

Zalcmanの補題と複素力学系

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
川平 友規

日本数学会2013年度年会・函数論分科会
2013年3月22日

Zalcman = ザル○マン

◆ ザルクマン? ザルツマン?

◆ 『ギョエテとは
俺のことかと
ゲーテ云ひ』

言語学者・矢崎源九郎『日本の外来語』（1964年、岩波書店）より

― 表記の上ではゴエテ、ギューテ、ギエーテ、ギューテ、ギューテ、ギョート、ギョーツ、ゲーテ、ギュエテ、ゲオエテ、ゴアタ、グウイーテ、ゲエテー、ゲーテー、ゲエテー、ギョウテ、ギョーテ、ギョーテ、ギョーテー、ギョテー、ゴエテ、ギョテ、ギョヲテ、ギョオテ、ゲョーテ、ゲョーテ、ゴエテー、ゲエテ、ギョエテ、ゲイテ、ギョエテ、と、じつに二十九通りの書き方があるという。「ギョーテとは俺のことかとゲーテ言ひ」という、斎藤緑雨の川柳すらも生まれているほどである。(170ページ)

ダイナミカル

Julia集合

(力学系のカオス部分)
関数族 $\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n \geq 0}$
が非・正規な部分

パラメトリック

Mandelbrot集合
(力学系の分岐部分)
関数族 $\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$
が非・正規な部分

Zalcman の補題

有理形関数族の非・正規性の特徴づける
複素平面上の有理形関数生成

Zalcman 関数

パラ Zalcman 関数

Julia集合とMandelbrot集合の類似性

2

Zalcman の補題

◆ $D \subset \mathbb{C}$: 領域, $\mathcal{F} : D$ 上で定義された有理形関数族

$f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の形

◆ Zalcmanの補題 ('75)

$\mathcal{F}$ が $z_0 \in D$ (の任意の近傍) において正規族でない

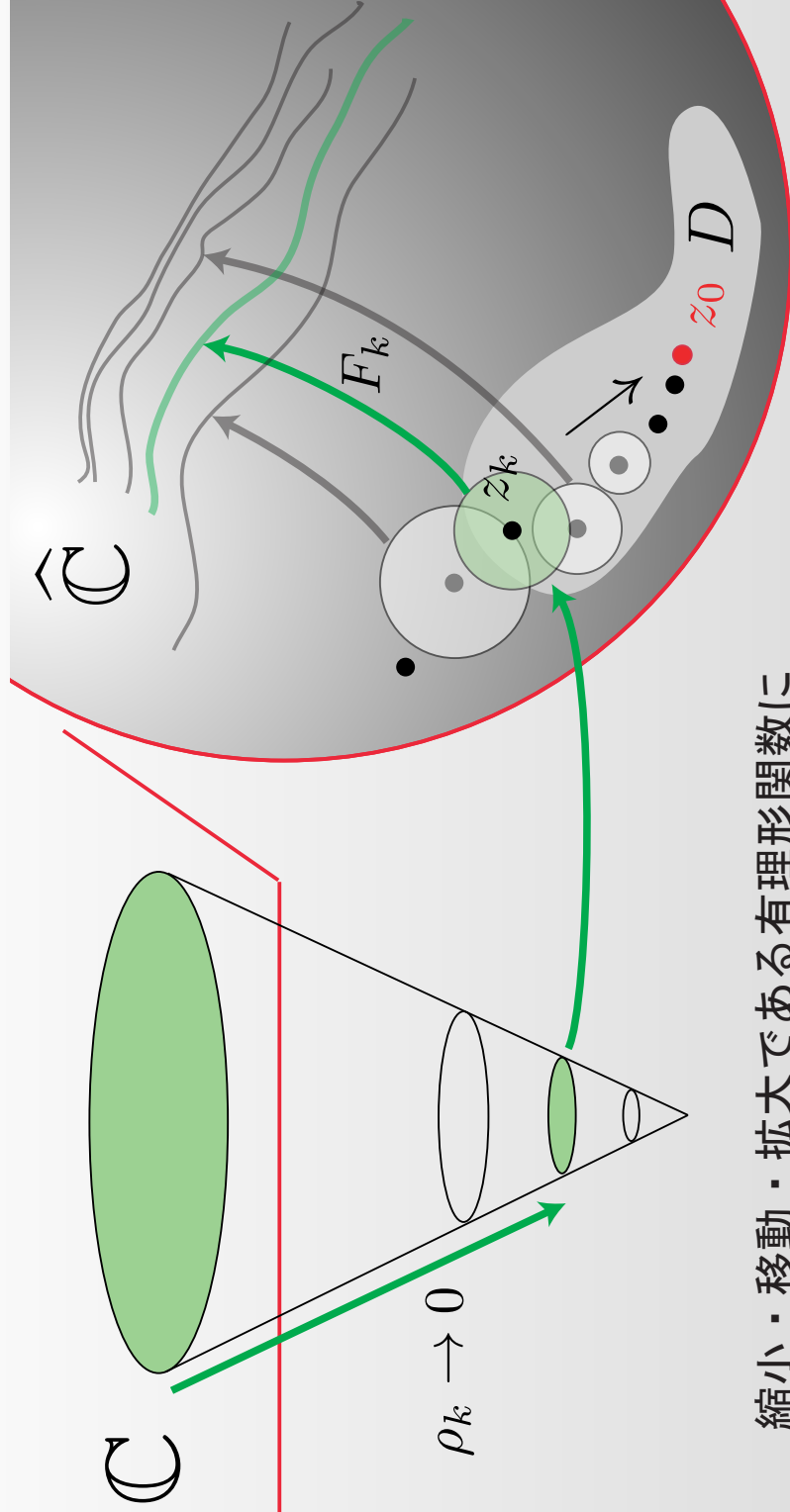
$$\begin{aligned} \iff \exists F_k \in \mathcal{F} \quad & \exists \rho_k \in \mathbb{C}^* \text{ s.t. } \rho_k \rightarrow 0 \\ & \exists z_k \in D \text{ s.t. } z_k \rightarrow z_0 \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } \psi_k(w) = F_k(z_k + \rho_k w)$$

