = \left\{c_0 \in \mathbb{C} : {}^{\forall}U\right.$ 近傍上 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0}$ が非正規族$\left.\right\}$
- $\mathbb{C} - \partial\mathbb{M}$ は力学系が構造安定なパラメーター全体

$\Longleftrightarrow$ $\partial\mathbb{M}$ では力学系が分岐する（分岐部分）

分岐部分

パ

◆ 例（2次多項式族）：$f_c(z) = z^2 + c \ \ (c \in \mathbb{C}\ )$

◆ Mandelbrot集合：$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \quad (\forall n \geq 0)\}$

◆ 事実（Mane-Sad-Sullivan）

- $\partial\mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : {}^\forall U$ 近傍上 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ が非正規族$\right\}$
- $\mathbb{C} - \partial\mathbb{M}$ は力学系が構造安定なパラメーター全体

$\Longleftrightarrow$ $\partial\mathbb{M}$ では力学系が分岐する（分岐部分）

ダ イナミカル

$\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n \geq 0}$ が非正規

$J_c = J(f_c)$ Julia集合

パ ラメトリック

$\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ が非正規

$\partial\mathbb{M}$ Mandelbrot集合

アナロジーの応用

ダイナミカル

パラメトリック

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \\ |(f^p)'(z)| > 1$$

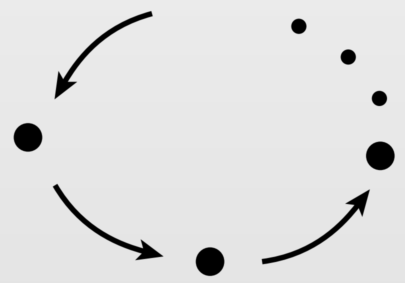
パラメトリック

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$



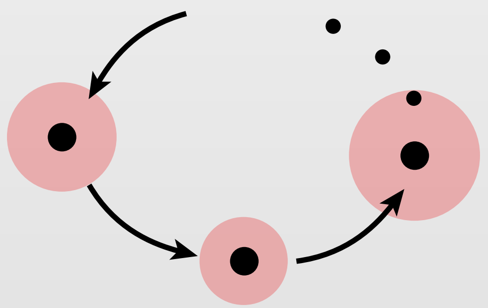
パラメトリック

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$



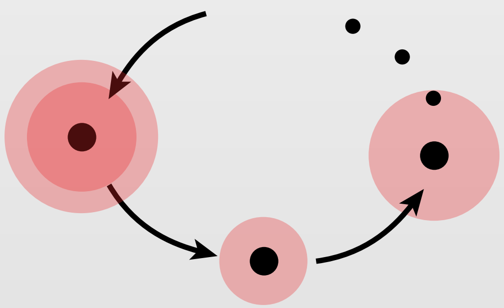
パラメトリック

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$



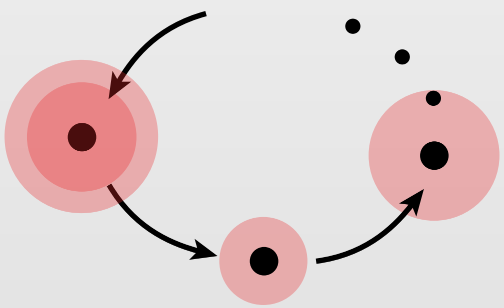
パラメトリック

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$



パラメトリック

◆ $c \in \mathbb{C}$ が Misiurewicz点

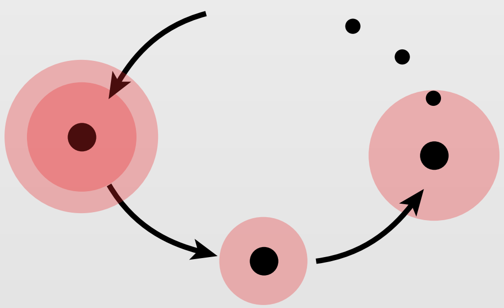
$:\Longleftrightarrow$ $\exists l \geq 1$, $a = f_c^l(0)$ は反発的周期点

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$

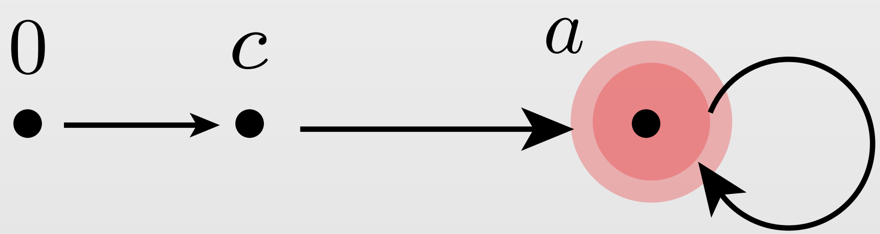


パラメトリック

◆ $c \in \mathbb{C}$ が Misiurewicz点

$$:\Longleftrightarrow \exists l \geq 1,$$

$a = f_c^l(0)$ は反発的周期点



アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$

◆ 定理 (Fatou, Julia)

$J_c = J(f_c)$ の中に反発的周期点は稠密に存在.

パラメトリック

◆ $c \in \mathbb{C}$ が Misiurewicz点

$$:\Longleftrightarrow \exists l \geq 1,$$

$a = f_c^l(0)$ は反発的周期点

アナロジーの応用

ダ イナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$

◆ 定理(Fatou, Julia)

$J_c = J(f_c)$ の中に

反発的周期点は稠密に存在.

パ ラメトリック

◆ $c \in \mathbb{C}$ が Misiurewicz点

$$:\Longleftrightarrow \exists l \geq 1, \quad a = f_c^l(0) \text{ は反発的周期点}$$

◆ 定理(MSS? DH?)

$\partial\mathbb{M}$ の中に

Misiurewicz点は稠密に存在.

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p, \quad f^p(z) = z, \quad |(f^p)'(z)| > 1$$

◆ 定理 (Fatou, Julia)

$J_c = J(f_c)$ の中に

反発的周期点は稠密に存在.

☺ Montelの定理＋α

パラメトリック

◆ $c \in \mathbb{C}$ が Misiurewicz点

$$:\Longleftrightarrow \exists l \geq 1, \quad a = f_c^l(0) \text{ は反発的周期点}$$

◆ 定理 (MSS? DH?)

$\partial\mathbb{M}$ の中に

Misiurewicz点は稠密に存在.

☺ Montelの定理＋α

アナロジーの応用

ダイナミカル

◆ $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists p,\quad f^p(z) = z,\quad |(f^p)'(z)| > 1$$

◆ 定理(Fatou, Julia)

$J_c = J(f_c)$ の中に

反発的周期点は稠密に存在.

- Montelの定理＋α
- Zalcmanの補題(Schwick) $\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n\geq 0}$

パラメトリック

◆ $c \in \mathbb{C}$ が Misiurewicz点

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists l \geq 1,$$

$a = f_c^l(0)$ は反発的周期点

◆ 定理(MSS? DH?)

$\partial\mathbb{M}$ の中に

Misiurewicz点は稠密に存在.

- Montelの定理＋α
- Zalcmanの補題 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0}$

Zalcman 関数

ダ

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数
- $\{f^n\}_{n\geq 0}$ にZalcmanの補題を適用する

Zalcman 関数

ダ

◆ $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数

◆ $\{f^n\}_{n \geq 0}$ にZalcmanの補題を適用する

◆ $z_0 \in J(f) - \{\infty\}$

$$\iff \begin{cases} {}^{\exists}\phi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}, \quad {}^{\exists} n_k \to \infty, \ {}^{\exists}\rho_k \to 0, \ {}^{\exists} z_k \to z_0 \\ \phi(w) = \lim_{k \to \infty} f^{n_k}(z_k + \rho_k w) \quad \mathbb{C}\text{上の有理形関数} \end{cases}$$

Zalcman 関数

ダ

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数
- $\{f^n\}_{n\geq 0}$ にZalcmanの補題を適用する

- $z_0 \in J(f) - \{\infty\}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} {}^\exists \phi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}, \quad {}^\exists n_k \to \infty, \ {}^\exists \rho_k \to 0, \ {}^\exists z_k \to z_0 \\ \phi(w) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(z_k + \rho_k w) \quad \mathbb{C}\text{上の有理形関数} \end{cases}$$

- $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}_f(z_0) := \{\psi$: 上の形の有理形関数$\}$

Zalcman 関数

ダ

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数
- $\{f^n\}_{n\geq 0}$ にZalcmanの補題を適用する

- $z_0 \in J(f) - \{\infty\}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} {}^{\exists}\phi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}, \quad {}^{\exists}n_k \to \infty, \ {}^{\exists}\rho_k \to 0, \ {}^{\exists}z_k \to z_0 \\ \phi(w) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(z_k + \rho_k w) \quad \mathbb{C}\text{上の有理形関数} \end{cases}$$

- $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}_f(z_0) := \{\psi$ ： 上の形の有理形関数$\}$

- $\infty \in J(f)$ のとき $\mathcal{Z}_f(\infty) := \{1/\phi(w) \ : \ \phi \in \mathcal{Z}_F(0)\}$

$F(\zeta) := 1/f(1/\zeta)$

Zalcman 関数

ダ

- $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$　次数2以上の有理関数
- $\{f^n\}_{n\geq 0}$ にZalcmanの補題を適用する

- $z_0 \in J(f)-\{\infty\}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} {}^{\exists}\phi:\mathbb{C}\to\widehat{\mathbb{C}}, \quad {}^{\exists}n_k\to\infty,\ {}^{\exists}\rho_k\to 0,\ {}^{\exists}z_k\to z_0 \\ \phi(w)=\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(z_k+\rho_k w) \quad \mathbb{C}\text{上の有理形関数} \end{cases}$$