$$\implies \psi : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : \text{定数でない有理形関数}$$

© 上コンパクト一様収束

3



縮小・移動・拡大である有理形関数に
収束させることができる

4

複素力学系



◆ $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 次数2以上の有理関数

$$\hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \dots \quad \text{『複素力学系』}$$

$$z_0 \mapsto z_1 \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} z_3 \xrightarrow{f} \dots \quad \text{軌道}$$

◆ Fatou集合：誤差に関して軌道が安定な初期値

$$F(f) := \left\{ z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : \exists U \text{ 近傍 s. t. } \{f^n|_U\}_{n \geq 0} \text{ は同程度連続} \right\}$$

$\longleftrightarrow$ 正規族

◆ Julia集合：力学系のカオス部分

$$J(f) := \left\{ z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : \forall U \text{ 近傍で } \{f^n|_U\}_{n \geq 0} \text{ は非正規族} \right\}$$

5

力学系族のパラメータ空間



◆ $\tilde{f} : X \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$: 正則, ただし X : 複素多様体

$\tilde{f} : (c, z) \mapsto f_c(z)$ z について次数一定2以上の有理関数

◆ 例 (2次多項式族) : $\tilde{f} : \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$$(c, z) \mapsto f_c(z) = z^2 + c$$

◆ $z = 0$ は $\mathbb{C}$ 上唯一の分岐点 : $f'_c(0) = 0$

◆ 定理 (Fatou, Julia)

各パラメータ $c \in \mathbb{C}$ について, いずれか一方がなりたつ :

(a) $\forall n \geq 0, \quad |f_c^n(0)| \leq 2$

(b) $n \rightarrow \infty$ のとき $|f_c^n(0)| \rightarrow \infty$

◆ Mandelbrot集合 : $\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : \text{(a) がなりたつ}\}$

6

分岐部分



◆ 例 (2次多項式族) : $f_c(z) = z^2 + c \quad (c \in \mathbb{C})$

◆ Mandelbrot集合 : $\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \quad (\forall n \geq 0)\}$

◆ 事実 (Mane-Sad-Sullivan)

◆ $\partial\mathbb{M} = \{c_0 \in \mathbb{C} : \forall U \text{ 近傍上 } \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0} \text{ が非正規族}\}$

◆ $\mathbb{C} - \partial\mathbb{M}$ は力学系が構造安定なパラメータ全体

$\iff \partial\mathbb{M}$ では力学系が分岐する (分岐部分)



イナミカル

$\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n \geq 0}$ が非正規

$J_c = J(f_c)$ Julia集合



ラムゼットリック

$\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ が非正規

$\partial\mathbb{M}$ Mandelbrot集合

7

イナミカル

◆ $z \in \hat{\mathbb{C}}$ が反発的周期点

$$:\Leftrightarrow \exists p, f^p(z) = z, \\ |(f^p)'(z)| > 1$$

◆ 定理 (Fatou, Julia)

$J_c = J(f_c)$ の中に

反発的周期点は稠密に存在.