- $\mathcal{Z}(z_0)=\mathcal{Z}_f(z_0):=\{\psi$ ：上の形の有理形関数$\}$
- $\infty\in J(f)$ のとき $\mathcal{Z}_f(\infty):=\{1/\phi(w)\ :\ \phi\in\mathcal{Z}_F(0)\}$

$F(\zeta):=1/f(1/\zeta)$

- $\mathcal{Z}:=\bigcup_{z_0\in J(f)}\mathcal{Z}(z_0)$　：　f の Zalcman関数

Zalcman 関数の「不変性」

ダ

◆ $\mathcal{Z} := \bigcup_{z_0 \in J(f)} \mathcal{Z}(z_0)$ ： f の力学系が生成する Zalcman関数（有理形関数）

Zalcman 関数の「不変性」

ダ

- $\mathcal{Z} := \bigcup_{z_0 \in J(f)} \mathcal{Z}(z_0)$ ： f の力学系が生成する Zalcman関数（有理形関数）
- $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U} := \left\{ \psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \ :\ \text{非定数有理形関数} \right\}$
- $\mathrm{Aff} := \{ \delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ :\ \delta(w) = aw + b\ \ \text{複素アファイン} \}$

Zalcman 関数の「不変性」

ダ

- $\mathcal{Z} := \bigcup_{z_0 \in J(f)} \mathcal{Z}(z_0)$ ： f の力学系が生成する Zalcman関数（有理形関数）
- $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U} := \left\{ \psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \; : \; \text{非定数有理形関数} \right\}$
- $\mathrm{Aff} := \{ \delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \; : \; \delta(w) = aw + b \;\; \text{複素アファイン} \}$
- $\mathcal{U}$ の「不変性」 ： $f \circ \mathcal{U} \subset \mathcal{U} \qquad \mathcal{U} \circ \mathrm{Aff} = \mathcal{U}$

Zalcman 関数の「不変性」

ダ

- $\mathcal{Z} := \bigcup_{z_0 \in J(f)} \mathcal{Z}(z_0)$ ： f の力学系が生成する Zalcman関数（有理形関数）
- $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U} := \left\{ \psi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \ : \ \text{非定数有理形関数} \right\}$
- $\mathrm{Aff} := \{ \delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ : \ \delta(w) = aw + b$ 複素アファイン $\}$
- $\mathcal{U}$ の「不変性」： $f \circ \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ 　 $\mathcal{U} \circ \mathrm{Aff} = \mathcal{U}$

- 命題(Steinmetz, Z関数の「不変性」)

すべての $z_0 \in J(f)$ について $\mathcal{Z}(z_0)$ は次の「不変性」をもつ：

$$f \circ \mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(z_0) \circ \mathrm{Aff}$$

$$f \circ \mathcal{Z} = \mathcal{Z} = \mathcal{Z} \circ \mathrm{Aff}$$

パラメトリックZalcman 関数

パ

- 2次多項式族： $f_c(z) = z^2 + c \ \ (c \in \mathbb{C})$
- $\partial\mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0} \text{ が非正規族} \right\}$

パラメトリックZalcman 関数

パ

- 2次多項式族： $f_c(z) = z^2 + c \ (c \in \mathbb{C})$
- $\partial \mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0}\ \text{が非正規族} \right\}$
- $F_n(c) := f_c^n(0)\ (n \geq 0)$ とおく．

$$F_1(c) = c\,,\ F_2(c) = c^2 + c\,,\ F_3(c) = (c^2+c)^2 + c, \ldots$$

- $\{c \mapsto F_n(c)\}_{n \geq 0}$ にZalcmanの補題を適用：

パラメトリックZalcman 関数

パ

- 2次多項式族： $f_c(z) = z^2 + c \ (c \in \mathbb{C}\ )$
- $\partial\mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0} \text{ が非正規族} \right\}$
- $F_n(c) := f_c^n(0)\ (n \geq 0)$ とおく.

$$F_1(c) = c\,,\ F_2(c) = c^2 + c\,,\ F_3(c) = (c^2+c)^2 + c, \ldots$$

- $\{c \mapsto F_n(c)\}_{n\geq 0}$ にZalcmanの補題を適用：

$$c_0 \in \partial\mathbb{M} \iff \begin{cases} {}^\exists n_k \to \infty,\ {}^\exists \rho_k \to 0,\ {}^\exists c_k \to c_0 \\ F_{n_k}(c_k + \rho_k w) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} {}^\exists \Phi(w) \in \mathcal{U} \end{cases}$$

$\mathbb{C}$ 上の有理形関数

パラメトリックZalcman 関数

パ

◆ 2次多項式族： $f_c(z) = z^2 + c \ (c \in \mathbb{C})$

◆ $\partial\mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0} \text{ が非正規族} \right\}$

◆ $F_n(c) := f_c^n(0) \ (n \geq 0)$ とおく.

$$F_1(c) = c, \ F_2(c) = c^2 + c, \ F_3(c) = (c^2+c)^2 + c, \dots$$

◆ $\{c \mapsto F_n(c)\}_{n\geq 0}$ にZalcmanの補題を適用：

$$c_0 \in \partial\mathbb{M} \iff \begin{cases} {}^\exists n_k \to \infty, \ {}^\exists \rho_k \to 0, \ {}^\exists c_k \to c_0 \\ F_{n_k}(c_k + \rho_k w) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} {}^\exists \Phi(w) \in \mathcal{U} \end{cases}$$

$\mathbb{C}$上の有理形関数

◆ $\mathcal{C}(c_0) := \{\Phi \in \mathcal{U} : \text{上の形}\}$

パラメトリックZalcman 関数

パ

◆ 2次多項式族： $f_c(z) = z^2 + c \ (c \in \mathbb{C})$

◆ $\partial\mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n\geq 0} \text{ が非正規族} \right\}$

◆ $F_n(c) := f_c^n(0) \ (n \geq 0)$ とおく． ▪

$$F_1(c) = c\,,\ F_2(c) = c^2 + c\,,\ F_3(c) = (c^2+c)^2 + c, \ldots$$

◆ $\{c \mapsto F_n(c)\}_{n\geq 0}$ にZalcmanの補題を適用：

$$c_0 \in \partial\mathbb{M} \iff \begin{cases} {}^{\exists} n_k \to \infty,\ {}^{\exists}\rho_k \to 0,\ {}^{\exists} c_k \to c_0 \\ F_{n_k}(c_k + \rho_k w) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} {}^{\exists}\Phi(w) \in \mathcal{U} \end{cases}$$

$\mathbb{C}$上の有理形関数

◆ $\mathcal{C}(c_0) := \{\Phi \in \mathcal{U} : \text{上の形}\}$

◆ $\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$ ：パラメトリックZalcman関数族

パラZalcman関数の「不変性」

パ ◆ $\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial \mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$ ：パラメトリックZalcman関数族

パラZalcman関数の「不変性」

パ ◆ $\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$ ：パラメトリックZalcman関数族

◆ 命題（パラZ関数の「不変性」）：

すべての $c \in \partial\mathbb{M}$ について $\mathcal{C}(c)$ は次の「不変性」をもつ：

$$f_c \circ \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) \circ \mathrm{Aff}$$

パラZalcman関数の「不変性」

パ ◆ $\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$ ：パラメトリックZalcman関数族

◆ 命題（パラZ関数の「不変性」）：

すべての $c \in \partial\mathbb{M}$ について $\mathcal{C}(c)$ は次の「不変性」をもつ：

$$f_c \circ \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) \circ \mathrm{Aff}$$

◆ $c \in \mathbb{C}$, $z \in J(f_c)$ に対し $\mathcal{Z}_c(z) := \mathcal{Z}_{f_c}(z)$ とおく.

このとき $f_c \circ \mathcal{Z}_c(z) = \mathcal{Z}_c(z) = \mathcal{Z}_c(z) \circ \mathrm{Aff}$

パラZalcman関数の「不変性」

パ ◆ $\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial\mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$ ：パラメトリックZalcman関数族

◆ **命題（パラZ関数の「不変性」）：**

すべての $c \in \partial\mathbb{M}$ について $\mathcal{C}(c)$ は次の「不変性」をもつ：

$$f_c \circ \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) \circ \mathrm{Aff}$$

◆ $c \in \mathbb{C}$, $z \in J(f_c)$ に対し $\mathcal{Z}_c(z) := \mathcal{Z}_{f_c}(z)$ とおく．

このとき $f_c \circ \mathcal{Z}_c(z) = \mathcal{Z}_c(z) = \mathcal{Z}_c(z) \circ \mathrm{Aff}$

◆ **定理（Z関数族とパラZ関数族の交差）：**

ダ パ

$\partial\mathbb{M}$ の稠密部分集合 SH が存在して，

$$c \in SH \implies c \in J(f_c) \text{ かつ } \mathcal{Z}_c(c) \cap \mathcal{C}(c) \neq \emptyset.$$

Zalcman関数とパラZalcman関数の交差

ダ パ

◆ $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が半双曲的(semi-hyperbolic)

Zalcman関数とパラZalcman関数の交差

ダ パ

◆ $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が半双曲的(semi-hyperbolic)

$:\Longleftrightarrow$ 分岐点 $z=0$ の f_{c_0} による軌道が $z=0$ 自身に集積しない.