☺ Montel の定理 + α

☺ Zalcman の補題 (Schwick)

$$\{z \mapsto f_c^n(z)\}_{n \geq 0}$$

パ ラメトリック

◆ $c \in \mathbb{C}$ が Misiurewicz 点

$$:\Leftrightarrow \exists l \geq 1,$$

$a = f_c^l(0)$ は反発的周期点

◆ 定理 (MSS? DH?)

$\partial \mathbb{M}$ の中に

Misiurewicz 点は稠密に存在.

☺ Montel の定理 + α

☺ Zalcman の補題

$$\{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$$

8

Zalcman 関数

ダ

◆ $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 次数2以上の有理関数

◆ $\{f^n\}_{n \geq 0}$ に Zalcman の補題を適用する

$$\diamond z_0 \in J(f) - \{\infty\} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \phi : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, & \exists n_k \rightarrow \infty, \rho_k \rightarrow 0, z_k \rightarrow z_0 \\ \phi(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z_k + \rho_k w) & \mathbb{C} \text{ 上の有理関数} \end{cases}$$

◆ $\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}_f(z_0) := \{\psi : \text{上の形の有理関数}\}$

◆ $\infty \in J(f)$ のとき $\mathcal{Z}_f(\infty) := \{1/\phi(w) : \phi \in \mathcal{Z}_F(0)\}$

$$F(\zeta) := 1/f(1/\zeta)$$

◆ $\mathcal{Z} := \bigcup_{z_0 \in J(f)} \mathcal{Z}(z_0) \quad : f \text{ の Zalcman 関数}$

9

Zalcman 関数の「不変性」



- ◆ $\mathcal{Z} := \bigcup_{z_0 \in J(f)} \mathcal{Z}(z_0)$: f の力学系が生成する Zalcman 関数 (有理形関数)
- ◆ $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U} := \left\{ \psi : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : \text{非定数有理形関数} \right\}$
- ◆ $\text{Aff} := \{ \delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \delta(w) = aw + b \text{ 複素アファイン} \}$
- ◆ $\mathcal{U}$ の「不変性」 : $f \circ \mathcal{U} \subset \mathcal{U} \quad \mathcal{U} \circ \text{Aff} = \mathcal{U}$

命題 (Steinmetz, $\mathcal{Z}$ 関数の「不変性」)

すべての $z_0 \in J(f)$ について $\mathcal{Z}(z_0)$ は次の「不変性」をもつ :

$$f \circ \mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(z_0) \circ \text{Aff}$$

$$f \circ \mathcal{Z} = \mathcal{Z} = \mathcal{Z} \circ \text{Aff}$$

10

パラメトリック Zalcman 関数



- ◆ 2次多項式族 : $f_c(z) = z^2 + c \quad (c \in \mathbb{C})$
- ◆ $\partial \mathbb{M} = \left\{ c_0 \in \mathbb{C} : \{c \mapsto f_c^n(0)\}_{n \geq 0} \text{ が非正規族} \right\}$
- ◆ $F_n(c) := f_c^n(0) \quad (n \geq 0)$ とおく. ■

$$F_1(c) = c, \quad F_2(c) = c^2 + c, \quad F_3(c) = (c^2 + c)^2 + c, \dots$$
- ◆ $\{c \mapsto F_n(c)\}_{n \geq 0}$ に Zalcman の補題を適用 :

$$c_0 \in \partial \mathbb{M} \iff \begin{cases} \exists n_k \rightarrow \infty, \rho_k \rightarrow 0, c_k \rightarrow c_0 \\ F_{n_k}(c_k + \rho_k w) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \Phi(w) \in \mathcal{U} \end{cases} \quad \mathbb{C} \text{ 上の有理形関数}$$
- ◆ $\mathcal{C}(c_0) := \{ \Phi \in \mathcal{U} : \text{上の形} \}$
- ◆ $\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial \mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$: パラメトリック Zalcman 関数族