Zalcman関数とパラZalcman関数の交差

ダ パ

- $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が半双曲的(semi-hyperbolic)
  $:\Longleftrightarrow$ 分岐点 $z=0$ の f_{c_0} による軌道が
  $z=0$ 自身に集積しない.
- 半双曲的パラメーター全体を SH で表す.

Zalcman関数とパラZalcman関数の交差

ダ パ

- $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が半双曲的(semi-hyperbolic)
  $:\Longleftrightarrow$ 分岐点 $z=0$ の f_{c_0} による軌道が
  $z=0$ 自身に集積しない.

- 半双曲的パラメーター全体を SH で表す.

- 例：c_0 がMisiurewicz $\Longrightarrow$ c_0 は半双曲的

  $\partial\mathbb{M}$ 内で稠密　　SH も稠密. じつは H.dim = 2(宍倉)

Zalcman関数とパラZalcman関数の交差

ダ パ ◆ $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が半双曲的(semi-hyperbolic)
$:\Longleftrightarrow$ 分岐点 $z=0$ の f_{c_0} による軌道が
$z=0$ 自身に集積しない.

◆ 半双曲的パラメーター全体を SH で表す.

◆ 例：c_0 がMisiurewicz $\Longrightarrow$ c_0 は半双曲的

$\partial\mathbb{M}$ 内で稠密　　SH も稠密. じつは H.dim = 2(宍倉)

◆ 定理(Z関数族とパラZ関数族の交差：再)

$c_0 \in SH$ のとき, $Q \neq 0$, $n_k \to \infty$, $\rho_k \to 0$ が存在して

ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \to {}^{\exists}\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

Zalcman関数とパラZalcman関数の交差

ダ パ ◆ $c_0 \in \partial\mathbb{M}$ が半双曲的(semi-hyperbolic)

$:\Longleftrightarrow$ 分岐点 $z=0$ の f_{c_0} による軌道が $z=0$ 自身に集積しない.

◆ 半双曲的パラメーター全体を SH で表す.

◆ 例：c_0 がMisiurewicz $\Longrightarrow$ c_0 は半双曲的

$\partial\mathbb{M}$ 内で稠密　　SH も稠密. じつは H.dim = 2(宍倉)

◆ 定理(Z関数族とパラZ関数族の交差：再)

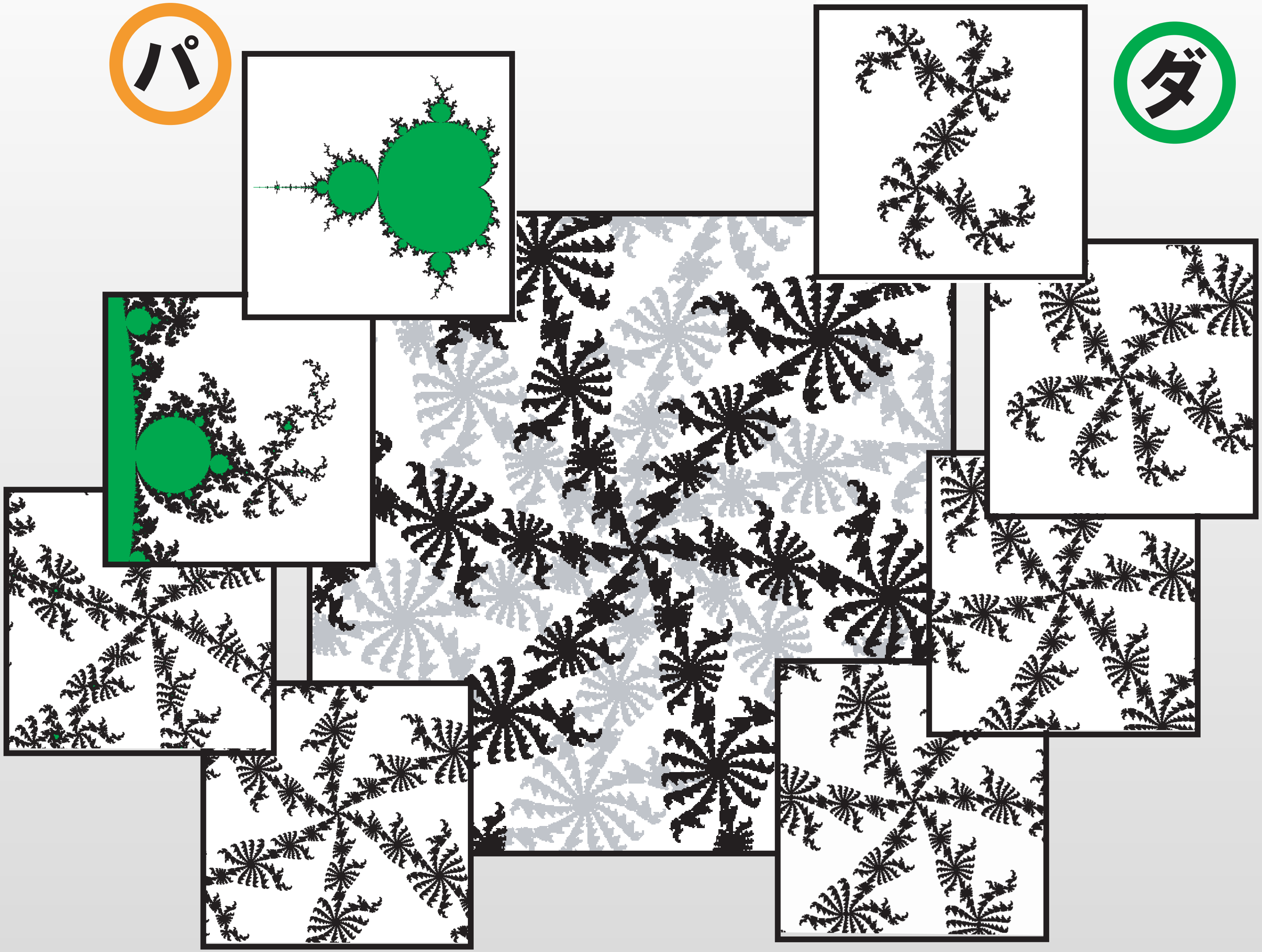
$c_0 \in SH$ のとき, $Q \neq 0$, $n_k \to \infty$, $\rho_k \to 0$ が存在して

ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0+\rho_k w) \to {}^{\exists}\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

パ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0+Q\rho_k w) = f_{c_0+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0+Q\rho_k w)$

$\to \phi$ 上と同じ. よって $\phi \in \mathcal{C}(c_0) \cap \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

「交差点」の応用：J と M の類似性



「交差点」の応用：J と M の類似性

ダ パ

◆ $\mathbb{D}_r = \{|z| < r\}$, $K \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

$$[K]_r := (K \cap \mathbb{D}_r) \cup \partial \mathbb{D}_r$$

$$a(K - b) := \{a(z - b) : z \in K\}$$

「交差点」の応用：J と M の類似性

ダ パ

◆ $\mathbb{D}_r = \{|z| < r\}$, $K \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

$$[K]_r := (K \cap \mathbb{D}_r) \cup \partial \mathbb{D}_r$$

$$a(K-b) := \{a(z-b) : z \in K\}$$

◆ 定理(J と M の類似性, Tan, Rivera-Letelier, K)：

$c_0 \in SH$ のとき，さきほどの $\phi \in \mathcal{C}(c_0) \cap \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$ を用いて $\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$ とおく．このとき任意の正数 r に対し

ダ $\left[\rho_k^{-1}(J - c_0)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r$

パ $\left[Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r$

$(k \to \infty)$

ただし収束はハウスドルフ位相の意味

Ｊ と Ｍ の類似性：証明のアイディア

◆ 材料：

ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \to {}^{\exists}\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

パ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0 + Q\rho_k w) = f_{c_0+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$

$\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$

J と M の類似性：証明のアイディア

- 材料： ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \to {}^{\exists}\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

  パ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0 + Q\rho_k w) = f_{c+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$

  $\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$

- ダ $\left[\rho_k^{-1}(J - c_0)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r$ のアイディア：

$f_{c_0}^{n}(J) = J$ より $[\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r = [\phi_k^{-1}(J)]_r \to [\phi^{-1}(J)]_r$

J と M の類似性：証明のアイディア

- 材料： ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \to {}^{\exists}\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

  パ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0 + Q\rho_k w) = f_{c+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$

  $\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$

- パ $\Big[\underbrace{Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)}_{= \mathcal{M}_k}\Big]_r \to [\mathcal{J}]_r$

$[\mathcal{M}_k]_r \subset N_\epsilon([\mathcal{J}]_r)$ かつ $N_\epsilon([\mathcal{J}]_r) \subset [\mathcal{M}_k]_r$ を示せばOK.

J と M の類似性：証明のアイディア

◆ 材料： ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \to {}^{\exists}\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

パ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0 + Q\rho_k w) = f_{c_0+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$

$\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$

◆ パ $\Big[\underbrace{Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)}_{= \mathcal{M}_k}\Big]_r \to [\mathcal{J}]_r$

$[\mathcal{M}_k]_r \subset N_\epsilon([\mathcal{J}]_r)$ 「Mの点はJの近くにある」

$$J_{c_0} = \{z \in \mathbb{C} : |f^n(z)| \leq 2 \ \ \forall n\}$$

$$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(c)| \leq 2 \ \ \forall n\}$$

$$|f^N \circ \phi(w)| > 2 \implies |f^N \circ \Phi_k(w)| > 2 \ (k \gg 0)$$

$$\iff |f^N \circ f_c^{n_k}(c)| > 2 \ (c = c_0 + Q\rho_k w)$$

Jの点でなければ近くに
Mの点もない！！

J と M の類似性：証明のアイディア

◆ 材料：

ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \to {}^{\exists}\phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