11

パラZalcman関数の「不変性」

- パ ◆ $\mathcal{C} := \bigcup_{c_0 \in \partial \mathbb{M}} \mathcal{C}(c_0)$: パラメトリックZalcman関数族
- ◆ 命題 (パラZ関数の「不変性」) :
 すべての $c \in \partial \mathbb{M}$ について $\mathcal{C}(c)$ は次の「不変性」をもつ :

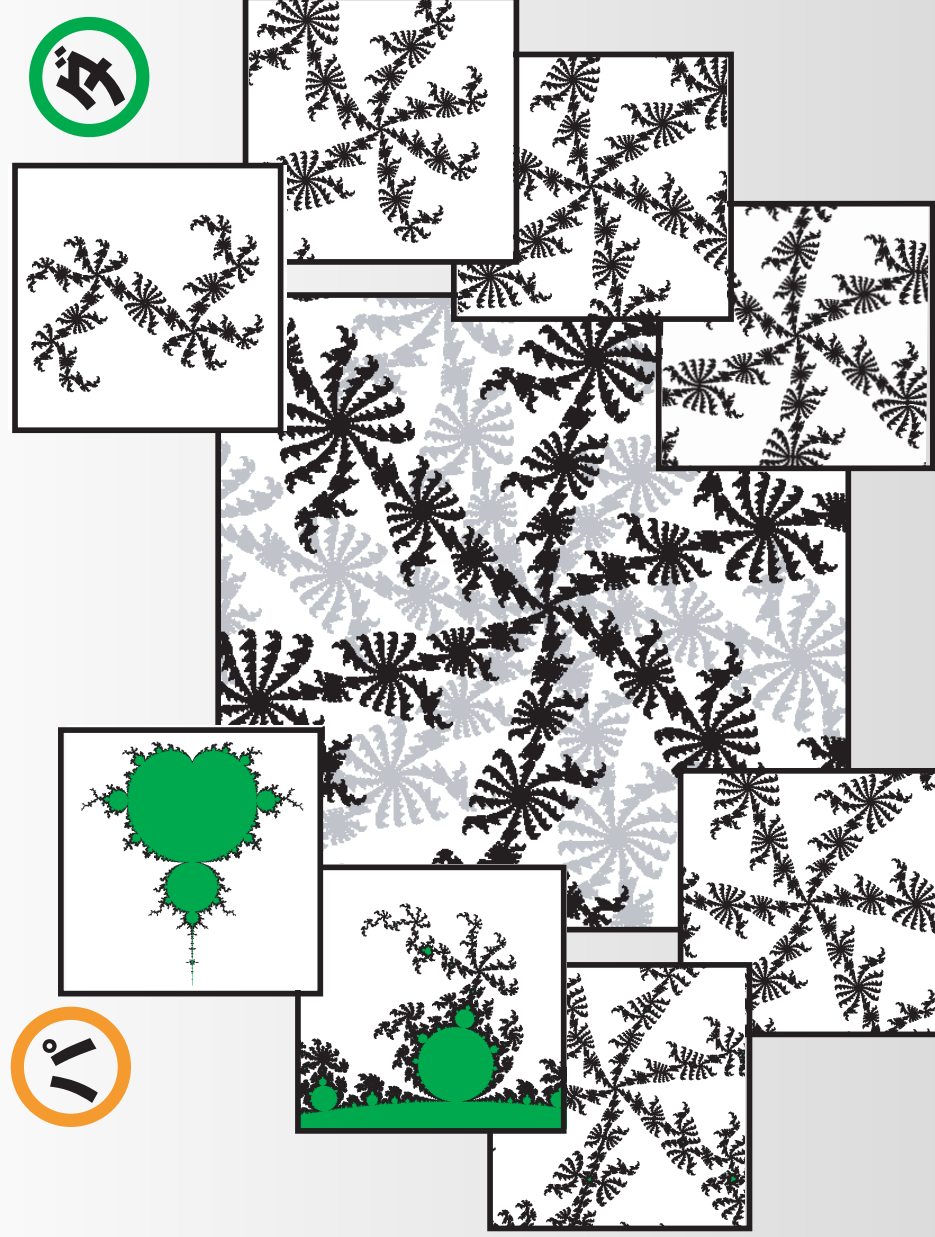
$$f_c \circ \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c) \circ \text{Aff}$$
- ◆ $c \in \mathbb{C}, z \in J(f_c)$ に対し $\mathcal{Z}_c(z) := \mathcal{Z}_{f_c}(z)$ とおく.
 このとき $f_c \circ \mathcal{Z}_c(z) = \mathcal{Z}_c(z) = \mathcal{Z}_c(z) \circ \text{Aff}$
- ◆ 定理 (Z関数族とパラZ関数族の交差) :
 $\partial \mathbb{M}$ の稠密部分集合 SH が存在して,
 $c \in SH \implies c \in J(f_c) \text{ かつ } \mathcal{Z}_c(c) \cap \mathcal{C}(c) \neq \emptyset.$

12

Zalcman関数とパラZalcman関数の交差

- ダ パ ◆ $c_0 \in \partial \mathbb{M}$ が半双曲的 (semi-hyperbolic)
 $:\iff$ 分岐点 $z = 0$ の f_{c_0} による軌道が
 $z = 0$ 自身に集積しない.
- ◆ 半双曲的パラメーター全体を SH で表す.
- ◆ 例 : c_0 が Misiurewicz $\implies c_0$ は半双曲的
 $\partial \mathbb{M}$ 内で稠密 SH も稠密. じつは $H.\dim = 2$ (央倉)
- ◆ 定理 (Z関数族とパラZ関数族の交差 : 再)
 $c_0 \in SH$ のとき, $Q \neq 0, n_k \rightarrow \infty, \rho_k \rightarrow 0$ が存在して
ダ $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \rightarrow \exists \phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$
- パ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0 + Q\rho_k w) = f_{c_0 + Q\rho_k}^{n_k}(c_0 + Q\rho_k w)$
 $\rightarrow \phi$ 上と同じ. よって $\phi \in \mathcal{C}(c_0) \cap \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$

13



「交差点」の応用：J と M の類似性



◆ $\mathbb{D}_r = \{|z| < r\}$, $K \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

$$[K]_r := (K \cap \mathbb{D}_r) \cup \partial \mathbb{D}_r$$

$$a(K - b) := \{a(z - b) : z \in K\}$$

◆ 定理(J と M の類似性, Tan, Rivera-Letelier, K) :

$c_0 \in SH$ のとき, さきほどの $\phi \in \mathcal{C}(c_0) \cap \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$ を用いて

$\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$ とおく. このとき任意の正数 r に対し

$$\text{ダ} \quad [\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r \rightarrow [\mathcal{J}]_r$$

$$(k \rightarrow \infty)$$

$$\text{パ} \quad [Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)]_r \rightarrow [\mathcal{J}]_r$$

ただし収束はハウスドルフ位相の意味

J と M の類似性：証明のアイディア

- ◆ 材料： **タ** $\phi_k(w) := f_{c_0}^{n_k}(c_0 + \rho_k w) \rightarrow \exists \phi \in \mathcal{Z}_{c_0}(c_0)$
バ $\Phi_k(w) := F_{n_k}(c_0 + Q\rho_k w) = f_{c_0}^{n_k} + Q\rho_k w(c_0 + Q\rho_k w)$
 $\mathcal{J} := \phi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$

- ◆ **タ** $[\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r \rightarrow [\mathcal{J}]_r$ のアイディア：
 $f_{c_0}^n(J) = J$ より $[\rho_k^{-1}(J - c_0)]_r = [\phi_k^{-1}(J)]_r \rightarrow [\phi^{-1}(J)]_r$

- ◆ **バ** $[Q^{-1}\rho_k^{-1}(\mathbb{M} - c_0)]_r \rightarrow [\mathcal{J}]_r$
 $= \mathcal{M}_k$
 $[\mathcal{M}_k]_r \subset N_\epsilon([\mathcal{J}]_r)$ かつ $N_\epsilon([\mathcal{J}]_r) \subset [\mathcal{M}_k]_r$ を示せばOK.

16

「交差」と一般化ポアンカレ関数

- ◆ 定理で述べたZalcman関数とパラメトリックZalcman関数の「交差点」はポアンカレ関数を一般化したもの.