パ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0 + Q\rho_k w) = f_{c_0+Q\rho_k w}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$

$\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$

◆ パ $\big[\underbrace{Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)}_{=\mathcal{M}_k}\big]_r \to [\mathcal{J}]_r$

$N_\epsilon([\mathcal{J}]_r) \subset [\mathcal{M}_k]_r$ 「Jの点はMの近くにある」

「Jの点は反発的周期点で近似できる」

$\Longrightarrow {}^{\exists} w \in \mathcal{J}$ $\phi(w)$ は J の反発周期点 $f^m(\phi(w)) = w$

$\Longrightarrow$ $f^m(\phi(w)) = \phi(w)$ をみたす

$\Longrightarrow$ $k \gg 0$ ${}^{\exists}w' \in \mathcal{J}$ $c = c_0 + Q\rho_k w'$

$f^m(f_c^{N_k}(c)) = c$

Jの点の近くにMの点を発見できる！

「交差」と一般化ポアンカレ関数

- 定理で述べたZalcman関数とパラメトリックZalcman関数の「交差点」はポアンカレ関数を一般化したもの.

「交差」と一般化ポアンカレ関数

- 定理で述べたZalcman関数とパラメトリックZalcman関数の「交差点」はポアンカレ関数を一般化したもの.

ダ

- 定理（ケーニヒス，ポアンカレ関数の存在）

$f = f_c \ (c \in \mathbb{C})$ の反発周期点 a_0（周期 p）　$\lambda := (f^p)'(a_0)$

$$\Longrightarrow \text{関数列 } w \longmapsto f^{kp}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda^k}\right) \quad (k \in \mathbb{N})$$

はある$\mathbb{C}$上の有理形関数$\psi \in \mathcal{U}$ に収束し，

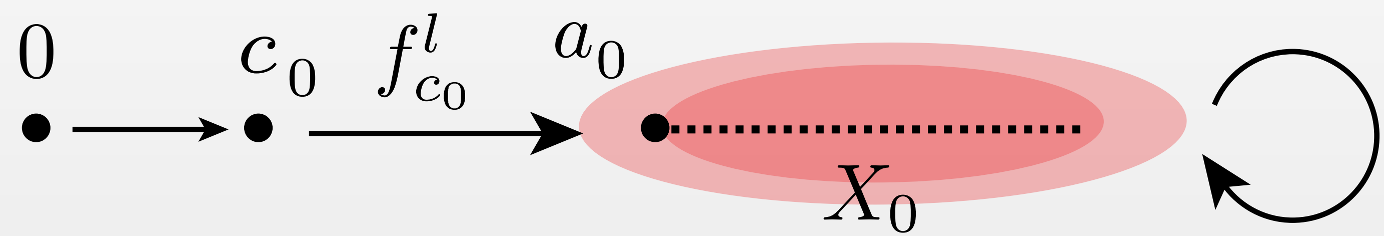
$$f^p \circ \psi(w) \ = \ \psi(\lambda w), \quad \psi(0) = a_0,$$

をみたす．とくに$\psi \in \mathcal{Z}(a_0)$ であり，ポアンカレ関数とよばれる.

一般化ポアンカレ関数

◆ $c_0 \in SH$ のとき，「分岐点 $z=0$ の軌道」は「双曲的集合」とよばれる力学系的に安定した集合 X_0 に捕まる．

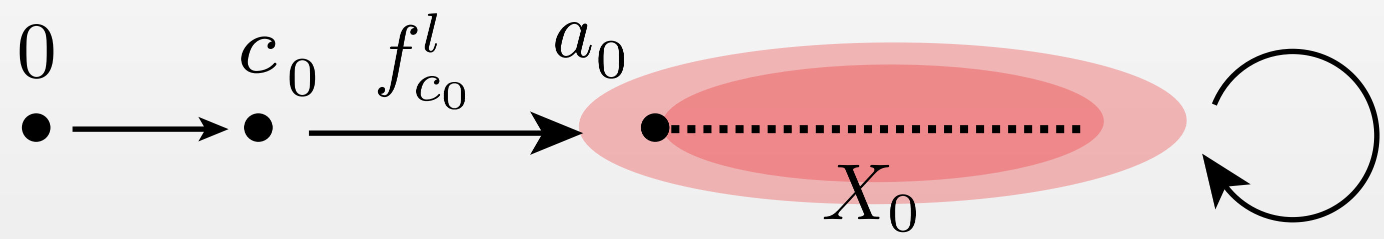
ダ



◆ 例：Misiurewicz点のとき X_0 は反発周期点．

一般化ポアンカレ関数

- $c_0 \in SH$ のとき，「分岐点 $z=0$ の軌道」は「双曲的集合」とよばれる力学系的に安定した集合 X_0 に捕まる．



- 例：Misiurewicz点のとき X_0 は反発周期点．

- X_0 上の力学系からポアンカレ関数を一般化したものがえられる．

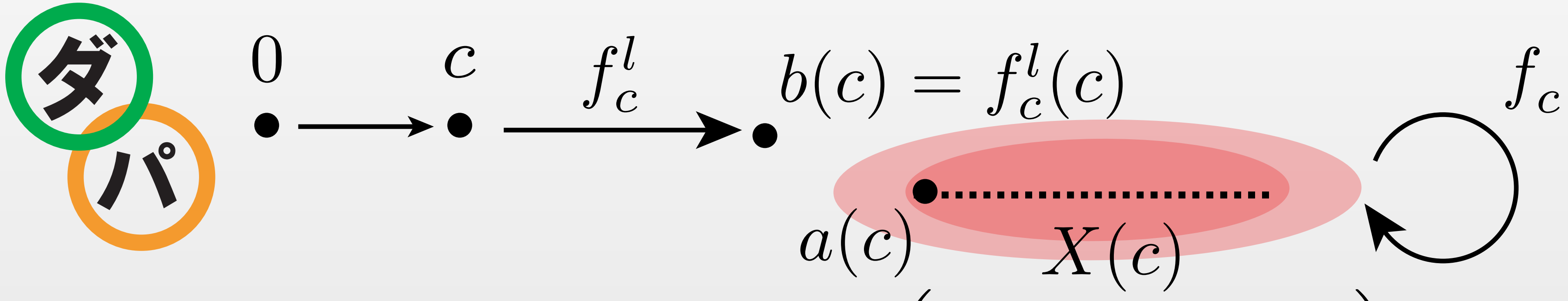
$$f_{c_0}^{m(k)}\left(a_0 + w/\lambda_{m(k)}\right) \to \psi$$

座標変換

$$\approx f_{c_0}^{m(k)+l}\left(c_0 + w/(A_0\lambda_{m(k)})\right) \to \psi$$

パラメーター空間へ

◆ $c \approx c_0$ のとき「双曲的集合」X_0 の力学系的は安定しているので $X(c)$ という形で残る．一般化ポアンカレ関数も残る．

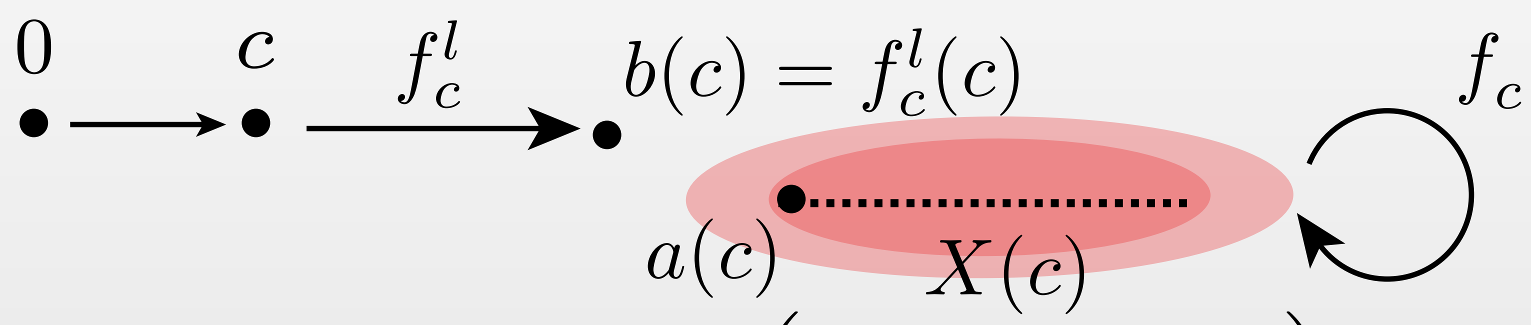


$$f_c^{m(k)}\left(a(c) + \frac{w}{\lambda_{m(k)}(c)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi^c(w)$$

パラメーター空間へ

◆ $c \approx c_0$ のとき「双曲的集合」X_0 の力学系的は安定しているので $X(c)$ という形で残る．一般化ポアンカレ関数も残る．

ダ パ



$$f_c^{m(k)}\left(a(c) + \frac{w}{\lambda_{m(k)}(c)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi^c(w)$$

パ

$$c = c_0 + Q\rho_k w$$

$$b(c) - a(c) = {}^{\exists}B_0(c - c_0) + \cdots \qquad B_0 \neq 0 \quad \text{横断性}$$

$$F_{m(k)+l}(c) = f_c^{m(k)}(b(c)) \approx f_c^{m(k)}(a(c) + B_0(c - c_0))$$

定数 Q をうまくとる $\quad \to \psi \quad \begin{matrix} c \to c_0 \\ k \to \infty \end{matrix}$