- タ** ◆ 定理（ケーニヒス，ポアンカレ関数の存在）
 $f = f_c \ (c \in \mathbb{C})$ の反発周期点 a_0 （周期 p ） $\lambda := (f^p)'(a_0)$
 $\implies$ 関数列 $w \mapsto f^{kp} \left(a_0 + \frac{w}{\lambda^k} \right) \ (k \in \mathbb{N})$

はある $\mathbb{C}$ 上の有理形関数 $\psi \in \mathcal{U}$ に収束し，

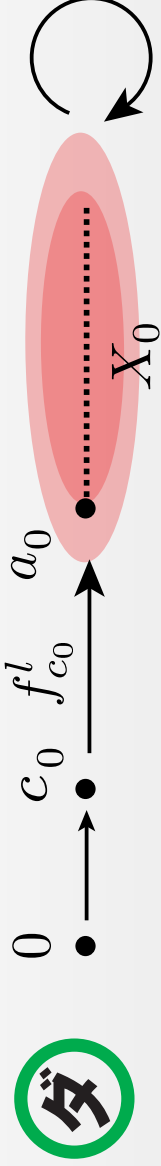
$$f^p \circ \psi(w) = \psi(\lambda w), \quad \psi(0) = a_0,$$

をみたす. とくに $\psi \in \mathcal{Z}(a_0)$ であり，ポアンカレ関数とよばれる.

17

一般化ポアンカレ関数

- ◆ $c_0 \in SH$ のとき, 「分岐点 $z=0$ の軌道」は「双曲的集合」とよばれる力学系的に安定した集合 X_0 に捕まる.



- ◆ 例 : Misirewicz点のとき X_0 は反発周期点.

- ◆ X_0 上の力学系からポアンカレ関数を一般化したものがえられる.

$$f_{c_0}^{m(k)}(a_0 + w/\lambda_{m(k)}) \rightarrow \psi$$

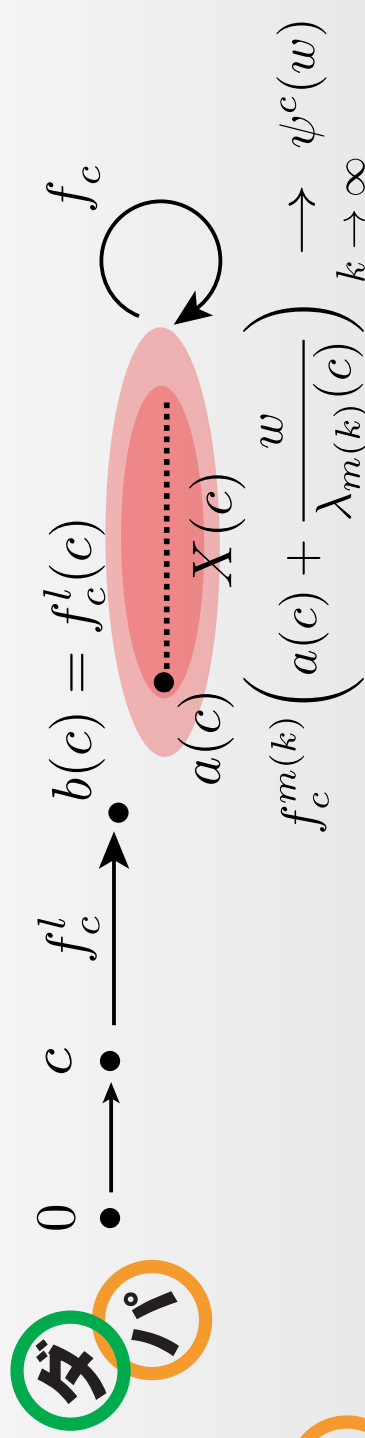
座標変換

$$\approx f_{c_0}^{m(k)+l}(c_0 + w/(A_0 \lambda_{m(k)})) \rightarrow \psi$$

18

パラメータ空間へ

- ◆ $c \approx c_0$ のとき「双曲的集合」 X_0 の力学系的は安定しているの
で $X(c)$ という形で残る. 一般化ポアンカレ関数も残る.



◆ $c = c_0 + Q\rho_k w$

$b(c) - a(c) = \exists B_0(c - c_0) + \dots$ $B_0 \neq 0$ 横断性

$F_{m(k)+l}(c) = f_c^{m(k)}(b(c)) \approx f_c^{m(k)}(a(c) + B_0(c - c_0))$

定数 Q をうまくとる $\rightarrow \psi$ $c \rightarrow c_0$ $k \rightarrow \infty$

19

